Fondamenti di automatica
(1/2 annualità)

(Prof. Rocco)

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Raccolta di temi d'esame

La presente raccolta comprende i testi di tutti gli appelli ordinari dell'A.A. 1999-00 e le soluzioni dei primi due appelli.

Fondamenti di automatica
(1/2 annualità)

(Prof. Rocco)

Appello del ....

Cognome:..

Nome: ....

Matricola:...............................

Firma:..

Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **6** fogli (compresa la copertina). Tutti i fogli utilizzati vanno firmati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.

23 Giugno 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalla seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+5y(t)=u(t)$.

Si assuma $y(0)=\dot{y}(0)=0$.

1.1 Si determini l'espressione analitica ($y(t)$ = ...) della risposta di y allo scalino unitario in u.

1.2 Posto $u(t) = k(y°(t) - y(t))$, si determini il valore di k in modo tale che i poli del sistema in anello chiuso abbiano smorzamento uguale a 0.3.

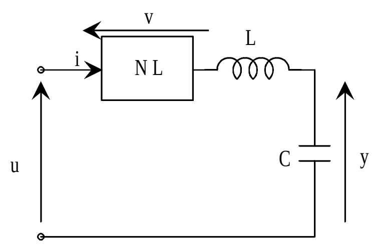
Esercizio 2

2.1 Con riferimento ad un generico sistema dinamico non lineare:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)$$

si scrivano le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno di un suo stato di equilibrio, associato ad un valore costante dell'ingresso $u=\bar{u}$.

2.2 Con riferimento ora alla seguente rete elettrica,



in cui L=1, C=1, e l'elemento non lineare NL stabilisce tra la corrente i che l'attraversa e la tensione v ai suoi capi la relazione $v=2\sin(i)$, si determini lo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u=\bar{u}=2$.

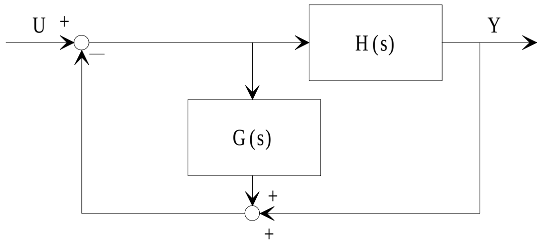
2.3 Si discuta la stabilità del sistema linearizzato intorno allo stato di equilibrio ricavato al punto precedente.

2.4 Si supponga ora che $u(t)=\bar{u}+\delta u(t)$, con $\delta u(t)$ = 0.1 sca(t).

Servendosi del sistema linearizzato, si tracci l'andamento qualitativo dell'uscita $y(t)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi:

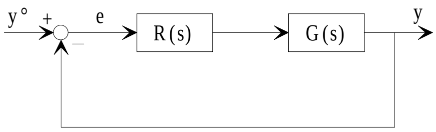


3.1 Si determini la funzione di trasferimento $F(s)$ dall'ingresso u all'uscita y.

3.2 Posto quindi $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$, $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$, si determini, se possibile, l'espressione dell'uscita y, a transitorio esaurito, quando l'ingresso u assume l'andamento $u(t)$ = sin(2t) +1.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s)=\dfrac{10}{s(1+s)}$, $R(s)=\mu_R\dfrac{1+s}{1+sT}$

4.1 Si determinino i parametri μ_R e T di $R(s)$ in modo tale che:

- la pulsazione critica ω_c sia circa uguale a 1 *rad/s*
- il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60°.

4.2 Si determini il valore dell'errore e a regime quando $y°(t)$ = 2+t, t≥ 0.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Trasformando secondo Laplace, essendo lo stato iniziale nullo, si ottiene:

$$s^2Y(s)+6sY(s)+5Y(s)=U(s)$$

Pertanto:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+6s+5}.$$

Utilizziamo il metodo di Heaviside:

$$Y(s)=\frac{1}{s\left(s^2+6s+5\right)}=\frac{\alpha_1}{s}+\frac{\alpha_2}{s+1}+\frac{\alpha_3}{s+5}=\frac{\alpha_1(s+1)(s+5)+\alpha_2 s(s+5)+\alpha_3 s(s+1)}{s\left(s^2+6s+5\right)}$$

Valutando il numeratore in s = 0, s = –1, s = –5, si ottiene il sistema:

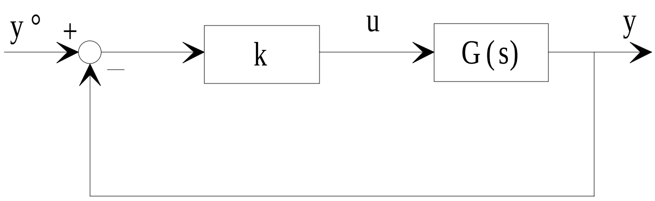
$$\begin{cases} 5\alpha_1=1 \\ -4\alpha_2=1 \\ 20\alpha_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1/5 \\ \alpha_2=-1/4 \\ \alpha_3=1/20 \end{cases}.$$

Pertanto:

$$y(t)=\alpha_1+\alpha_2 e^{-t}+\alpha_3 e^{-5t}=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{20}e^{-5t},\quad t\geq 0.$$

1.2

Il sistema si lascia descrivere dal seguente schema a blocchi:



Il polinomio caratteristico in anello chiuso risulta:

$$\chi(s)=s^2+6s+5+k=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$

Pertanto:

$$\begin{matrix} \omega_n=\sqrt{5+k} \\ \zeta\omega_n=3 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \zeta=\frac{3}{\sqrt{5+k}}=0.3 \quad\Rightarrow\quad k=95.$$

Esercizio 2

2.1

Sia $\bar{\boldsymbol{x}}$ uno stato di equilibrio e $\bar{\boldsymbol{y}}$ la corrispondente uscita di equilibrio. Si avrà quindi:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}) = 0 \\ &\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}) \end{aligned}.$$

Posto:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{D} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}},$$

le equazioni del sistema linearizzato sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u}(t) \\ &\delta\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{u}(t) \end{aligned}.$$

2.2

Sia x_1 la corrente nell'induttore, x_2 la tensione ai capi del condensatore. Le equazioni della dinamica elettrica comportano:

$$\begin{aligned} &u = v + L\dot{x}_1 + x_2 \\ &C\dot{x}_2 = x_1 \end{aligned}$$

Con i valori dati e con l'espressione di v assegnata, si perviene alle equazioni del sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\sin(x_1) - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$
$$y = x_2$$

Lo stato di equilibrio è soluzione delle equazioni ottenute annullando le derivate:

$$\begin{cases} -2\sin(\bar{x}_1) - \bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 2 \end{cases}.$$
$$\bar{y} = \bar{x}_2 = 2$$

Linearizzando nell'intorno dello stato di equilibrio, si ottiene:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -2\cos(\bar{x}_1)\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \delta x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -2\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \delta x_1 \end{cases}.$$
$$\delta y = \delta x_2$$

2.3

Trasformando secondo Laplace le singole equazioni a stato iniziale nullo si ottiene:

$$\begin{cases} s\delta X_1(s) = -2\delta X_1(s) - \delta X_2(s) + \delta U(s) \\ s\delta X_2(s) = \delta X_1(s) \end{cases}$$

$$\delta Y(s) = \delta X_2(s)$$

Eliminando δX_1 si ha:

$$s^2\delta X_2(s) = -2s\delta X_2(s) - \delta X_2(s) + \delta U(s)$$

$$\delta Y(s) = \delta X_2(s)$$

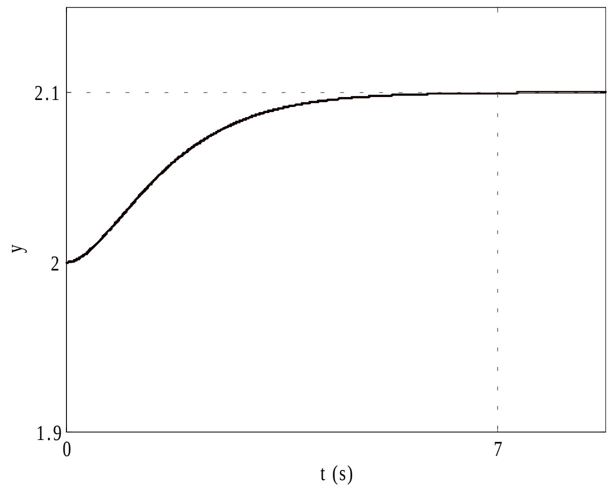
e quindi la funzione di trasferimento del sistema linearizzato:

$$\frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2} \, .$$

Poiché i poli della funzione di trasferimento sono reali negativi, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

2.4

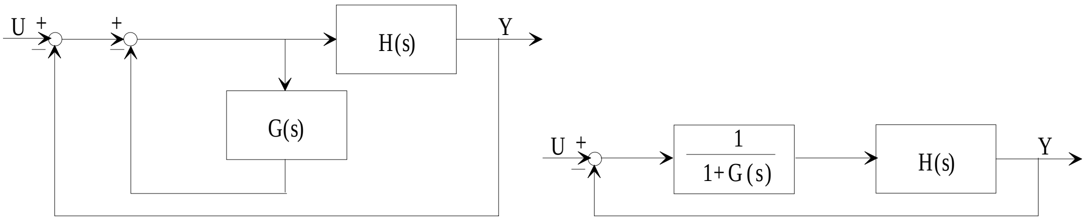
Occorre tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema con due poli coincidenti. La risposta parte dal valore 2 (uscita di equilibrio) e tende al valore 2.1 (somma dell'uscita di equilibrio e dello scostamento di regime calcolato come prodotto dell'ampiezza dello scalino, 0.1, per il guadagno del sistema, 1). Il transitorio si esaurisce dopo circa 7 unità di tempo.



Esercizio 3

3.1

Occorre elaborare lo schema a blocchi, in due passi:



Risulta quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{H(s)}{1+G(s)}}{1+\dfrac{H(s)}{1+G(s)}}=\frac{H(s)}{1+G(s)+H(s)}.$$

3.2

Per sostituzione si ha:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=F(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+5}.$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile, e si può applicare il teorema della risposta in frequenza:

$$y(t)\approx|F(2j)|\sin(2t+\angle F(2j))+F(0)\approx 0.22\sin(2t-0.36)+0.2\,.$$

(infatti: $F(2j)=\dfrac{1+2j}{1+10j}\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}|F(2j)|=\sqrt{5}/\sqrt{101}\approx 0.22\\ \angle F(2j)=\arctan(2)-\arctan(10)\approx -0.36\end{array}\right.$).

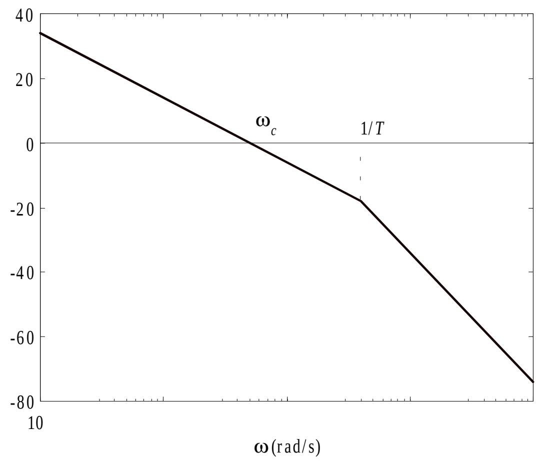
Esercizio 4

4.1

La funzione di trasferimento d'anello risulta:

$$L(s)=R(s)G(s)=\frac{10\mu_R}{s(1+sT)},$$

ed il suo diagramma asintotico di Bode del modulo, per generici valori di μ_R e T, è il seguente:



Risulta:

$$\omega_c = 10\mu_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R = 0.1$$

$$\varphi_c = -90° - \arctan(\omega_c T) = -90° - \arctan(T)$$

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 90° - \arctan(T) \geq 60° \quad \Rightarrow \quad \arctan(T) \leq 30° \quad \Rightarrow \quad T \leq \tan(30°) \approx 0.577$$

4.2

Il segnale di riferimento si può scrivere come $y°(t) = 2\text{sca}(t) + \text{ram}(t)$. Dalle tabelle di precisione statica, tenuto conto che L ha tipo 1 ed il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, si ha:

$$e_\infty = 0 + \frac{1}{\mu_L} = 1.$$

7 Luglio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

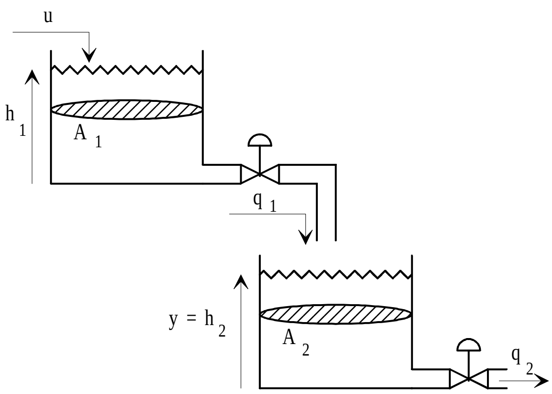
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + 2u(t)\\ y(t) &= 3x(t)\end{aligned}.$$

1.1 Si supponga che $u(t) = \sin(t)$, $t \geq 0$. Si determini il valore dello stato iniziale $x(0)$ in modo tale che l'uscita $y(t)$ assuma un andamento sinusoidale per $t \geq 0$. [1]

1.2 Si verifichi che l'andamento sinusoidale ricavato al punto precedente coincide con l'andamento predetto (per $t \to \infty$) dal teorema della risposta in frequenza.

Esercizio 2

Si consideri il sistema idraulico riportato in figura:



Il sistema è costituito da due serbatoi di sezione costante collegati da una valvola. Anche il secondo serbatoio presenta una valvola in uscita. Le due valvole, entrambe ad apertura costante, stabiliscono tra la portata di liquido che le attraversa e il livello nel serbatoio a monte le relazioni:

$$q_1 = \varphi(h_1), \quad q_2 = \varphi(h_2),$$

dove φ è una funzione non lineare.

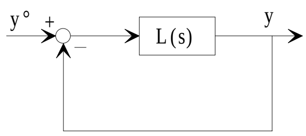
2.1 Si dica di che ordine è il sistema dinamico che descrive il sistema idraulico.

2.2 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico.

2.3 Posto $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, si determini una possibile espressione della funzione φ in modo tale che il sistema, soggetto all'ingresso costante $u = \bar{u} = 2$, sia in equilibrio con i livelli dei due serbatoi uguali e di valore $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 8$.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:

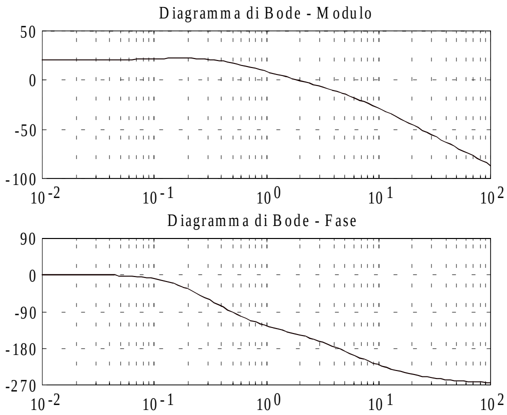


---

[1] Si ricorda che: $\int e^{\tau} \sin(\tau) d\tau = e^{\tau} \frac{\sin(\tau) - \cos(\tau)}{2}$

3.1 Si spieghi in che senso il criterio di Bode per la stabilità del sistema in anello chiuso è un caso particolare del criterio di Nyquist.

3.2 Si supponga ora che $L(s)$ abbia i diagrammi di Bode riportati di seguito:



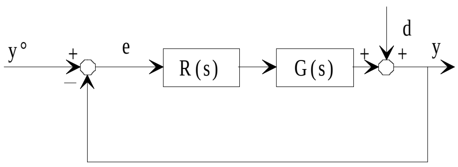
Supponendo L priva di poli a parte reale positiva, si discuta con il criterio di Bode la stabilità del sistema in anello chiuso.

3.3 Si verifichi il risultato del punto precedente applicando direttamente il criterio di Nyquist.

3.4 Si determini quindi approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y ad uno scalino in $y°$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{100}{(1+s)^2} e^{-0.1s}$.

4.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ in modo tale che:

- la pulsazione critica ω_c sia la più ampia possibile.
- il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60°.

4.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si determini l'insieme delle pulsazioni ω per cui un disturbo $d(t) = \sin(\omega t)$ sia attenuato sull'uscita y almeno di un fattore 10.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Si utilizza la formula di Lagrange con $A = -1$, $B = 2$:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)}2\sin(\tau)d\tau = e^{-t}x_0 + 2e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\sin(\tau)d\tau =$$

$$= e^{-t}x_0 + 2e^{-t}\left[e^{\tau}\frac{\sin(\tau)-\cos(\tau)}{2}\right]_0^t = e^{-t}x_0 + \sin(t) - \cos(t) + e^{-t}$$

Affinché lo stato (e quindi l'uscita) assuma un andamento sinusoidale, deve essere x_0=–1. In tal caso risulta:

$$y(t) = 3(\sin(t) - \cos(t)) = 3\sqrt{2}\sin(t - \pi/4)\ .$$

1.2

La funzione di trasferimento risulta:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{CB}{s - A} = \frac{6}{s+1}\ .$$

Essendo il sistema asintoticamente stabile si può applicare il teorema della risposta in frequenza e risulta:

$$y(t) \approx |G(j)|\sin(t + \angle G(j)) = 3\sqrt{2}\sin(t - \pi/4)\ .$$

(infatti: $G(j) = \dfrac{6}{1+j} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} |G(j)| = 6/\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \\ \angle G(j) = -\arctan(1) = -\pi/4 \end{array} \right.$).

Esercizio 2

2.1

Il sistema è del secondo ordine, essendoci due elementi di accumulo (i due serbatoi).

2.2

Posto $x_1 = h_1$ e $x_2 = h_2$, le equazioni di bilancio ai due serbatoi comportano:

$$\begin{array}{l} A_1\dot{x}_1 = u - \varphi(x_1) \\ A_2\dot{x}_2 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \end{array}\ .$$

Pertanto le equazioni del sistema dinamico sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{u - \varphi(x_1)}{A_1} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{A_2} \end{cases}$$

$$y = x_2$$

2.3

Il punto di equilibrio è definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \bar{u} - \varphi(\bar{x}_1) = 0 \\ \varphi(\bar{x}_1) - \varphi(\bar{x}_2) = 0 \end{cases}.$$

Deve pertanto essere $\varphi(8) = 2$. Per esempio, si può scegliere come funzione φ la seguente:

$$\varphi(x) = \sqrt{0.5x}\,.$$

Esercizio 3

3.1

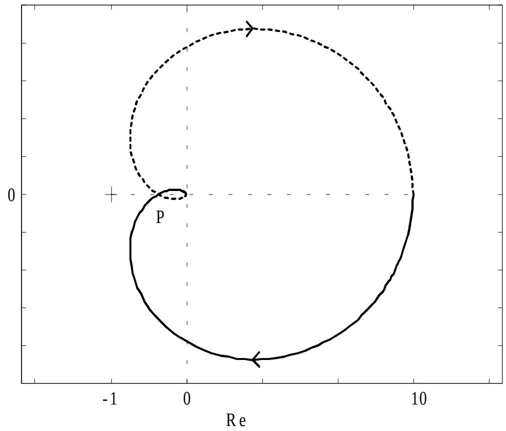
Una delle ipotesi di applicabilità del criterio di Bode è che la funzione di trasferimento d'anello L non abbia poli a parte reale positiva: in questa ipotesi il criterio di Nyquist afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente se e solo se il diagramma di Nyquist associato a L non compie giri intorno al punto -1 nel piano complesso (e non passa per tale punto). In presenza della seconda ipotesi di applicabilità del criterio di Bode (il modulo di L vale 1 per uno e un solo valore di pulsazione), le condizioni espresse dal teorema (guadagno d'anello e margine di fase positivi) equivalgono ad imporre l'assenza di giri del diagramma di Nyquist intorno al punto -1.

3.2

Le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte. Il guadagno d'anello è positivo (per $\omega \to 0$ la fase di L è nulla e il modulo è costante) e la fase critica, che si rileva dal diagramma della fase ad una pulsazione circa uguale a 2 rad/s (pulsazione critica) vale approssimativamente –150°. Ne consegue che il margine di fase è positivo (circa 30°) e per il criterio di Bode il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.3

Occorre tracciare il diagramma di Nyquist qualitativo sulla base dei diagrammi di Bode:



Il punto P di intersezione del diagramma con il semiasse reale negativo è associato alla pulsazione alla quale la fase di L vale $-180°$. Poiché a tale pulsazione, come si legge dai diagrammi di Bode, il modulo è inferiore a 1, il punto P è alla destra del punto -1, ossia il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto -1, e quindi, per il criterio di Nyquist, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.4

Essendo il margine di fase piuttosto esiguo (circa 30°) è opportuno utilizzare un'approssimazione della funzione di trasferimento in anello chiuso del secondo ordine a poli complessi. La pulsazione naturale dei poli è approssimabile alla pulsazione critica (circa 2 rad/s), lo smorzamento è ricavabile dalla formula:

$$\zeta \approx \frac{\varphi_m}{100} \approx 0.3 .$$

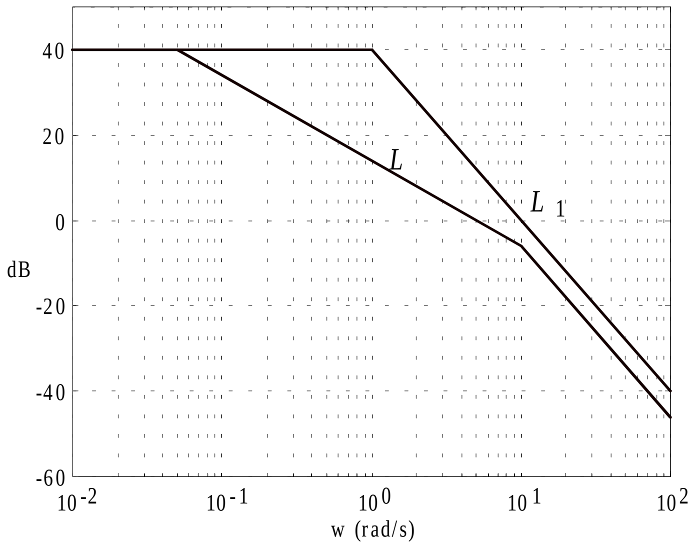
Pertanto il tempo di assestamento è approssimativamente pari a:

$$T_a \approx \frac{5}{\zeta\omega_n} = \frac{5}{0.3 \times 2} = 8.33 .$$

Esercizio 4

4.1

Non essendovi specifiche statiche, si può procedere direttamente al progetto dinamico. Tracciato il diagramma di Bode del modulo di $L_1 \equiv G$ occorre determinare graficamente il modulo di L. Scelta una pulsazione candidata ad essere la pulsazione critica, si traccia un tratto di retta di pendenza -1, si raccorda il diagramma del modulo di L con quello di L_1 in bassa frequenza (non ci sono ragioni per procedere diversamente) e si inserisce un polo dopo la pulsazione critica, in modo da far scendere la pendenza a -2 (per la causalità del controllore) e mantenere il modulo di L inferiore al modulo di L_1 (per la moderazione del controllo).



Per determinare la pulsazione critica ω_c, si procede per tentativi, tenendo presente che la fase critica vale:

$$\varphi_c = -\arctan(100\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right) - 0.1 \times \omega_c \times \frac{180°}{\pi} \approx -90° - \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right) - 0.1 \times \omega_c \times \frac{180°}{\pi}$$

dove ω_p è la pulsazione del polo di alta frequenza, mentre l'ultimo termine è il contributo del ritardo. Posto $\omega_c = 5$, $\omega_p = 10$, si ha:

$$\varphi_c \approx -90° - \arctan(0.5) - 0.5 \times \frac{180°}{\pi} \approx -119° \quad \Rightarrow \quad \varphi_m \approx 61° .$$

Con questa scelta risulta:

$$L(s) = \frac{100}{(1 + s/0.05)(1 + s/10)} e^{-0.1s} = \frac{100}{(1 + 20s)(1 + 0.1s)} e^{-0.1s} ,$$

e quindi:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{(1 + s)^2}{(1 + 20s)(1 + 0.1s)} .$$

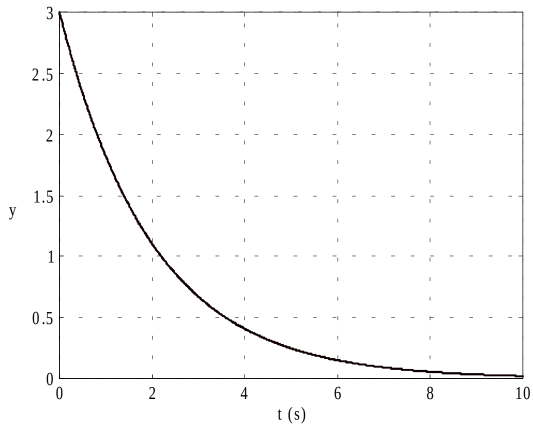
4.2

Occorre determinare l'insieme delle pulsazioni per le quali il modulo di L è superiore a 20 dB. Dal diagramma del modulo si ricava $\omega < 0.5$.

20 Luglio 2000

Esercizio 1

Un sistema dinamico del primo ordine presenta la risposta allo scalino riportata in figura:



1.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

1.2 Si ricavi l'espressione analitica della risposta di $G(s)$ all'ingresso $u(t) = 1+t$, $t \geq 0$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\frac{1-s^2}{(1+10s)(1+0.1s)^2}.$$

2.1 Si traccino i diagrammi asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a G.

2.2 Si dica, *giustificando la risposta*, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

a) Il sistema è di ordine zero;

b) Il sistema è a fase minima;

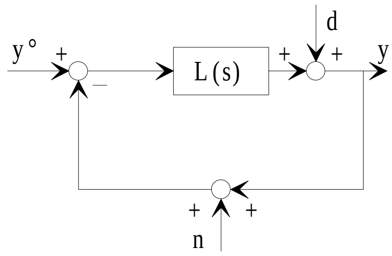
c) La risposta allo scalino del sistema parte da un valore uguale a zero;

d) La risposta all'impulso del sistema tende a zero;

e) Non esiste alcuna pulsazione ω per cui una sinusoide $u(t) = \sin(\omega t)$ venga amplificata in uscita di un fattore superiore a 5.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:



3.1 Si spieghi a quali considerazioni sul progetto di *L* conduce l'analisi del problema dell'attenuazione di eventuali disturbi in linea di andata *d*.

3.2 Si spieghi a quali considerazioni sul progetto di *L* conduce l'analisi del problema dell'attenuazione di eventuali disturbi in linea di retroazione *n*.

3.3 Posto quindi:

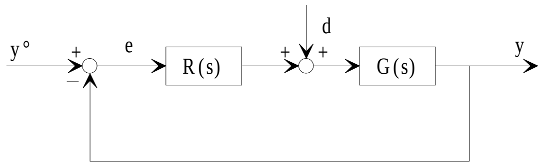
$$L(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+0.005s)},$$

si determini l'insieme delle pulsazioni per cui un disturbo $n(t) = \sin(\omega t)$ è attenuato sull'uscita *y* almeno di un fattore 10.

3.4 Si tracci quindi l'andamento qualitativo della risposta di *y* ad uno scalino in *y*°, in assenza di disturbi.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{s(1+s)}$, $\quad R(s) = \mu_R$.

4.1 Si determini il valore minimo $\mu_{r\ min}$ di μ_R per cui, in presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{ram}(t)$, con $|A| \leq 2$, e di un disturbo $d(t) = D\text{sca}(t)$, con $|D| \leq 1$, l'errore *e* a transitorio esaurito, e_∞, soddisfi la seguente relazione:

$$|e_\infty| \leq 0.03.$$

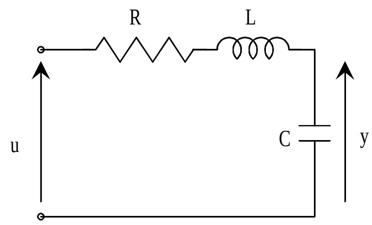
4.2 Posto quindi $\mu_r = \mu_{r\ min}$, si determinino pulsazione critica e margine di fase del sistema di controllo.

4.3 Si supponga il disturbo *d* misurabile. Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo comprensivo del compensatore del disturbo.

6 Settembre 2000

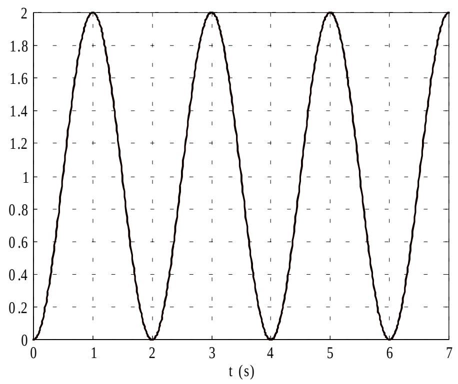
Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema elettrico:



1.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento dalla tensione *u* alla tensione *y*.

1.2 Si supponga ora *R*=0, *L*=1, e che la risposta allo scalino del sistema presenti il seguente andamento:



Si determini il parametro *C*.

1.3 Ponendo sempre *L*=1 e utilizzando il valore di C determinato al punto precedente, si determini il valore del paramentro *R* in modo tale che i poli del sistema abbiano smorzamento $\xi = 0.5$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}.$$

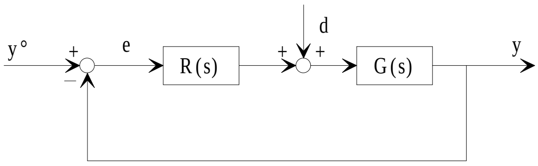
2.1 Si determini l'espressione analitica della risposta all'ingresso $u(t)$ = sca(t).

2.2 Si determinino i valori iniziale e finale della risposta all'ingresso $u(t) = e^{-t}$.

2.3 Si determini l'espressione analitica, a transitorio esaurito, della risposta all'ingresso $u(t) = \cos(t)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{1+s} e^{-s}$, mentre $R(s)$ è la funzione di trasferimento di un regolatore PI.

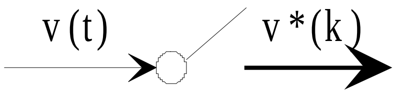
3.1 Si determinino i parametri del regolatore PI in modo tale che il margine di fase sia maggiore o uguale a 60° e la pulsazione critica ω_c sia la massima possibile.

3.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si determini l'errore a transitorio esaurito quando:

$$y°(t) = \text{ram}(t),\ d(t) = \text{sca}(t).$$

Esercizio 4

Si consideri un campionatore ideale, con periodo di campionamento T:



4.1 Si enunci il teorema di Shannon (o del campionamento).

4.2 Sia ora:

$$v(t) = \sin(4t) + \sin(10t) + \sin(t).$$

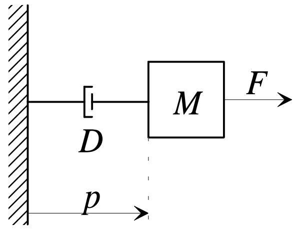
Si determini il massimo valore di T per il campionamento corretto del segnale.

4.3 Si supponga ora che il segnale v del punto precedente sia affetto da rumore di alta frequanza, a pulsazioni superiori a 1000 rad/s. Si progetti la funzione di trasferimento di un filtro antialiasing che consenta di campionare il segnale mantenendone il contenuto informativo utile.

15 Settembre 2000

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema meccanico:



in cui $M = 2$, $D = 1$.

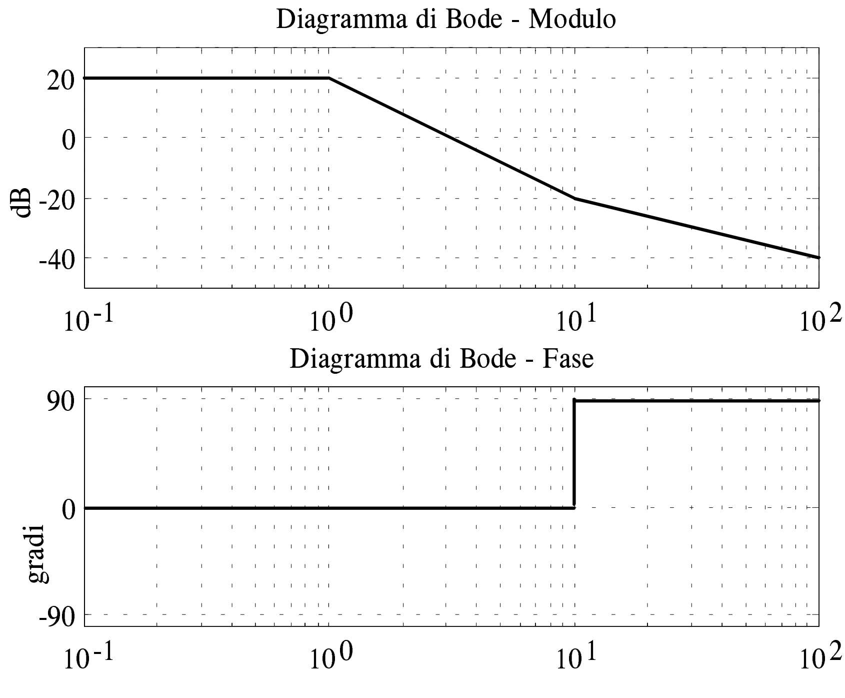
1.1 Si determini la funzione di trasferimento dalla forza F alla posizione p.

1.2 Si determini l'espressione analitica della risposta di p ad un impulso unitario in F.

1.3 Si tracci l'andamento qualitativo della risposta ricavata al punto precedente, dandone brevemente l'interpretazione fisica.

Esercizio 2

Un sistema dinamico, privo di poli o zeri complessi, presenta i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase riportati di seguito:



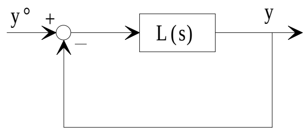
2.1 Si determini l'espressione $G(s)$ della funzione di trasferimento del sistema.

2.2 Si discuta la stabilità del sistema.

2.3 Detti u e y ingresso e uscita del sistema, e posto $u(t) = y(t)$, si determinino lo smorzamento e la pulsazione naturale dei poli del sistema in anello chiuso.

Esercizio 3

Con riferimento ad un generico sistema di controllo:



3.1 Si spieghi perché, se le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte, la pulsazione critica ω_c è un buon indice della velocità di risposta del sistema in anello chiuso.

3.2 Detta $F(s)$ la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso, si dimostri che $|F(j\omega_c)|$ dipende solo dal margine di fase, ricavandone l'espressione.

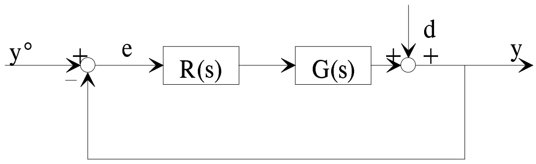
3.3 Posto quindi:

$$L(s) = 10\frac{1+s}{s^2},$$

si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo:

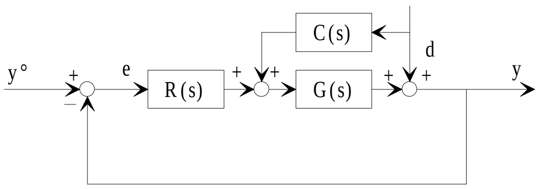


dove $G(s) = \dfrac{1}{1+0.02s}$, mentre $R(s) = \dfrac{\mu}{s}$.

4.1 Si determini il parametro μ in modo che un disturbo $d(t) = \sin(t)$ sia attenuato sull'uscita y di un fattore 10.

4.2 Con il valore di μ determinato al punto precedente, si tracci il diagramma polare qualitativo della funzione di trasferimento d'anello, avendo cura di segnare sul diagramma il punto corrispondente alla pulsazione critica.

4.3 Si consideri ora lo schema di controllo comprensivo di compensatore del disturbo:

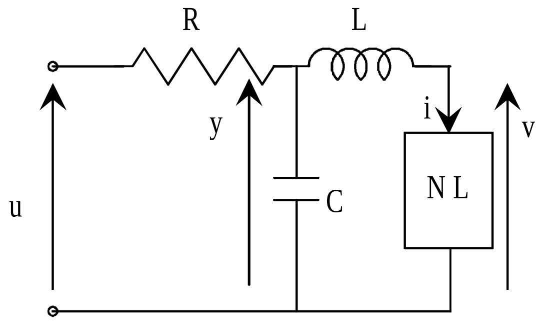


Si scriva la relazione che deve essere soddisfatta dalla funzione di trasferimento C affinché il disturbo $d(t) = \sin(t)$ abbia effetto nullo a regime su y.

23 Gennaio 2001

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema elettrico:



in cui R=1, L=1, C=1 e l'elemento non lineare NL stabilisce tra la corrente i che l'attraversa e la tensione v ai suoi capi la relazione $v=i^3$.

1.1 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico corrispondente.

1.2 Si determini il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u = \bar{u} = 0$.

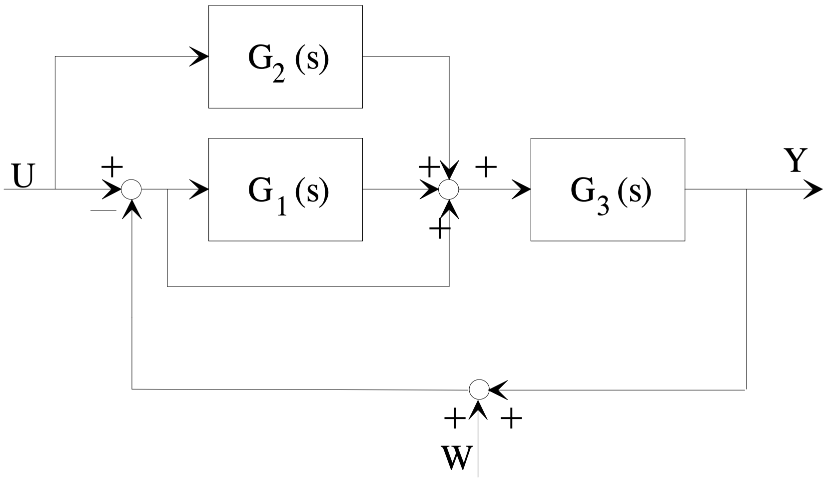
1.3 Si determini la funzione di trasferimento del sistema linearizzato intorno a tale punto di equilibrio.

1.4 Per la funzione di trasferimento trovata al punto precedente, si determinino guadagno, tipo, pulsazione naturale e smorzamento dei poli.

Esercizio 2

2.1 Per ciascuna delle connessioni elementari negli schemi a blocchi (serie, parallelo e retroazione) si discuta la relazione esistente tra la stabilità dei sottosistemi e la stabilità del sistema complessivo.

2.2 Si consideri ora il seguente schema a blocchi:

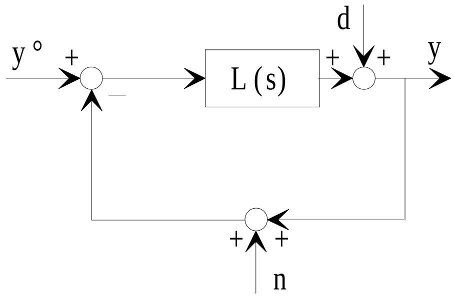


Si determini il legame, in termini di funzione di trasferimento, dagli ingressi u e w all'uscita y.

2.3 Si dica se è necessario e/o sufficiente che uno o più dei tre blocchi (G_1, G_2, G_3) sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

Esercizio 3

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui: $L(s) = \frac{10}{s^2} \frac{1+s}{1+0.01s}$

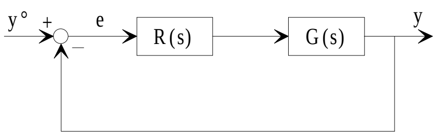
3.1 Si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$, in assenza dei disturbi d e n.

3.2 Si determini il fattore di attenuazione sull'uscita y di un disturbo $d(t) = \sin(0.1t)$.

3.3 Si determini il fattore di attenuazione sull'uscita y di un disturbo $n(t) = \sin(300t)$.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $G(s) = \frac{10}{1+s} e^{-s}$.

4.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento costante di valore arbitrario, l'errore e a regime sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.

Si cerchi inoltre di massimizzare la pulsazione critica.

4.2 Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento per la corretta realizzazione digitale del controllore progettato al punto precedente.

6 Febbraio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 = x_3^3 - 1 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

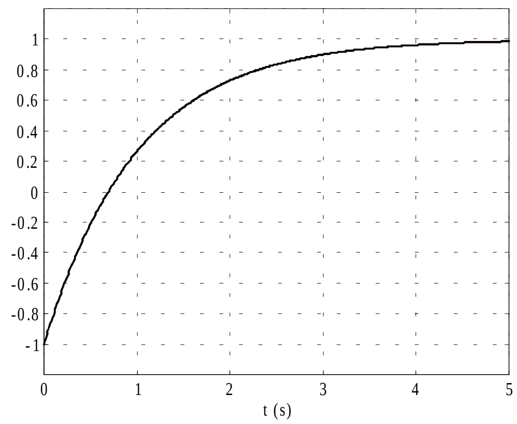
1.1 Si determini un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equlibrio determinato al punto precedente.

1.3 Si discuta la stabilità del sistema linearizzato.

Esercizio 2

Un sistema dinamico presenta la risposta allo scalino unitario riportata di seguito:



2.1 Si determini l'espressione $G(s)$ della funzione di trasferimento del sistema.

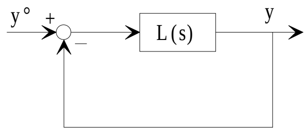
2.2 Si traccino i diagrammi asintotici del modulo e della fase per il sistema di funzione di trasferimento $G(s)$.

2.3 Sempre per il sistema di funzione di trasferimento $G(s)$, si determini, nel modo più rapido possibile, l'espressione, a transitorio esaurito, della risposta al seguente ingresso:

$$u(t) = \sin(t) + 1 - e^{-t} .$$

Esercizio 3

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$L(s) = 10\frac{1+10s}{(1+s)^3},$$

3.1 Si discuta l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso con il criterio di Bode.

3.2 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y ad uno scalino in $y°$.

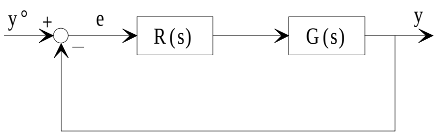
3.3 Si tracci il diagramma polare qualitativo associato a L, avendo cura di segnare sul diagramma il punto corrispondente alla pulsazione critica.

Esercizio 4

4.1 Si dia la definizione di sistema "a fase non minima".

4.2 Si spieghi quali problemi danno questo tipo di sistemi nel controllo in anello chiuso.

4.3 Si consideri ora il seguente sistema di controllo:



dove $G(s) = 10\frac{1-s}{(1+s)^2}$.

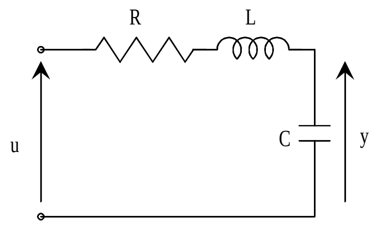
Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento costante di valore arbitrario, l'errore e a regime sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 40°.
- La pulsazione critica sia massimizzata (approssimativamente).

21 Febbraio 2001

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema elettrico:



1.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento dalla tensione *u* alla tensione *y*.

1.2 Posto *R*=0, *L*=2, *C*=2, si tracci l'andamento della risposta di *y* allo scalino unitario in *u*.

1.3 Si determini il valore di *R* in modo tale che il tempo di assestamento della risposta allo scalino sia pari approssimativamente a 20 secondi.

Esercizio 2

2.1 Si dia la definizione di risposta in frequenza di un sistema dinamico, specificando l'insieme dei sistemi cui la definizione si applica.

2.2 Si proponga un esempio di sistema dinamico per cui la fase della risposta in frequenza sia costante per tutte le pulsazioni, mentre il modulo non lo sia, e se ne tracci il diagramma polare.

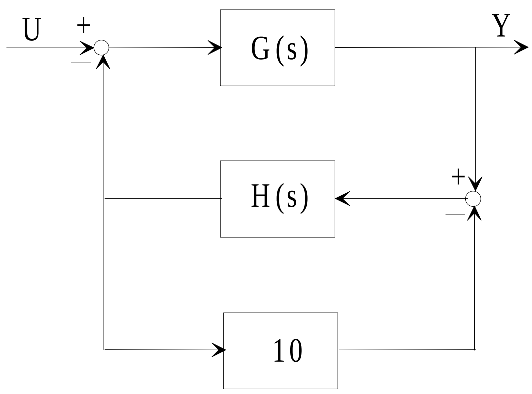
2.3 Si consideri ora il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\frac{1+0.1s}{\left(s^2-1\right)(1-0.1s)}.$$

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a *G*

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



in cui:

$$G(s)=\frac{100}{(1+s)^2}, \quad H(s)=\frac{1}{s}.$$

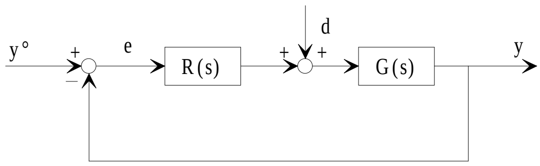
3.1 Si determini la funzione di trasferimento da *u* a *y*.

3.2 Si dimostri, *senza calcolarne numericamente i poli*, che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.3 Si determini il valore iniziale ed il valore finale della risposta di *y* all'impulso unitario in *u*.

Esercizio 4

4.1 Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $G(s)=\frac{10}{s(1+10s)(1+s)}$.

Si determini la funzione di trasferimento *R*(*s*) del regolatore in modo tale che:

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica sia maggiore o uguale a 0.1 rad/s.
- Il regolatore abbia ordine (numero di poli) pari a 1.

4.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si determini l'errore *e* a transitorio esaurito quando *y*°(*t*) = 2 sca(*t*), *d*(*t*) = 3 sca(*t*).

4.3 Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento per la realizzazione digitale del controllore.