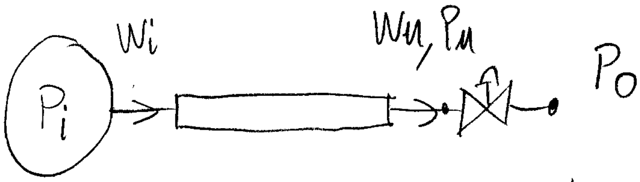
PROPAGAZIONE ONDE - ES

- DINAMICA DI UNA CONDOTTA CON VALVOLA

- consideriamo un sistema composto da una sorgente a pressione costante, da una condotta e da una valvola terminale



- La condotta è elastica e adiabatica. Trascuriamo l'attrito distribuito
- Analizziamo la dinamica nell'intorno di un punto di lavoro assegnato:

$$\overline{W}_i = \overline{W}_u = \overline{W} \qquad \text{(eq massa)}$$

$$\overline{P}_u = \overline{P}_i + \rho g (z_i - z_u) \qquad \text{(eq q.d.m.)}$$

- Equazioni linearizzate

$$\begin{cases} \Delta P_i = 0 & \text{(sorgente)} \\ \Delta W_u = \Delta W_i \, Ch(s\tau) - \frac{1}{Z} \Delta P_i \, Sh(s\tau) & \\ \Delta P_u = \Delta P_i \, Ch(s\tau) - Z \, \Delta W_i \, Sh(s\tau) & \text{(condotta)} \\ \Delta W_u = \frac{\Delta P_u}{R_v} + \mu_v \Delta A_v & \text{(valvola)} \end{cases}$$

$$\Delta P_u = -Z\,\Delta w_i\, Sh(s\tau)$$

$$\Delta w_u = \Delta w_i\, Ch(s\tau)$$

$$\Delta w_i\, Ch(s\tau) = -\frac{Z}{R_V}\Delta w_i\, Sh(s\tau) + \mu_V \Delta A_V$$

$$\Delta w_i = \frac{\mu_V}{Ch(s\tau) + \frac{Z}{R_V} Sh(s\tau)} \Delta A_V$$

$$\boxed{\Delta w_u = \frac{\mu_V}{1 + \frac{Z}{R_V} Th(s\tau)} \Delta A_V \qquad \Delta P_u = -Z\mu_V \frac{Th(s\tau)}{1 + \frac{Z}{R_V} Th(s\tau)}}$$

- Posto $\beta = \frac{Z}{R_V}$, mettiamo in evidenza i termini esponenziali

$$G_W(s) = \frac{\Delta w_u}{\Delta A_V} = \frac{\mu_V}{1+\beta\frac{e^{+s\tau}-e^{-s\tau}}{e^{+s\tau}+e^{-s\tau}}} = \mu_V \frac{1+e^{-2s\tau}}{(1+\beta)+(1-\beta)e^{-2s\tau}} =$$

$$= \frac{\mu_V}{1+\beta}\,\frac{1+e^{-2s\tau}}{1+\alpha e^{-2s\tau}}, \quad \text{con } \alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{R_V - Z}{R_V + Z}$$

$$G_P(s) = \frac{\Delta P_u}{\Delta A_V} = -Z\mu_V \frac{\frac{e^{+s\tau}-e^{-s\tau}}{e^{+s\tau}+e^{-s\tau}}}{1+\beta\frac{e^{+s\tau}-e^{-s\tau}}{e^{+s\tau}+e^{+s\tau}}} = -Z\mu_V \frac{1-e^{-2s\tau}}{(1+\beta)+(1-\beta)e^{-2s\tau}} =$$

$$= -\frac{Z\mu_V}{1+\beta}\,\frac{1-e^{-2s\tau}}{1+\alpha e^{-2s\tau}}$$

PROPAGAZIONE ONDE - ES

- Dinamica nel dominio del tempo

$$\Delta W_u(s) = G_w(s) \cdot \Delta A_v(s)$$

$$\Delta W_u(s)\left(1+\alpha e^{-2s\tau}\right) = \frac{\mu_v}{1+\beta}\left(1+e^{-2s\tau}\right)\Delta A_u$$

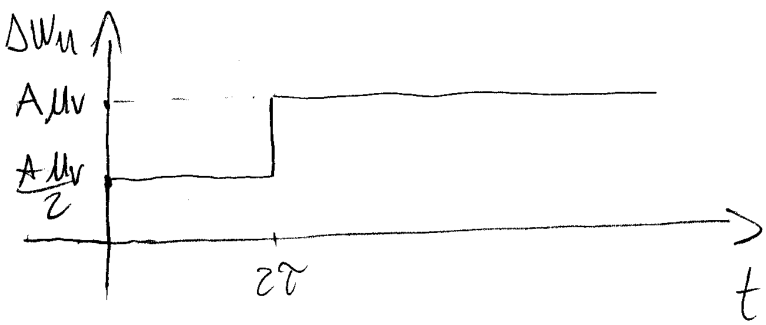
Antitrasformando e risolvendo rispetto a $\Delta W_u(t)$ si trova

$$\Delta W_u(t) = -\alpha \Delta W_u(t-2\tau) + \frac{\mu_v}{1+\beta}\left[\Delta A_u(t) + \Delta A_u(t-2\tau)\right]$$

- Risposta a scalino

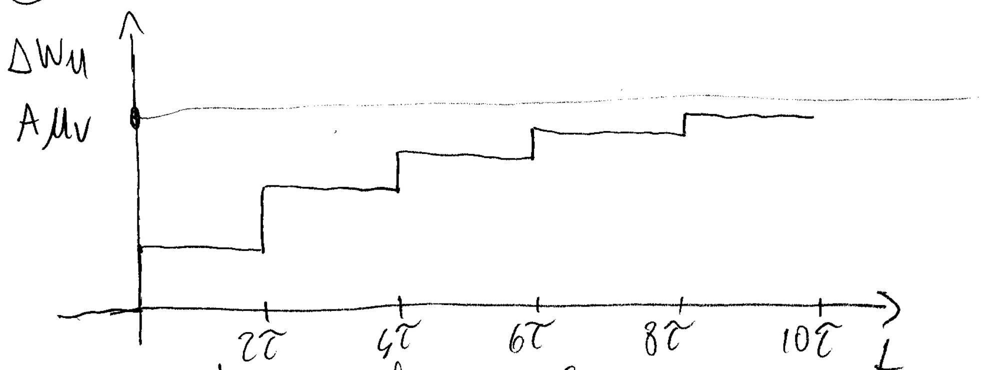
$$\Delta A_v = A \, sca(t)$$

a) $R_v = Z \qquad \beta = 1 \qquad \alpha = 0$ impedenza adattata



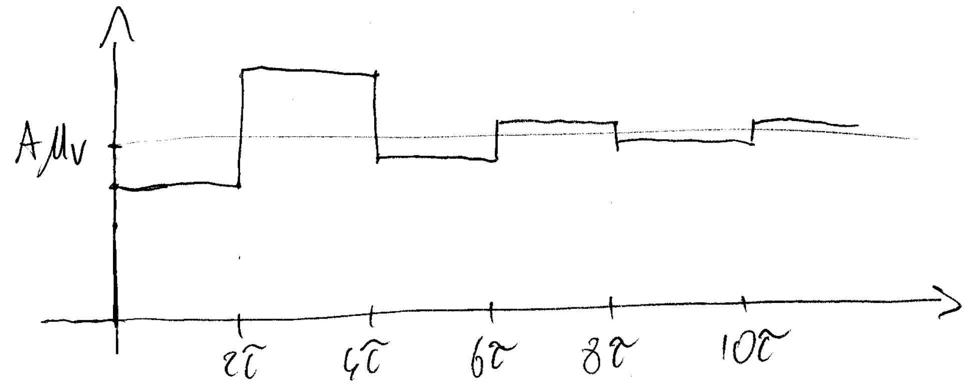
Interpretazione fisica: all'apertura dell'ugello, parte un'onda regressiva verso la sorgente. Dopo τ secondi l'onda si riflette sulla sorgente e torna verso l'ugello. Al tempo $t = 2\tau$ l'onda arriva all'ugello; poiché la resistenza dell'ugello è uguale all'impedenza caratteristica Z, l'onda "non si accorge di nulla" e non viene riflessa. Il transitorio termina dopo 2τ secondi

(b) $R_V < Z$ $\beta > 1$ $\alpha < 0$ (valvola + aperta)



Interpretazione fisica: le onde di pressione e portata si riflettono avanti e indietro, tendendo ad una situazione di regime

(c) $R_V > Z$ $\beta < 1$ $\alpha > 0$ (valvola + chiusa)



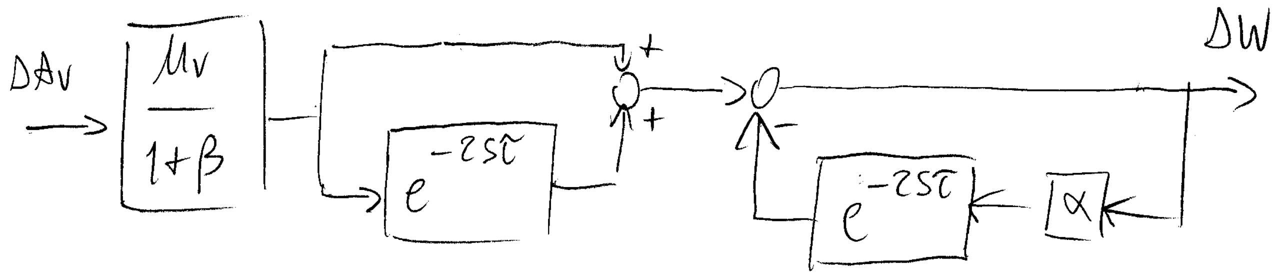
Interpretazione fisica: come sopra, però le oscillazioni sono più marcate

- Analogamente si procede per quanto riguarda ΔP_u

- SIMULAZIONE CON LINGUAGGI BLOCK-ORIENTED

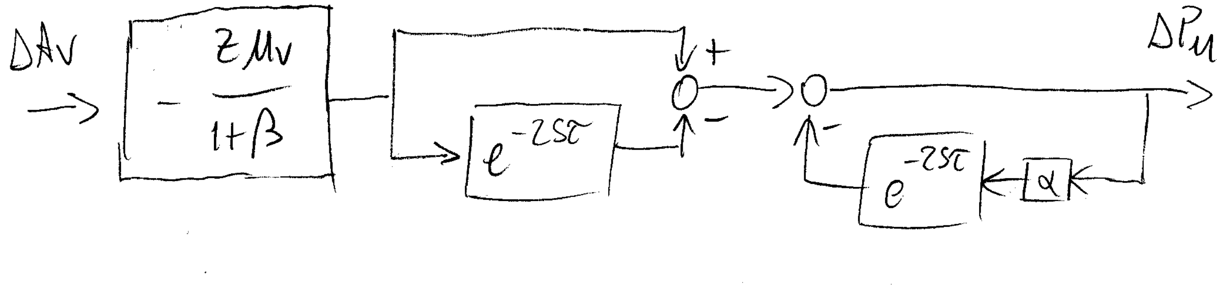
$$G_W(s) = \frac{\mu_V}{1+\beta} \frac{1+e^{-2s\tau}}{1+\alpha e^{-2s\tau}}$$

si può rappresentare come uno schema a blocchi retroazionato
Il ritardo puro si rappresenta con il blocco Time Delay



- Analogamente si procede per $G_P(s)$

$$G_P(s) = -\frac{Z\mu_V}{1+\beta} \frac{1-e^{-2s\tau}}{1+\alpha e^{-2s\tau}}$$



- Colpo d'ariete

Se la valvola viene chiusa rapidamente, la pressione P_u a monte della valvola aumenta, il che può essere pericoloso dal punto di vista meccanico. Stimiamo il valore iniziale della pressione P_u in corrispondenza a variazioni a scalino di A_V

$$\Delta A_V = \Delta A_V \, sca(t)$$

$$\lim_{t \to 0} \Delta P_u(t) = \lim_{s \to +\infty} s \frac{\Delta A_V}{s} G_P(s) = \Delta A_V \lim_{s \to +\infty} -Z \mu_V \frac{Th(s\tau)}{1 + \frac{Z}{R_V} Th(s\tau)} =$$

$$= \Delta A_V \frac{-Z \mu_V}{1 + \frac{Z}{R_V}} = -\Delta A_V \mu_V \cdot Z // R_V$$

$$\text{Se } R_V > Z \Rightarrow Z // R_V \simeq Z = \frac{c}{A} \quad ; \quad \mu_V = \frac{\bar{W}}{\bar{A}_V}$$

$$\Delta P(0) \simeq \frac{\bar{W}}{\bar{A}_V} \Delta A_V \frac{c}{A} = \rho \bar{u} c \frac{\Delta A_V}{\bar{A}_V}$$

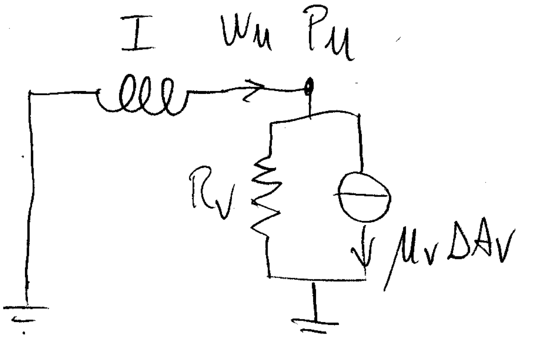
Se $c = 1000 \frac{m}{s}$, $u = 2 m/s$, $\rho = 1000 \, kg/m^3$

$$\Delta P(0) = 2 MPa \cdot \frac{\Delta A_V}{\bar{A}_V}$$

- Attrito distribuito

La soluzione appena discussa è ricavata nel caso ideale $C_f = 0$. Il comportamento reale è simile, purchè $R \ll R_V$, dove R è la resistenza idraulica distribuita totale della condotta

- CONFRONTO COL MODELLO A FLUIDO INCOMPRIMIBILE
- L'equivalente elettrico corrispondente al circuito con fluido incomprimibile è il seguente:



$$G'_W(s) = \frac{\Delta W_u}{\Delta A_v} = \frac{\mu_v}{1+sT} \qquad T = \frac{I}{R_v}$$

$$G'_p(s) = \frac{\Delta P_u}{\Delta A_v} = -\mu_v R_v \frac{sT}{1+sT}$$

- Si può verificare che queste f.d.t. sono approssimazioni di bassa frequenza di quelle trovate per fluido comprimibile

$$G_W(s) = \frac{\mu_v}{1+\frac{Z}{R_v}Th(s\tau)} \simeq \quad \boxed{Th(s\tau) \simeq s\tau, \ |s| \ll \frac{1}{\tau}}$$

$$\simeq \frac{\mu_v}{1+\frac{Z}{R_v}\frac{L}{C}s} = \frac{\mu_v}{1+sT} = G'_W(s)$$

infatti $\frac{Z}{R_v}\frac{L}{C} = \frac{\cancel{\gamma}}{A}\cdot\frac{1}{R_v}\cdot\frac{L}{\cancel{\gamma}} = \frac{I}{R_v} = T$

$$G_p(s) = -Z\mu_v \frac{Th(s\tau)}{1+\frac{Z}{R_v}Th(s\tau)} \simeq -Z\mu_v \frac{s\tau}{1+\frac{Z}{R_v}s\tau}$$

$$= -\mu_v R_v \frac{sT}{1+sT}$$

PROPAGAZIONE ONDE - ES

- In termini di risposta in frequenza, l'approssimazione è valida per $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $\quad \tau = \frac{L}{c}$ tempo attraversam. onde

- Per tubazioni di lunghezza inferiore ai 100m, il limite di validità del modello comprimibile è attorno ai 10 rad/s, quindi più che adeguato per la sintesi di sistemi di controllo con banda "da processo"

- Per tubazioni di lunghezza attorno al Km o oltre, l'approssimazione potrebbe essere insufficiente