



Equazioni di conservazione per la modellistica di processi a fluido

Note a cura di Claudio Maffezzoni

Milano, Maggio 1999

INTRODUZIONE

Diverse classi di processi industriali impiegano, come supporto materiale delle trasformazioni necessarie a conseguire il loro scopo produttivo, uno o più fluidi che possono trovarsi nello stato liquido, gassoso o di miscela bifase. Tipici esempi sono i processi energetici, le reti di trasporto di liquidi o gas, i processi chimici e quelli petrolchimici.

Nel seguito ci si limiterà a considerare il caso di un fluido ad una sola componente, cioè costituito da un'unica sostanza, eventualmente nelle sue diverse fasi, escludendo così i processi chimici e petrolchimici. Con tale limitazione, le leggi fisiche che dovranno essere invocate per descrivere il comportamento del fluido sono le classiche equazioni della termo-idraulica, integrate da opportune relazioni di natura empirica il cui scopo è quello di tradurre in termini macroscopici le complesse interazioni tra il fluido e le superfici materiali che lo confinano (in particolari correlazioni di attrito e di scambio termico).

Per costruire modelli dinamici di un processo a fluido sarà spesso necessario descrivere il comportamento termico e/o meccanico dei corpi, tipicamente metallici, che servono per contenere il fluido, in quanto la loro capacità di accumulare energia di tipo termico (energia interna) e/o meccanico ha non di rado un effetto assai rilevante sulla dinamica del processo.

Come primo passo sarà comunque necessario formulare, per le situazioni di maggior interesse per i processi industriali, le equazioni fondamentali della termo-idraulica che, come è noto, solo le equazioni di conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto.

CAPITOLO PRIMO

EQUAZIONI DELLA TERMOIDRAULICA

1.1 GENERALITÀ

Dato un elemento infinitesimo di fluido omogeneo (fluido ad un componente ed a una fase), le condizioni (locali) del fluido sono individuate dal suo stato termodinamico (cioè da due variabili di stato termodinamiche) e dalle sue condizioni di moto (cioè dal vettore velocità al centro dell'elemento). Per calcolare quindi tali condizioni sarà necessario scrivere due equazioni scalari ed una vettoriale, quali sono appunto l'equazione di conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto rispettivamente.

Una formulazione del tutto generale delle tre equazioni suddette porterebbe a considerare elementi di fluido infinitesimi nelle tre coordinate spaziali (x,y,z) e ad ottenere quindi tre equazioni differenziali alle derivate parziali nelle quattro variabili indipendenti (x,y,z,t) , essendo t il tempo. D'altra parte, è ben noto che i bilanci (dinamici) di massa, energia e quantità di moto possono essere applicati ad un volume generico V , ottenendo nel caso in cui V sia finito una formulazione integrale delle suddette equazioni: matematicamente ciò porta a scrivere tre equazioni alle derivate ordinarie nella variabile indipendente tempo. Le due formulazioni indicate, usualmente definite come formulazione a parametri distribuiti (in tre dimensioni) e formulazione a parametri concentrati rispettivamente, sono ovviamente ambedue matematicamente rigorose e godono dello stesso grado di generalità. Dal punto di vista modellistico, appare evidente il vantaggio di operare con equazioni alle derivate ordinarie che, se risolvibili, danno luogo a modelli estremamente semplici. Va però ricordato che la formulazione integrale su volume finito V dà luogo ad equazioni che sono risolvibili solo in quei casi in cui le proprietà del fluido soddisfino a particolari **condizioni di "uniformità" all'interno del volume V** , perché solo in questi casi il numero delle equazioni eguaglia il numero delle incognite ed il modello risulta chiuso. Tali condizioni di uniformità sono a loro volta legate alle specifiche condizioni in cui il fluido si trova ad operare nel sistema fisico preso in considerazione. Nella costruzione di modelli matematici di processi industriali a fluido è quindi fondamentale una preventiva ricognizione sulle specificità delle trasformazioni subite dal fluido nelle varie parti del processo, al fine di individuare quale sia la formulazione più conveniente per descrivere l'evoluzione delle sue proprietà nel tempo e nello spazio.

Val la pena osservare che, tra i due casi estremi sopra considerati, sono altrettanto rilevanti i casi in cui condizioni di "uniformità" siano applicabili ad una sola o due delle coordinate spaziali in gioco, ottenendo quindi equazioni a derivate parziali in una o due variabili spaziali. Queste formulazioni intermedie hanno grande interesse per le

applicazioni pratiche, nelle quali la scelta del modello di minor complessità costituisce sempre una delle questioni essenziali.

Nell'analisi dinamica di processi industriali, vuoi per la particolare struttura del processo, vuoi per le approssimazioni che usualmente sono ritenute ammissibili, le formulazioni di gran lunga più interessanti sono quelle a parametri concentrati e a parametri distribuiti monodimensionali, che corrispondono all'impiego di equazioni alle derivate ordinarie e di equazioni alle derivate parziali in una sola variabile spaziale. Le situazioni pratiche che più esplicitamente corrispondono alle due formulazioni suddette sono ovviamente quella dell'accumulo di fluido in un serbatoio e quella del moto di un fluido in un condotto (o, comunque, in un volume "tubiforme").

Poiché le equazioni in sé si prestano a trattare una vasta molteplicità di componenti di impianto e poiché si adatterà un approccio alla modellistica di processo di tipo modulare, conviene innanzi tutto proporre una classificazione dei componenti fondamentali di processo sulla base della loro "predisposizione" ad essere descritti mediante equazioni in forma concentrata o distribuita.

1.2 CLASSIFICAZIONE DEI COMPONENTI DI PROCESSO

Si introdurrà qui una classificazione dei componenti di processo dettata dalla rilevanza o meno dei due principali fenomeni che influenzano il comportamento dinamico di un processo (elementare) in cui opera un fluido di lavoro. I fenomeni in questione, ben noti nella termo-idraulica classica, sono il **trasporto** e l'**accumulo**.

Illustriamoli brevemente con qualche esempio.

Consideriamo uno scaldacqua domestico costituito da un piccolo serbatoio di accumulo e da un riscaldatore elettrico che cede calore al fluido (acqua) contenuto nel serbatoio. Come illustrato in Fig. 1.1, esso è collegato all'utenza (qui per semplicità supposta singola e costituita da un semplice rubinetto) mediante un tubo di lunghezza opportuna. Per reintegrare l'acqua prelevata dall'utenza, il serbatoio sarà poi collegato all'acquedotto da cui potrà prelevare acqua fredda mediante l'apertura di una valvola controllata in modo da mantenere pressoché costante il livello del fluido nel serbatoio.

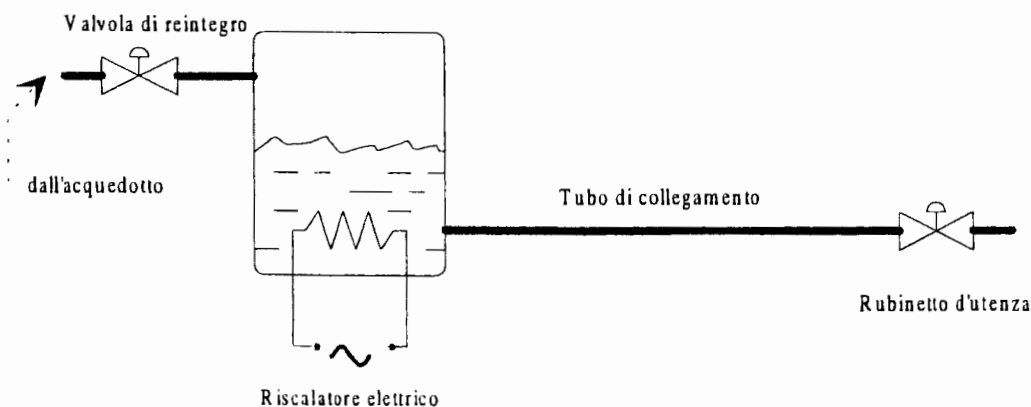


Fig. 1.1 Schema del processo "scaldacqua"

Il funzionamento del processo è elementare: quando viene aperto il rubinetto d'utenza viene prelevata dal serbatoio acqua calda che, fluendo nel tubo di collegamento raggiungerà il punto di efflusso; al ridursi della massa di acqua contenuta occorrerà far aprire la valvola di reintegro fino a ripristinare il contenuto iniziale; facendo ciò si porta a miscelazione acqua fredda con acqua calda contenuta nel serbatoio abbassandone così la temperatura; sarà quindi necessario attivare il riscaldatore elettrico che, trasferendo calore all'acqua, la riporterà nelle condizioni di temperatura desiderate.

Con un'analisi anche molto superficiale si possono immediatamente evidenziare alcuni fenomeni dinamici rilevanti: all'apertura del rubinetto d'utenza la temperatura dell'acqua in uscita non sarà subito quella desiderata se il tubo di collegamento non è perfettamente coibentato. Prima che incominci a fluire acqua calda dal rubinetto occorrerà aspettare un tempo almeno pari a quello impiegato dal fluido a percorrere il tubo di collegamento: siamo di fronte ad un tipico fenomeno di **trasporto**. Si potrebbe sintetizzare la descrizione del fenomeno dicendo, in prima approssimazione, che la temperatura del fluido si trasporta con la velocità che il fluido stesso ha nel condotto.

Se in concomitanza con l'erogazione del fluido all'utenza non si provvede a reintegrare la massa prelevata e, contestualmente, a fornire calore per riscaldarla, il contenuto del serbatoio si depaupera in termini di massa e/o di energia. Volendo poi ripristinare le condizioni originarie occorrerà un certo tempo per consentire il prelievo di una certa massa d'acqua dall'acquedotto e/o di energia dal riscaldatore: siamo in presenza di un tipico fenomeno di **accumulo**, cioè accumulo di massa e/o di energia nel volume occupato dal fluido contenuto nel serbatoio.

Val la pena sottolineare alcuni aspetti fondamentali.

Nel tubo di collegamento non si può avere un accumulo significativo di massa nelle condizioni operative normali (il tubo è completamente riempito dal fluido) in quanto il fluido occupa un volume fisso ed, essendo un liquido, ha una densità pressoché costante. Si può invece avere in esso un accumulo più o meno grande di energia interna in quanto questa varierà con la temperatura del fluido stesso. L'accumulo non è però in questo caso "uniforme" in quanto, in un certo istante, la temperatura potrà essere significativamente diversa da punto a punto; potrà per esempio avere lungo l'ascissa x del tubo un andamento del tipo riportato in Fig. 1.2, dove si è previsto che nella parte terminale il fluido sia ancora freddo mentre nella parte iniziale sia già caldo.

Questa possibile dipendenza della temperatura non solo dal tempo ma anche dallo spazio è strettamente legata alla costituzione fisica del componente considerato, il tubo, ed alle sue modalità di funzionamento. La non banale distribuzione spaziale della temperatura corrisponde alla presenza di un fenomeno di trasporto che, dal punto di vista dinamico, si evidenzia con il fatto che **occorre un tempo finito prima che le proprietà del fluido in uscita comincino a variare**.



T = Temperatura del fluido

Fig. 1.2 Andamento della temperatura lungo il tubo

Nel serbatoio, pur limitandosi a considerare il solo accumulo di energia (supponendo, per esempio, che mediante una "gestione" tempestiva della valvola di reintegro la massa di fluido sia mantenuta costante), possiamo senz'altro accettare l'approssimazione che, data la configurazione compatta del serbatoio che favorisce la miscelazione del fluido entrante, la temperatura sia pressoché uniforme in tutta la massa liquida pur potendo variare da istante ad istante. Non vi è quindi alcuna ragione evidente di considerare una dipendenza significativa della temperatura del fluido dalle coordinate spaziali: si è in presenza di un accumulo pressoché uniforme in tutta la massa, rappresentabile mediante un accumulo "concentrato" piuttosto che "distribuito". Si può anche osservare che, per esempio, a fronte di una variazione della potenza rilasciata dal riscaldatore elettrico, la temperatura richiederà un certo tempo, anche grande, per portarsi in un nuovo regime, ma **comincerà a variare fin da subito**. La variazione graduale delle proprietà è appunto tipica dei fenomeni di accumulo; la maggiore o minore lentezza con cui tale variazione si realizza dipenderà poi dalla maggiore o minore "capacità" di accumulo del sistema considerato.

Nell'impianto di Fig. 1.1 sono presenti anche altri componenti significativi quali il rubinetto e la valvola di reintegro. In essi, a causa del loro piccolo volume, non possono avere sede significativi accumuli né di massa né di energia: sono elementi essenzialmente incapaci di accumulare sia in forma concentrata che distribuita. Per essi sarà assolutamente inessenziale considerare una qualsiasi dipendenza dal tempo del loro "stato" e saranno quindi tipicamente rappresentati mediante equazioni algebriche o, al più, mediante equazioni differenziali nelle sole coordinate spaziali. In termini dinamici essi appariranno come sottosistemi privi di dinamica, che stabiliscono cioè relazioni "istantanee" tra le variabili che definiscono le loro condizioni al contorno (o di connessione al resto del processo).

Si comprende quindi l'interesse concettuale di una classificazione dei componenti di processo che ne evidenzia le fondamentali caratteristiche ai fini della modellizzazione dinamica.

Precisamente si possono distinguere:

- a) **Elementi lunghi** (in termini spazio-temporali), cioè elementi in cui sono significativamente presenti **fenomeni di trasporto**.
- b) **Elementi corti** con capacità di accumulo, cioè elementi in cui sono significativamente presenti **fenomeni di accumulo** (e non di trasporto).
- c) **Elementi privi di accumulo**, cioè elementi che, per la piccola massa di fluido contenuta all'interno della loro superficie di confine, non presentano significative capacità di accumulo né, quindi, fenomeni di trasporto.

Nel caso a) il modello del componente sarà costituito anche da equazioni alle derivate parziali, nel tempo e in una variabile spaziale (quella relativa alla "lunghezza"); sarà, cioè, un modello a parametri distribuiti, almeno nella misura in cui la dinamica associata ai fenomeni di trasporto in esso presenti sia ritenuta rilevante ai fini dell'analisi per cui viene costruito il modello.

Nel caso b) il modello del componente sarà costituito solo da equazioni alle derivate ordinarie ed, eventualmente, da equazioni algebriche; si tratterà cioè di un modello a parametri concentrati.

Nel caso c), il modello del componente sarà privo di dinamica: ciò implica l'assenza delle derivate rispetto al tempo nelle equazioni del modello; esso sarà quindi un modello costituito solo da equazioni algebriche ed, eventualmente, da equazioni differenziali nelle derivate spaziali (ma non nel tempo). L'ultima situazione si verifica quando, pur essendo trascurabile la capacità di accumulo del fluido coinvolto, risulta non banale la distribuzione spaziale delle proprietà del fluido stesso. In ogni caso, il modello risultante sarà privo di dinamica.

A titolo di esempio, come tipico della categoria a) si può citare il componente "tubo", cioè il volume di fluido contenuto nella tubazione. Così, per la categoria b), si può citare il serbatoio, mentre per la categoria c) si può citare la valvola di regolazione, di cui vedremo sia una formulazione alle derivate ordinarie nello spazio sia una formulazione in termini di equazioni algebriche, ottenute integrando le suddette equazioni differenziali.

In accordo a quanto detto, dovremo considerare equazioni della termoidraulica in almeno due diverse forme: equazioni a parametri distribuiti monodimensionali (per gli elementi lunghi) ed equazioni a parametri concentrati. Potrà poi essere introdotta, nei due casi, l'eventuale semplificazione di trascurare la derivata rispetto al tempo.

1.3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI MONODIMENSIONALI: FLUIDO MONOFASE

1.3.1 Generalità

Consideriamo il caso di un fluido comprimibile monofase in moto all'interno di un volume tubiforme con superficie di confine rigida o deformabile (Fig. 1.3).

Il volume tubiforme lo supporremo definito nel seguente modo:

- è data una linea s cui è assegnata l'ascissa curvilinea x ;
- per ogni valore di x è assegnata, sul piano normale alla linea s in quel punto, la sezione $A(x)$, di cui il punto sulla linea s costituisce il baricentro;
- il volume tubiforme V è ottenuto per involuppo delle sezioni $A(x)$, per $0 \leq x \leq L$.

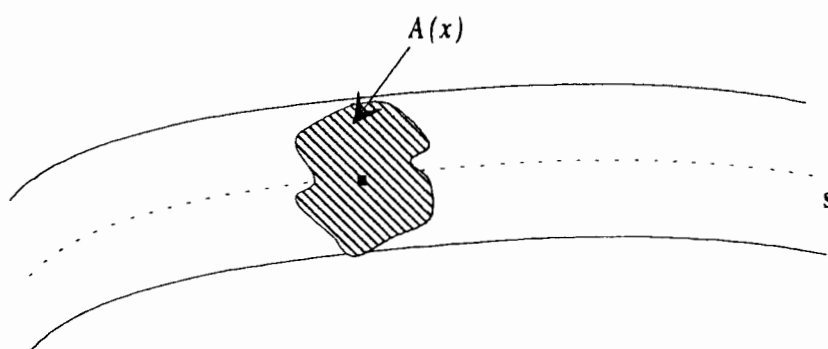


Fig. 1.3 Volume Tubiforme

Per dare una base fisica all'ipotesi di "moto monodimensionale" occorre sia formulare alcune ipotesi sulla geometria del volume V sia garantirsi che lungo il volume V si instauri un regime di moto regolare senza interruzioni o transizioni. In particolare, dato il suo prevalente interesse nei processi industriali, ci si riferirà al regime di moto turbolento che, come è ben noto, si instaura in un "condotto" del tipo di Fig. 1.3 per valori sufficientemente elevati del numero di Reynolds Re .

A tale scopo si formuleranno le seguenti ipotesi:

- I1. Nel volume V una dimensione, quella lungo la linea s dei baricentri è nettamente prevalente rispetto alle altre due, cioè alle dimensioni lineari della sezione $A(x)$, $\forall x$ (ipotesi di "**Tubo Sottile**").
- I2. Il volume V è sufficientemente regolare ¹, cioè presenta variazioni della sezione $A(x)$ sufficientemente graduali a raggi di curvatura della linea s sufficientemente grandi rispetto alle dimensioni lineari di $A(x)$.
- I3. Il numero di Reynolds è, in ogni punto del condotto, tale da assicurare il regime di **moto turbolento**.

L'ipotesi I1 è rivolta ad assicurare che gli effetti ai bordi (cioè all'imbocco e allo sbocco) siano trascurabili, in quanto riguardano una quota piccola dell'intero volume, e che lo stato fisico del fluido sia pressoché lo stesso in tutti i punti della generica sezione

¹ "sufficientemente" va qui inteso come "tale da garantire che il regime di moto non subisca interruzioni" lungo x .

trasversale del condotto. Il numero di Reynolds va sempre riferito alla velocità media del fluido nel condotto e, si ricorda, è definito come $Re=GD/\mu$, dove G è la portata massica che transita attraverso l'unità di area della generica sezione $A(x)$, D è il diametro bagnato, cioè il diametro di una sezione circolare avente area pari ad $A(x)$, μ la viscosità dinamica del fluido.

È opportuno ricordare che nel caso del regime di moto turbolento, all'interno della generica sezione $A(x)$, si possono distinguere due zone (Fig. 1.4): l'una centrale, nettamente prevalente in termini di area, detta nocciolo, in cui la velocità media (mediata rispetto alle fluttuazioni aleatorie molto rapide che caratterizzano il moto turbolento) si può assumere pressoché uniforme; l'altra periferica, detta strato limite, che costituisce "l'interfaccia" tra il nocciolo, in moto, e la superficie laterale di confine del volume V , ferma. Nello strato limite si può assumere, data anche la piccolissima dimensione, che la velocità media vari linearmente tra 0 (la velocità della superficie) e la velocità media del nocciolo.

Nel regime di moto turbolento si possono studiare le proprietà del moto medio che è quanto interessa dal punto di vista macroscopico; tali proprietà possono essere pensate come quelle che si ottengono eseguendo, su un intervallo di tempo molto piccolo, la media temporale delle grandezze istantanee che, nel moto turbolento, fluttuano continuamente in modo aleatorio. Si parlerà allora di velocità media, di temperatura media, di pressione media, di energia interna media, e così via. Ancora le grandezze medie avrebbero un significato locale, cioè risulterebbero associate ad un determinato punto del volume V . Tuttavia, a causa delle fluttuazioni continue (che producono "miscelazione") e della uniformità del campo di moto nella generica sezione $A(x)$, in regime di moto turbolento si può assumere che tutte le proprietà medie siano uniformi nella generica sezione su tutta la superficie del nocciolo, cosicché risulta legittimo introdurre grandezze medie dipendenti solo dall'ascissa spaziale x e dal tempo t , attribuendo convenzionalmente il loro valore al baricentro della generica sezione, ma restando inteso che lo stesso valore si applica in ogni punto del nocciolo appartenente al piano normale alla linea dei baricentri nel punto di ascissa x .

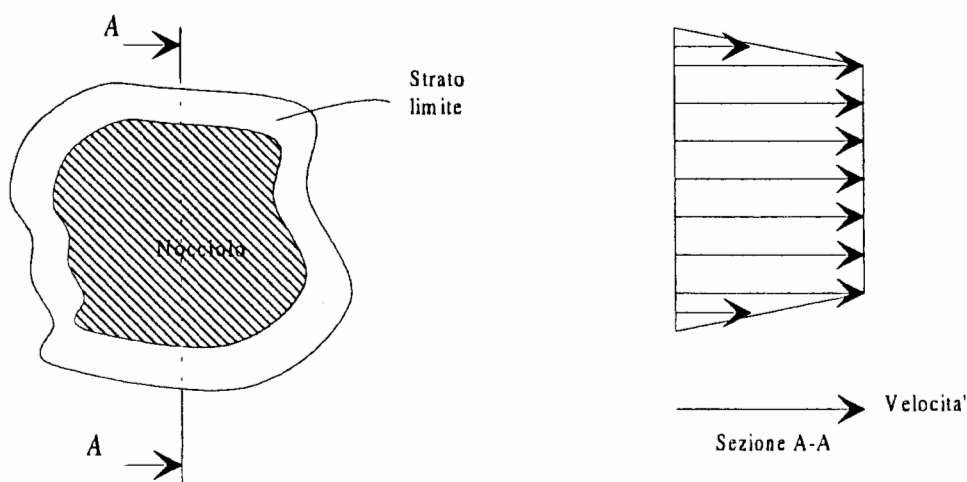


Fig. 1.4 Distribuzione di velocità in regime turbolento

Per quanto riguarda lo strato limite, si può sempre assumere che la sua estensione superficiale sia del tutto trascurabile, in termini massici, rispetto a quella del nocciolo, cosicché si potranno scrivere tutte le equazioni di bilancio ignorando la massa residente nello strato limite. Ne risulta che ci si riferirà allora ad un'unica determinazione delle proprietà intensive sopra menzionate, parlando, per esempio, di velocità $u(x,t)$, come velocità (media) del fluido nell'ascissa x ed al tempo t , facendo coincidere quest'unica determinazione della velocità con quella del baricentro di massa. Lo stesso dicasi per:

$T(x,t)$ = temperatura nell'ascissa x ed al tempo t

$p(x,t)$ = pressione nell'ascissa x ed al tempo t

$e(x,t)$ = energia interna nell'ascissa x ed al tempo t

$h(x,t)$ = entalpia nell'ascissa x ed al tempo t

$S(x,t)$ = entropia nell'ascissa x ed al tempo t

$\rho(x,t)$ = densità nell'ascissa x ed al tempo t .

Inoltre, tenendo conto della possibile deformabilità della sezione, essa si considererà, in generale, come $A(x,t)$, funzione cioè dell'ascissa e del tempo.

Si potrà anche introdurre il concetto di portata massica: $w(x,t) = \rho(x,t) u(x,t) A(x,t)$.

Allo stesso modo si potranno definire tutte le grandezze termodinamiche e di moto, sia estensive sia intensive.

Operando nel campo gravitazionale, al fine di definire le energie potenziali, è anche utile introdurre la quota $z(x)$, rispetto ad un livello opportuno assunto come riferimento (si assume implicitamente che la linea baricentrica del condotto sia fissa nello spazio).

1.3.2 Osservazioni sui regimi di moto

Come è noto [1], il moto di un fluido in un condotto può assumere regimi stazionari di tipo differente a seconda del valore del numero di Reynolds Re . Precisamente, in generale, si può affermare che

se $Re < 2000$

si instaura un regime di moto di tipo laminare o viscoso, caratterizzato da una variazione graduale della velocità dal centro del condotto alla periferia;

se $Re > 4000$

si instaura un regime di moto di tipo turbolento, caratterizzato dalla presenza di un nocciolo, in cui la velocità è pressoché costante e di uno strato limite periferico che "raccorda" la velocità del nocciolo alle condizioni di confine imposte dalla superficie laterale (velocità nulla).

Per valori intermedi ($2000 < Re < 4000$) non si ha stabilità di nessuno dei due regimi di moto, e, quindi, l'instaurarsi dell'uno o dell'altro regime, o il passaggio dall'uno all'altro, sono di fatto imprevedibili.

Si può solo assumere che, se Re , crescendo, passerà da valori inferiori a 2000 a valori superiori a 4000, prima o poi si verificherà la transizione da regime di moto laminare a regime di moto turbolento e viceversa. L'insieme delle condizioni che soddisfano $2000 < Re < 4000$ viene quindi identificato come zona di transizione.

Anche se, per definizione, i regimi di moto vengono definiti ed analizzati facendo riferimento a condizioni stazionarie (cioè con tutte le grandezze fisiche medie, o macroscopiche, costanti nel tempo), nello sviluppare modelli dinamici dei processi a fluido si assume in generale che, almeno al di fuori della zona di transizione, istante per istante il moto del fluido si sviluppi secondo il regime, turbolento o viscoso, corrispondente al numero di Reynolds attuale. Questa assunzione, che non ha reali alternative praticabili, può portare ad alcune (per altro non gravi) contraddizioni in alcuni casi particolari. Se ne citerà uno nel seguito con riferimento al calcolo delle forze di attrito che si determinano tra parete di confine e fluido (considerate nella formulazione del principio di conservazione della quantità di moto).

Oltre a dar significato alla velocità media di trasporto del fluido nel condotto (costante o meno nella sezione), la specificazione del regime di moto è importante proprio per definire il calcolo delle suddette forze di attrito che in regime turbolento tendono (per $Re \rightarrow \infty$) ad assumere valori proporzionali al quadrato della velocità media, mentre in regime viscoso risultano lineari con la velocità (misurata per esempio nel centro del condotto). Nei processi industriali, almeno quando non si operi con fluidi molto viscosi quali gli oli pesanti, i valori delle variabili di processo nel funzionamento normale sono tali da determinare un moto di tipo turbolento. È per tale ragione che, in questa trattazione, ci si riferirà solo a questo regime di moto a meno che non sia esplicitamente detto il contrario. Si noti che, poiché $Re = GD/\mu$, quando la portata di fluido tende ad annullarsi (all'avviamento o alla fermata del processo), il regime di moto non può mantenersi in condizioni turbolente. Si tratta però di condizioni molto particolari e che permangono, generalmente, per piccoli intervalli di tempo, in quanto bastano già velocità basse, almeno con fluidi di lavoro poco viscosi come l'acqua, per ottenere numeri di Reynolds superiori a 4000.

Per esempio, se consideriamo l'acqua alla temperatura di 20 °C e alla pressione atmosferica essa ha i seguenti valori di densità e viscosità:

$$\rho \cong 980,4 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu \cong 0,463 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms} ;$$

per avere quindi moto turbolento basterà avere velocità medie di trasporto superiori a:

$$\bar{u} = \mu/(\rho D)4000 = 0,0019/D .$$

Il diametro dei tubi impiegati in processi industriali è normalmente almeno di 0,01 m. Ne discende un valore limite di velocità pari a circa $\bar{u} = 0,19$ m/s.

Le velocità impiegate, per esempio, negli scambiatori di calore sono usualmente di qualche metro al secondo nelle condizioni di progetto (normalmente coincidente con il carico massimo). Ne discende che si ha moto turbolento fino ad almeno il 10% del carico nominale. Per altri processi le condizioni sono anche più drastiche in quanto si usano diametri maggiori e velocità maggiori di trasporto.

In generale quindi, a meno che non si tratti con fluidi molto viscosi, nei processi industriali si hanno sempre condizioni di moto turbolento, tranne che nelle sopraccitate condizioni estreme (avviamento, fermata). È questa la ragione per cui, in questa trattazione, le problematiche relative al moto laminare saranno essenzialmente ignorate.

1.3.3 Formulazione delle equazioni di conservazione

Per il caso monodimensionale qui considerato si esprimeranno i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia in forma di equazioni alle derivate parziali nella coppia di variabili indipendenti (x,t) . Per far ciò seguiamo un procedimento "euristico" di passaggio al limite, considerando un segmento di lunghezza Δx del volume tubiforme di Fig. 1.3, ottenuto (Fig. 1.5) mediante due sezioni normali $A(x,t)$ e $A(x+\Delta x,t)$, e facendo poi tendere Δx a zero.

Per la generica grandezza fisica considerata (massa, quantità di moto, energia), detta G la porzione di essa contenuta nel segmento tubiforme di Fig. 1.5, il principio di conservazione si scriverà nella forma:

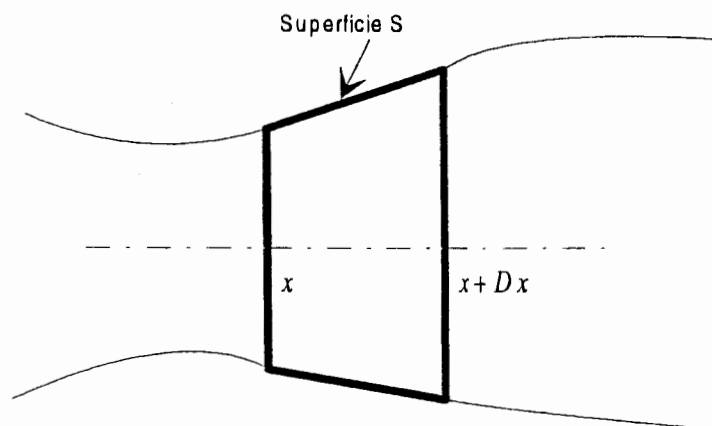


Fig. 1.5 Segmento "infinitesimo"

Il diametro dei tubi impiegati in processi industriali è normalmente almeno di 0,01 m. Ne discende un valore limite di velocità pari a circa $\bar{u} = 0,19$ m/s.

Le velocità impiegate, per esempio, negli scambiatori di calore sono usualmente di qualche metro al secondo nelle condizioni di progetto (normalmente coincidente con il carico massimo). Ne discende che si ha moto turbolento fino ad almeno il 10% del carico nominale. Per altri processi le condizioni sono anche più drastiche in quanto si usano diametri maggiori e velocità maggiori di trasporto.

In generale quindi, a meno che non si tratti con fluidi molto viscosi, nei processi industriali si hanno sempre condizioni di moto turbolento, tranne che nelle sopraccitate condizioni estreme (avviamento, fermata). È questa la ragione per cui, in questa trattazione, le problematiche relative al moto laminare saranno essenzialmente ignorate.

1.3.3 Formulazione delle equazioni di conservazione

Per il caso monodimensionale qui considerato si esprimeranno i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia in forma di equazioni alle derivate parziali nella coppia di variabili indipendenti (x,t) . Per far ciò seguiamo un procedimento "euristico" di passaggio al limite, considerando un segmento di lunghezza Δx del volume tubiforme di Fig. 1.3, ottenuto (Fig. 1.5) mediante due sezioni normali $A(x,t)$ e $A(x+\Delta x,t)$, e facendo poi tendere Δx a zero.

Per la generica grandezza fisica considerata (massa, quantità di moto, energia), detta G la porzione di essa contenuta nel segmento tubiforme di Fig. 1.5, il principio di conservazione si scriverà nella forma:

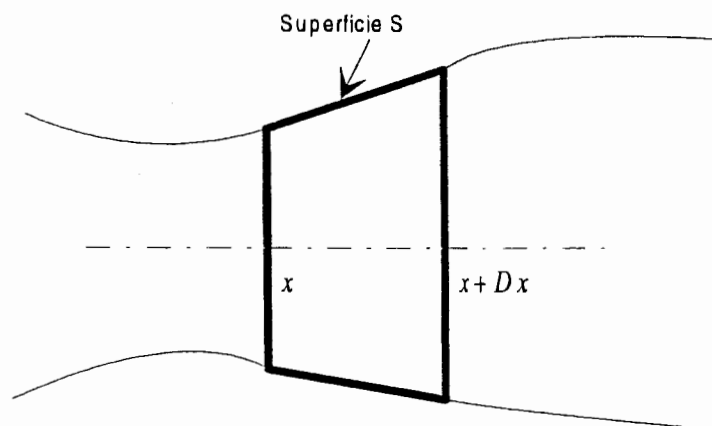


Fig. 1.5 Segmento "infinitesimo"

$$\Phi_A(x,t) - \Phi_A(x+\Delta x,t) + \Phi_S(x,\Delta x,t) + F_V(x,\Delta x,t) = \frac{\partial G(x,\Delta x,t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

dove:

$\Phi_A(x,t)$ indica il flusso (positivo se diretto come l'asse baricentrico s) della quantità G che attraversa la sezione normale del tubo A per il valore x dell'ascissa curvilinea e al tempo t ; $\Phi_S(x,\Delta x,t)$ indica il flusso (positivo se entrante) della quantità G che attraversa la superficie laterale S del condotto che delimita il segmento compreso tra l'ascissa x e l'ascissa $x+\Delta x$, al tempo t ; $F_V(x,\Delta x,t)$ è la somma dei termini "sorgente" relativi al volume V compreso tra x e $x+\Delta x$. Naturalmente (si veda il riferimento [2]) i termini sorgenti sono:

- nulli per la massa;
- le forze che agiscono su V per la quantità di moto;
- le potenze generate nel volume V per l'energia (per esempio reazione chimica esoterma).

Si osservi che, nel passaggio al limite, occorrerà prima dividere per Δx e poi passare al limite per $\Delta x \rightarrow 0$.

L'equazione (1.1) diventerà quindi

$$-\frac{\partial \Phi_A}{\partial x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi_S(x,\Delta x,t)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_V(x,\Delta x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x,\Delta x,t)}{\Delta x} \right] \quad (1.2)$$

Si tratterà quindi di valutare nei tre casi in esame l'espressione dei termini che appaiono nella (1.2).

Nel caso della quantità di moto tutte le grandezze che compaiono nell'equazione (1.2) dovrebbero essere considerate vettoriali; si potrà tuttavia, limitarsi a considerare la proiezione di tutte le grandezze in gioco sulla tangente all'asse baricentrico.

Le equazioni monodimensionali nel caso di moto turbolento sono ricavate sotto le seguenti ipotesi (coerenti con il tipo di moto):

H.1 La pressione è uniforme nella sezione trasversale

H.2 Il vettore velocità è orientato secondo l'asse baricentrico s .

H.3 Le relazioni termodinamiche di equilibrio restano applicabili ai valori medi dell'efflusso su una sezione trasversale; in particolare la temperatura media sarà definita come:

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial S} \right)_{\rho = \text{cost.}}$$

H.4 Gli scambi termici avvengono per convezione tra parete e fluido.

H.5 Le forze di attrito dovute alla viscosità sono localizzate alla parete (a causa del profilo di velocità dell'efflusso turbolento).

H.6 L'unica forza di volume è quella di gravità.

1.3.4 Equazione della massa

Nel caso della massa, la quantità $G(x, \Delta x, t)$ è la massa contenuta nel segmento di Fig. 1.4 che, per $\Delta x \rightarrow 0$, può essere espressa nel seguente modo:

$$G(x, \Delta x, t) = \rho(x, t)A(x, t)\Delta x$$

da cui

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x, \Delta x, t)}{\Delta x} = \rho(x, t)A(x, t).$$

Il termine Φ_A non è altro che la portata massica $w(x, t)$; il flusso Φ_S è palesemente nullo così come nullo è il termine sorgente F_V .

In definitiva l'equazione di conservazione della massa diventa (lasciando implicite le ovvie dipendenze da x e t):

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

con $w = \rho A u$.

1.3.5 Equazione della quantità di moto

Per l'equazione della quantità di moto $G(x, \Delta x, t)$ è la quantità di moto associata alla massa contenuta nel solito segmento di Fig. 1.5 che, per $\Delta x \rightarrow 0$, può essere espressa come:

$$G(x, \Delta x, t) = \rho(x, t)A(x, t)\Delta x u(x, t) \vec{i}$$

dove \vec{i} è il versore dell'asse baricentrico x ; da qui si ottiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x, \Delta x, t)}{\Delta x} = \rho(x, t) A(x, t) u(x, t) \vec{i}$$

Il termine $\Phi_A(x, t)$ è la quantità di moto associata alla portata che attraversa la sezione $A(x, t)$:

$$\Phi_A(x, t) = w(x, t) u(x, t) \vec{i} ;$$

la quantità Φ_S è nulla in quanto non fluisce massa attraverso la superficie laterale S , mentre il termine sorgente F_V rappresenta la risultante delle forze che agiscono sull'elemento di volume considerato.

Poiché, tramite le ipotesi H.1-H.5 introdotte nel par.1.3.3, il problema fluidodinamico è stato ricondotto ad un problema monodimensionale, dell'equazione della quantità di moto sarà sufficiente considerare la proiezione sulla tangente alla linea baricentrica s ; ciò si può ottenere eseguendo il prodotto scalare termine a termine per il versore \vec{i} .

Si ottiene allora (si noti che $\frac{d\vec{i}}{dx}$ è normale al versore \vec{i}):

$$\frac{\partial \rho A u}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{vi}(x, \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

dove F_{vi} è la somma delle proiezioni sull'asse s delle forze agenti sull'elementino; tali forze sono:

- forze di massa, di cui qui si considererà solo la forza peso;
- forze di superficie, cioè quelle forze che l'esterno esercita sul fluido attraverso la superficie di confine.

La proiezione della forza peso si esprime semplicemente come:

$$F_i^p = [\rho(x, t) A(x, t) \Delta x] \vec{g} x \vec{i}$$

MASSA

dove \vec{g} è l'accelerazione di gravità. Dunque, indicando con α l'angolo compreso tra \vec{g} e \vec{i} (Fig. 1.6) si ha:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_i^p}{\Delta x} = \rho A g \cos \alpha = -\rho A g \frac{dz}{dx} \quad (1.5)$$

dove $z(x)$ è la quota del baricentro in corrispondenza del valore x dell'ascissa.

Le forze di superficie si possono distinguere in:

- (a) forze normali, cioè dovute alla pressione del fluido, che si esercitano sia sulle sezioni normali $A(x,t)$ e $A(x+\Delta x,t)$ sia sulla superficie laterale S ;
- (b) forze tangenziali, dovute all'attrito che si concentra nello stato limite, dove la superficie ferma S "impone" al fluido di passare dalla velocità u del nocciolo alla velocità nulla di superficie; tali forze si esplicano solo attraverso la superficie S .

Esprimiamo separatamente tali forze.

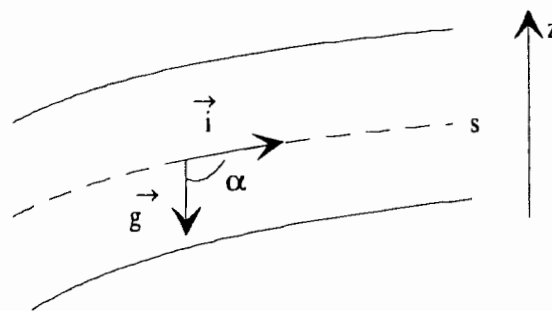


Fig. 1.6 Forze di gravità

Forze di pressione sulle sezioni normali.

La risultante sull'elemento di volume è:

$$F_A^n = p(x,t)A(x,t) \vec{i}(x) - p(x+\Delta x,t)A(x+\Delta x,t) \vec{i}(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_A^n}{\Delta x} = -\frac{\partial p A \vec{i}}{\partial x} = -\frac{\partial p A}{\partial x} \vec{i} + p A \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} ;$$

la proiezione sull'asse baricentrico dà quindi la risultante:

$$\varphi_{Ai}^n = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_A^n}{\Delta x} \right) \cdot \vec{i} = -\frac{\partial p A}{\partial x} \quad (1.6)$$

Forze di pressione sulla superficie laterale S.

Si può dimostrare che la proiezione della risultante di tali forze può essere espressa come:

$$\varphi_{Si}^n = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_s^n}{\Delta x} \right) \cdot \bar{i} = p \frac{\partial A}{\partial x} \quad , \quad (1.7)$$

cioè risulta non nulla solo se, in corrispondenza all'ascissa x , la sezione del condotto sta variando.

Forze di attrito (sulla superficie laterale S)

Le forze di attrito in moto turbolento sono esprimibili in funzione dell'energia cinetica del fluido e, ovviamente, sono proporzionali alla superficie di contatto. Un'espressione che tiene conto di tutto ciò (si veda il riferimento [3]) è la seguente:

$$\varphi_{Si}^\tau = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_s^\tau}{\Delta x} \right) \cdot \bar{i} = -\frac{C_f}{2} \rho \omega |u|u \quad (1.8)$$

dove ω è il perimetro bagnato e C_f è il cosiddetto "fattore di attrito" che nel caso di tubi lisci risulta funzione del numero di Reynolds Re .

Nel caso di tubi rugosi, purché con rugosità regolare e piccola rispetto al diametro del condotto, il fattore di attrito C_f (detto anche di Fanning) risulta dipendente anche dalla rugosità del tubo espressa attraverso il fattore adimensionale $\varepsilon = e/D$, dove e è l'altezza media delle protuberanze della parete. La dipendenza di C_f da Re e da ε è stata determinata per mezzo di esperimenti ed è ben espressa dal classico diagramma di Moody, qui riportato, a scopo di documentazione, in Fig. 1.7; tale diagramma è, di fatto, una rappresentazione grafica dell'equazione di Colebrook (si veda il riferimento [4]):

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = -4 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7} + \frac{1,256}{Re \sqrt{C_f}} \right) \quad (1.9)$$

Si noti che per numeri di Reynolds abbastanza grandi, tanto più grandi quanto meno rugoso è il tubo, il fattore di attrito tende a diventare una costante. Ad esempio per tubi commerciali usati in scambiatori di calore il valore asintotico è dell'ordine di:

$$C_{f\infty} \cong 0,005 \quad ,$$

che corrisponde ad una rugosità ε dell'ordine di 10^{-3} , per la quale il valore asintotico si ha già per un numero di Reynolds dell'ordine di $5 \cdot 10^5$. Va anche notato che per numeri di Reynolds anche notevolmente minori del valore suddetto (per es. $5 \cdot 10^4$) il fattore di attrito risulta di poco più elevato del valore asintotico (nel caso considerato $f \cong 0,006$).

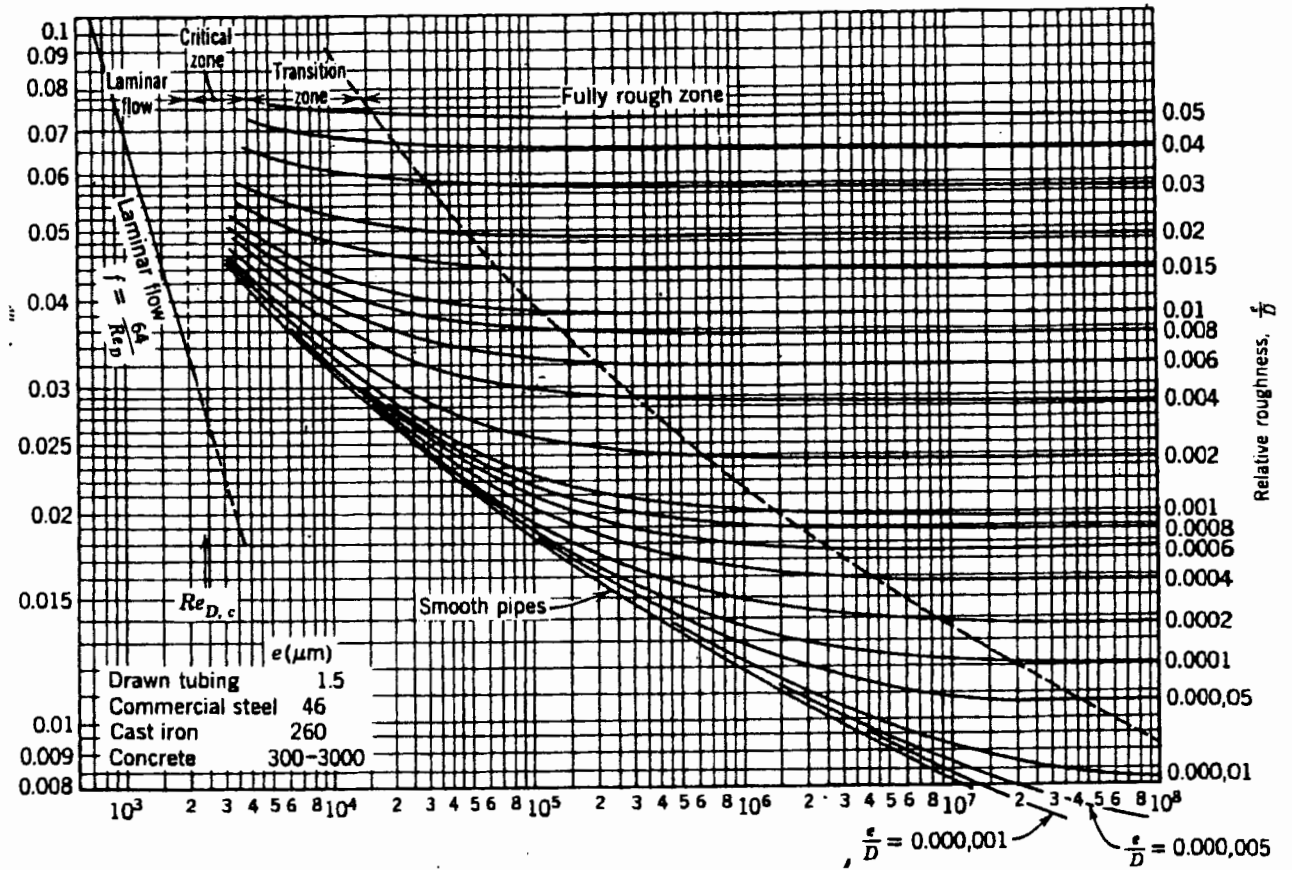


Fig. 1.7 Diagramma di Moody
(sulle ascisse Re , sulle ordinate $4C_f$)

Volendo avere un'indicazione di tipo numerico si può considerare un tubo di diametro $D = 0,02$ m, percorso da acqua allo stato di liquido, alla pressione atmosferica e con una temperatura di circa 50 °C, ed alla velocità di 2 m/s. Si ha:

$$Re = \frac{\rho Du}{\mu} \cong \frac{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 80000$$

Forma completa dell'equazione della quantità di moto

Tenendo conto della (1.4) e delle (1.5)-(1.8), si ottiene:

$$\frac{\partial \rho A u}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u = 0 \quad (1.10)$$

1.3.6 Equazione dell'Energia

Per l'equazione dell'energia $G(x, \Delta x, t)$ è l'energia totale associata alla massa di fluido contenuta nel segmento di Fig. 1.5. L'energia si compone di energia interna, energia cinetica ed energia gravitazionale; si può dunque esprimere come:

$$G(x, \Delta x, t) = \rho(x, t) A(x, t) \Delta x \left[e(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right] ,$$

da cui:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x, \Delta x, t)}{\Delta x} = \rho(x, t) A(x, t) \left(e(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right) . \quad (1.11)$$

Il termine $\Phi_A(x, t)$ è dato dalla somma di tre contributi:

- (1) il flusso di energia associato alla portata che attraversa la sezione $A(x, t)$:

$$\Phi_A^w(x, t) = w(x, t) \left(e(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right) ; \quad (1.12)$$

- (2) la potenza termica (calore per unità di tempo che attraversa la sezione $A(x, t)$ per diffusione, cioè a causa del gradiente termico, che, applicando la legge di Fourier, risulta

$$\Phi_A^D(x, t) = -\lambda(x, t) A(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad (1.13)$$

- (3) la potenza meccanica (lavoro per unità di tempo) sviluppata dalle forze esterne che agiscono sulla sezione $A(x, t)$, ove il fluido ha velocità $u(x, t)$ diretta come l'asse baricentrico (normale ad $A(x, t)$), cioè come le forze di pressione:

$$\Phi_A^L(x, t) = p(x, t) A(x, t) u(x, t) \quad (1.14)$$

Sommando le (1.12), (1.13) e (1.14) si ottiene:

$$\Phi_A(x, t) = w(x, t) \left(e(x, t) + \frac{p(x, t)}{\rho(x, t)} + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right) - \lambda(x, t) A(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} ,$$

o anche, tenendo conto della definizione di entalpia:

$$\Phi_A(x, t) = w(x, t) \left(h(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} + gz(x) \right) - \lambda(x, t) A(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} . \quad (1.15)$$

Il termine $\Phi_S(x, \Delta x, t)$ include, in questo caso, la potenza termica e la potenza meccanica cedute dal fluido attraverso la superficie laterale S . Poiché si suppone che la superficie laterale del condotto sia "pressoché rigida", il contributo del lavoro sviluppato

dalle forze che agiscono su tale superficie è normalmente trascurabile; l'espressione di Φ_S per $\Delta x \rightarrow 0$ si riduce quindi a:

$$\Phi_S(x, \Delta x, t) = \omega(x, t) \Delta x \quad \psi_s(x, t) \quad (1.16)$$

dove $\psi_s(x, t)$ è il flusso termico (per unità di superficie) incidente sulla superficie laterale nel punto di ascissa x .

I termini "sorgente" con somma F_V nell'equazione (1.1), sono nulli nel caso dell'energia se, come si è fatto, si considera il lavoro delle forze gravitazionali in termini di energia potenziale. Potrebbero essere non nulli in situazioni fisiche diverse dal moto "puro" in un condotto in presenza di generazione di energia all'interno della massa fluida (per esempio, nel caso della combustione).

In conclusione, sulla base della (1.1) e delle relazioni specifiche (1.11), (1.15) e (1.16), l'equazione di conservazione dell'energia si può esprimere nel seguente modo:

$$\frac{\partial \left[\rho A \left(e + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[w \left(h + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]}{\partial x} = \omega \psi_s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.17)$$

dove eventualmente, si potrà sostituire la relazione $e = h - p/\rho$, qualora si voglia operare con la variabile entalpia come sola variabile energetica.

Dell'equazione (1.17) si considerano spesso forme semplificate o alternative che sono suggerite dal particolare contesto applicativo. Vediamo le principali.

Eliminazione del termine di diffusione

Il termine che esprime la diffusione del calore dovuta al gradiente termico, cioè $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)$, risulta molto spesso trascurabile in quanto dominato dal termine di trasporto $\frac{\partial wh}{\partial x}$ che, a causa della bassa conducibilità λ del fluido termovettore, diventa preponderante anche per velocità del fluido decisamente piccole.

A titolo di esempio si può considerare il caso di uno scambiatore tubolare a contatto indiretto con il fluido esterno a temperatura costante lungo l'ascissa del condotto (Fig.1.8).

In condizione di regime permanente è facile dimostrare (si veda [5]) che la temperatura del fluido interno al condotto ha un andamento esponenziale che, trascurando la diffusione lungo x , è dato dalla seguente espressione:

$$T(x) = (T(0) - T_e) e^{-\frac{\gamma w}{wc_p} x} + T_e \quad (1.18)$$

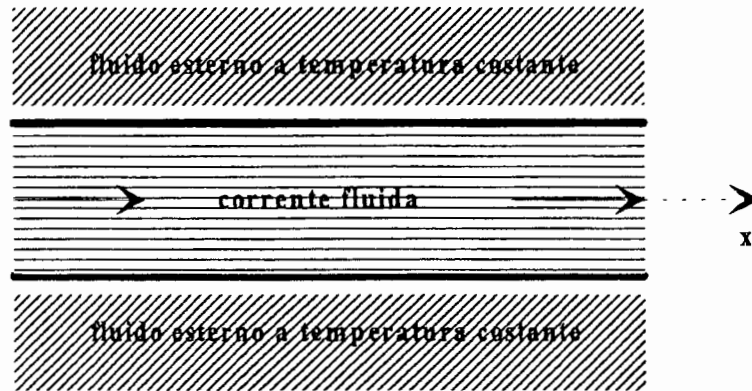


Fig. 1.8 Scambiatore a temperatura costante

dove $T(x)$ è il valore della temperatura nell'ascissa x , T_e è il valore (costante) della temperatura esterna, γ è il coefficiente di trasmissione del calore, c_p è il calore specifico del fluido interno.

Supponendo costanti (cioè indipendenti da T) i parametri γ e c_p , λ e la densità ρ (come è il caso dei liquidi in prima approssimazione), si ottiene il seguente rapporto tra il valore assoluto del termine di trasporto ed il termine di diffusione:

$$R = \frac{wc_p \frac{\partial T}{\partial x}}{\lambda A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = \frac{D \rho^2 c_p^2 u^2}{4 \lambda \gamma}$$

dove D è il diametro del condotto.

Se si fa riferimento al fluido *acqua*, sia in condizioni di liquido che di vapore, è stato verificato sperimentalmente [6, p. 347] che il coefficiente γ può essere ben calcolato dalla seguente formula dovuta a Dittus e Boelter:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

dove Nu = numero di Nusselt := $\frac{\gamma D}{\lambda}$, Pr = numero di Prandtl := $\frac{c_p \mu}{\lambda}$.

Sostituendo l'espressione di γ nell'equazione precedente, si ottiene:

$$R \cong 10,9 Re^{1,2} Pr^{1,6}$$

da cui, tenendo conto che il numero di Prandtl per l'acqua e per il vapore può scendere al limite a valori intorno a 0,8 ed il numero di Re in moto turbolento è sempre superiore

a 3000, si deduce che il rapporto tra termine di trasporto e termine di diffusione è, nelle condizioni di moto turbolento, sempre superiore a 10^5 .

Trascurabilità delle energie meccaniche

Quando nel processo sono in gioco "praticamente" solo energie meccaniche (cioè energia cinetica $u^2/2$ e potenziale gz), allora l'equazione di conservazione dell'energia è "inutile", in quanto il bilancio delle energie meccaniche è ricavabile dalla quantità di moto. Ne consegue che, generalmente, l'uso dell'equazione dell'energia è associata alla significatività degli scambi termici e, quindi, delle variazioni di temperatura. In questi casi, vi è spesso una sostanziale sproporzione tra l'entità "plausibile" delle variazioni di energia interna e quelle di energia meccanica tale da rendere assolutamente trascurabili le energie del secondo tipo.

Si consideri, a titolo di esempio, il fluido acqua allo stato di liquido e consideriamo una variazione "sensibile" di temperatura, $10\text{ }^\circ\text{C}$, dovuta ad un modesto riscaldamento del fluido.

La variazione corrispondente di energia interna è pari a:

$$\Delta e = c\Delta T \cong 42000 \text{ J/kg} .$$

Per avere una paragonabile variazione di energia cinetica occorrerebbe, ad esempio, che il fluido da fermo venisse portato alla velocità di quasi 300 m/s , ipotesi del tutto irrealistica nella maggior parte dei processi industriali, escludendo componenti molto particolari quali gli ugelli (si tenga presente che nei condotti di trasporto la velocità dell'acqua non supera mai i 10 m/s e nei tubi di uno scambiatore di calore raramente supera i 2 m/s).

Sulla base di quanto detto, si utilizza frequentemente un'equazione semplificata di conservazione dell'energia nella forma:

$$\frac{\partial \rho A e}{\partial t} + \frac{\partial \omega h}{\partial x} = \omega \psi_s \quad (1.19)$$

in cui non compaiono né il termine di diffusione né le energie meccaniche.

Equazione in forma entropica

Combinando in modo opportuno, come mostrato nell'Appendice 1, l'equazione dell'energia (1.17) con le equazioni della massa (1.3) e della quantità di moto (1.10), si può ottenere l'equazione seguente:

$$\rho A T \frac{\partial S}{\partial t} + \omega T \frac{\partial S}{\partial x} = \omega \psi_s + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 \quad (1.20)$$

dove si è trascurato il termine di diffusione della (1.17).

Val la pena osservare che se si considera un osservatore che si muove con la velocità u dell'elemento di massa e si definisce per esso la derivata totale di S rispetto al tempo come:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} ,$$

l'equazione (1.20) si riscrive come:

$$\rho AT \frac{dS}{dt} = \omega \psi_s + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 ,$$

evidenziando che l'entropia del fluido può variare nel tempo o perché viene fornito calore attraverso la parete ($\psi_s \neq 0$) o a causa dell'attrito che, depauperando le energie meccaniche, aumenta l'entropia del fluido. Nei processi in cui ψ_s è significativo, è ovvio che il termine di attrito è del tutto trascurabile, tanto che dell'equazione (1.20) si utilizza spesso la forma semplificata seguente:

$$\rho AT \frac{dS}{dt} + wT \frac{\partial S}{\partial x} = \omega \psi_s \quad . \quad (1.21)$$

1.3.7 Impiego delle equazioni di conservazione

Poiché si sta considerando il moto di un fluido ad un solo componente ed una sola fase, è opportuno chiarire quali siano le incognite del problema modellistico che s'intende risolvere con le equazioni di conservazione monodimensionali, se non altro per verificare che, almeno in linea di principio, il problema sia risolvibile (cioè si pervenga ad un **modello chiuso**).

Per caratterizzare compiutamente lo stato del fluido (nei termini "macroscopici" connessi alla nostra descrizione del moto turbolento) occorre determinare il valore della sua velocità $u(x,t)$ e di due sue variabili termodinamiche assumibili come variabili di stato, per esempio la coppia $(p(x,t), h(x,t))$ o altre equivalenti.

Dovendo determinare tre incognite occorreranno tre equazioni (alle derivate parziali) indipendenti, quali sono appunto la (1.3), (1.10) e (1.17) od una qualsiasi terza equazione equivalente. Il problema diventa quindi un problema d'integrazione nella coppia (x,t) , purché si riescano ad esprimere, o come note o in funzione delle incognite, tutte le variabili che compaiono nelle equazioni. La cosa è ovviamente scontata per tutte le variabili termodinamiche (determinabili con le equazioni di stato del fluido) ed è stata anche discussa e risolta per il "fattore d'attrito" C_f espresso dall'equazione (1.9).

L'unico aspetto che rimane quindi da chiarire è come trattare il flusso termico ψ_s che attraversa la superficie laterale che confina il fluido.

L'espressione di ψ_s dipende essenzialmente dalle condizioni di scambio termico che si realizzano sulla superficie di confine S ed occorre quindi far riferimento a processi specifici.

In generale si può dire comunque che, trattandosi di scambio termico attraverso una superficie, esso sarà tipicamente espresso in funzione delle condizioni del fluido (temperatura, velocità, pressione) e di variabili esogene (condizioni esterne al fluido), quali la temperatura della parete che "materializza" la superficie S .

La formulazione più comune delle modalità di scambio termico tra il fluido e l'esterno è attraverso la legge di Fourier applicata allo strato limite del fluido, cioè del tipo:

$$\psi_s = \gamma_{fp} (T_p - T) \quad , \quad (1.22)$$

dove γ_{fp} è il coefficiente di trasmissione del calore tra il fluido e la parete e T_p è la temperatura della superficie della parete a contatto col fluido.

È ovvio che, esprimendo ψ_s in funzione di γ_{fp} e T_p , sarà poi necessario determinare la temperatura T_p e il coefficiente γ_{fp} : la prima si calcolerà attraverso un opportuno modello della parete stessa (che interagisce con il fluido), mentre il secondo sarà, in generale, calcolabile mediante correlazioni empiriche che consentono di esprimerne il valore in funzione delle proprietà del fluido ed, eventualmente, della parete.

Sul calcolo dei coefficienti di trasmissione del calore e sulla rappresentazione, in genere, delle condizioni di scambio si ritornerà in un capitolo successivo.

Qui interessa essenzialmente concludere che le equazioni di conservazione (1.3), (1.10) e (1.17), o equivalenti, con le opportune condizioni al contorno (interazione con la parete, condizioni all'ingresso ed all'uscita del tubo) e condizioni iniziali, costituiscono un modello "chiuso" per calcolare l'andamento nel tempo delle variabili che caratterizzano la corrente fluida.

1.3.8 Condizioni di regime permanente

Nelle condizioni di regime permanente alle equazioni (1.3), (1.10) e (1.17) può essere data una forma semplificata, ponendo a zero le derivate rispetto al tempo di tutte le variabili in gioco.

Equazione della massa

Ponendo a zero il termine di derivata rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad , \quad (1.23)$$

dove si è utilizzato il simbolo di derivata totale per sottolineare che, essendo a regime, è sparita la dipendenza dal tempo.

La (1.23) esprime il fatto che, lungo il condotto, la portata rimane la stessa (costante rispetto ad x); in particolare, integrando la (1.23) in dx si ottiene che la portata in uscita del condotto è pari alla portata d'ingresso:

$$w_u = w_i$$

Si noti che tale relazione (portata indipendente dall'ascissa x) per un fluido incomprimibile $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ che fluisce in un condotto indeformabile $\left(\frac{\partial A}{\partial t} = 0\right)$ vale non solo in condizioni di regime permanente ma anche in regime comunque variabile.

Se, invece, il fluido è comprimibile e/o il condotto deformabile, la relazione (1.23) si applica solo in condizioni rigorosamente stazionarie.

Equazione della quantità di moto

Poiché in condizioni di regime stazionario $\frac{dw}{dx} = \frac{d\rho Au}{dx} = 0$, l'equazione (1.10) può essere riscritta nel seguente modo (dividendo tutti i termini per A):

$$\rho \frac{du^2/2}{dx} + \frac{dp}{dx} + \frac{C_f \omega}{2 A} \rho u |u| + \rho g \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1.24)$$

Tale equazione può essere "letta" dicendo che la caduta di pressione lungo il condotto (cioè $\frac{dp}{dx}$) è costituita da tre contributi:

- caduta dovuta alla variazione di velocità $= \rho \frac{du^2/2}{dx}$
- caduta dovuta all'attrito $\frac{C_f \omega}{2 A} \rho u |u|$
- caduta dovuta alla variazione di quota $= \rho g \frac{dz}{dx}$.

Nel caso di moto con attrito trascurabile, l'equazione (1.24) diventa

$$\frac{du^2/2}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + g \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1.25)$$

da cui si può ricavare immediatamente il teorema di Bernoulli se si suppone che il moto del fluido sia **isodenso**, cioè con $\rho = \text{cost}$.

In quest'ultimo caso infatti, la (1.25) si può integrare facilmente rispetto ad x , ottenendo:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cost} \quad , \quad (1.26)$$

ottenendo così che la somma del termine cinetico, pressorio e gravitazionale mantiene inalterato il proprio valore lungo tutto il condotto.

Si noti, comunque, che se il fluido è comprimibile (cioè $\rho \neq \text{costante}$), vale la (1.25) ma non la (1.26).

Equazione dell'energia

Si consideri la forma approssimata (1.19), generalmente impiegata quando l'equazione dell'energia è significativa. Azzerando la derivata rispetto al tempo e ricordando che, a regime permanente $\frac{dw}{dx} = 0$, la (1.19) diventa:

$$w \frac{dh}{dx} = \omega \psi_s \quad (1.27)$$

Integrando tra due sezioni qualsiasi (1 e 2) del condotto si ottiene:

$$w(h_2 - h_1) = \int_{x_1}^{x_2} \omega \psi_s dx = Q_{1,2} \quad , \quad (1.28)$$

che esprime il classico "bilancio termico" in uno scambiatore: il salto entalpico ($h_2 - h_1$) su un tratto di condotto è pari alla potenza termica totale $Q_{1,2}$ assorbita in quel tratto di scambiatore divisa per la portata massica del fluido.

1.3.9 Un esempio di soluzione analitica: moto isoentropico

Si consideri un condotto **orizzontale, adiabatico, privo d'attrito** e a **sezione costante**.

Sotto tali ipotesi, le equazioni di conservazione scritte nella forma (1.3), (1.10) e (1.20) si semplificano, rispettivamente, nelle seguenti:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{w^2}{A \rho} \right)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.30)$$

$$\rho A T \frac{\partial S}{\partial t} + w T \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (1.31)$$

Valutiamo innanzi tutto le condizioni di regime permanente nel caso non banale $w \neq 0$; si ottiene:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad , \quad (1.32)$$

$$\frac{d(w^2 / \rho A)}{dx} + A \frac{dp}{dx} = 0 \quad , \quad (1.33)$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \quad , \quad (1.34)$$

da cui si ricava:

$$w(x) = cost := w_0 \quad , \quad (1.35)$$

$$S(x) = cost := S_0 \quad , \quad (1.36)$$

$$\left(1 - \frac{w^2}{\rho^2 A^2 c_0^2}\right) \frac{dp}{dx} = 0 \quad , \quad (1.37)$$

dove si è introdotta la velocità di propagazione c_0 del suono nel mezzo in condizioni isoentropiche all'entropia S_0 , definita come:

$$\frac{1}{c_0^2} := \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cost.=S_0} .$$

La (1.37), posto $w = \rho Au$, diventa:

$$\left[1 - \left(\frac{u}{c_0}\right)^2\right] \frac{dp}{dx} = 0 ,$$

che, se si esclude il caso di moto sonico ($u = c_0$), ammette come unica soluzione la seguente:

$$p(x) = cost = p_0 \quad (1.38)$$

Poiché nelle condizioni di regime permanente le tre variabili incognite sono costanti, tali sono anche tutte le altre variabili dipendenti, quale, ad esempio, la densità $\rho = \rho_0 = \rho(p_0, S_0)$ o la temperatura $T = T_0 = T(p_0, S_0)$.

Indichiamo con $u_0 = w_0 / (A\rho_0)$ la velocità del fluido, pure costante lungo il percorso del condotto.

Il sistema (1.29)-(1.31) è non lineare; ciò impedisce di risolverlo analiticamente. Si può però limitarsi a considerare, ai fini dell'analisi, il comportamento alle piccole variazioni intorno alla condizione di regime considerata, linearizzando a tal fine il sistema in tale intorno. Detta Δy la variazione della generica variabile y , la linearizzazione porta al seguente sistema:

$$\frac{A}{c_0^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + A \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p_0} \frac{\partial \Delta S}{\partial t} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} + 2u_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + A \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - Au_0^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p_0} \frac{\partial \Delta S}{\partial x} = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta S}{\partial x} = 0 \quad (1.41)$$

Si può innanzi tutto notare che la terza equazione non contiene altra variabile se non ΔS e può quindi essere integrata separatamente, anche se la sua "versione non lineare" (1.31) era accoppiata con la (1.29) e (1.30) tramite la variabile u , a sua volta dipendente dalle altre due incognite principali w e p , oltre che da S .

Si chiarisce quindi la natura del "quasi disaccoppiamento" tra l'equazione dell'energia in forma entropica e le altre due equazioni: alle variazioni prime la terza equazione è indipendente dalle altre, in quanto solo l'entropia appare sotto il segno di derivata. A rigore va anche osservato che questo disaccoppiamento è verificato solo nel caso in cui il termine a destra dell'equazione (1.20), cioè il flusso termico, sia assunto nullo. In caso contrario la questione è un po' più complessa.

Per risolvere le equazioni linearizzate (1.39)-(1.41) utilizzeremo un metodo ben noto [7] che si sviluppa nei seguenti passi:

1. Si applica all'equazione la trasformata di Laplace ottenendo così un'equazione differenziale ordinaria nella sola variabile x , dove la variabile complessa s appare come un parametro.
2. Si integra l'equazione differenziale ordinaria (lineare) ottenuta, con le appropriate condizioni al contorno.
3. Se possibile si antitrasforma per ottenere le soluzioni nel dominio nel tempo o si interpreta direttamente il risultato nel dominio delle trasformate.

Partendo dalla (1.41), che può essere risolta indipendentemente, se si assumono condizioni iniziali nulle (cioè $\Delta S(0, x) = 0$, ossia $S(0, x) = S_0$), l'operazione di trasformazione porta alla seguente equazione:

$$\frac{d\Delta S^L(x, s)}{dx} = -\frac{s}{u_0} \Delta S^L(x, s) \quad (1.42)$$

dove

$$\Delta S^L(x, s) = \int_0^\infty \Delta S(x, t) e^{-st} dt := \mathcal{L}[\Delta S(x, t)]$$

Integrando la (1.42) si ottiene:

$$\Delta S^L(x, s) = \Delta S^L(0, s) e^{-\frac{sx}{u_0}} \quad (1.43)$$

relazione che, per antitrasformazione, conduce al semplice risultato:

$$\Delta S(x, t) = \Delta S(0, t - x/u_0) \quad (1.44)$$

In altri termini si può dire che, in condizioni adiabatiche ed in assenza di attrito, le variazioni di entropia si **propagano lungo il condotto con la velocità u_0 del fluido**;

variazioni di entropia nella generica ascissa x sono provocate da variazioni identiche verificatesi all'ingresso del condotto al tempo $(t-\tau_x)$, con $\tau_x = x/u_0$.

Dato che u_0 è la velocità di "trasporto" del fluido, si definisce anche il fenomeno descritto dalla (1.44) come il fenomeno di trasporto dell'entropia, alla velocità del fluido.

Le variazioni di entropia, determinate dalla (1.44), agiscono come "forzante" nelle equazioni (1.39) e (1.40), rendendo il sistema, costituito da queste ultime, non omogeneo.

Per comprendere i fenomeni dinamici principali associati alle eqq. (1.39) e (1.40) è sufficiente considerare la situazione più semplice, in cui il sistema diventa omogeneo, cioè la condizione di **moto isoentropico**:

$$\Delta S(0,t) = 0 \quad \forall t ;$$

in tale condizione il secondo termine della (1.39) e l'ultimo termine della (1.40) sono nulli.

Applicando alle (1.39)-(1.40) la procedura di soluzione appena illustrata per la (1.41), con $\Delta S = 0$ e condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$\Delta w^L(x,s) = k_1(s) e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x} + k_2(s) e^{\frac{s}{c_0-u_0}x} \quad (1.45)$$

$$\Delta p^L(x,s) = k_1(s) \frac{c_0^2}{A(c_0+u_0)} e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x} - k_2(s) \frac{c_0^2}{A(c_0-u_0)} e^{\frac{s}{c_0-u_0}x} \quad (1.46)$$

dove $\Delta w^L(x,s)$ e $\Delta p^L(x,s)$ sono le trasformate di Laplace di $\Delta w(x,s)$ e $\Delta p(x,s)$, mentre $k_1(s)$ e $k_2(s)$ sono due "costanti arbitrarie", in generale funzione del parametro s , che dovranno essere determinate dalle condizioni al contorno.

Trattandosi di un sistema lineare, le condizioni al contorno più generiche saranno espresse da due relazioni lineari imposte sui valori che le variabili assumono al contorno, cioè all'ingresso e all'uscita del condotto:

$$\alpha_i(s) \Delta w^L(0,s) + \beta_i(s) \Delta p^L(0,s) = f_i(s) \quad (1.47)$$

$$\alpha_u(s) \Delta w^L(l,s) + \beta_u(s) \Delta p^L(l,s) = f_u(s) \quad (1.48)$$

dove l è la lunghezza del condotto, mentre $\alpha_i(s)$, $\beta_i(s)$, $\alpha_u(s)$, $\beta_u(s)$, $f_i(s)$ ed $f_u(s)$ sono funzioni opportune che esprimono, nel dominio delle trasformate, le condizioni al contorno.

Esprimendo $\Delta w^L(0,s)$, $\Delta p^L(0,s)$, $\Delta w^L(l,s)$ e $\Delta p^L(l,s)$ mediante le (1.45), (1.46) in funzione di $k_1(s)$ e $k_2(s)$ e sostituendo tali espressioni nelle (1.47), (1.48) si ottiene un sistema lineare che consente di calcolare $k_1(s)$ e $k_2(s)$ in funzione delle funzioni note $\alpha_i(s)$, $\beta_i(s)$, $\alpha_u(s)$, $\beta_u(s)$, $f_i(s)$ ed $f_u(s)$.

A titolo di esempio, si possono considerare alcune semplici condizioni al contorno:

- (a) è imposta la portata in ingresso al condotto (pompa volumetrica in ingresso) e la pressione all'uscita del condotto è tenuta costante (sbocco in ambiente a pressione costante, quale è, ad esempio, l'atmosfera);
- (b) è imposta la pressione in ingresso (in generale ad un valore variabile) mentre in uscita al condotto è stabilita una relazione di proporzionalità tra variazioni di portata e variazioni di pressione (condotto chiuso su un elemento "resistivo", quale è una valvola, che scarica in un ambiente a pressione costante).

Nel caso (a) avremo:

$$\begin{aligned} \alpha_i(s) &= 1, & \beta_i(s) &= 0, & f_i(s) &= \ell [\Delta w_0(t)] \\ \alpha_u(s) &= 0, & \beta_u(s) &= 1, & f_u(s) &= 0 \end{aligned} ,$$

dove $\Delta w_0(t)$ è la variazione della portata (in generale variabile) impressa in ingresso al condotto.

Applicando il procedimento di calcolo sopra indicato, posto $\Delta w_{0,\ell}^L(s) = \ell [\Delta w_0(t)]$, si ottiene:

$$k_1(s) = \frac{\Delta w_0^L(s)}{1 + \frac{c_0 - u_0}{c_0 + u_0} e^{-st_0}} , \quad k_2(s) = \frac{\Delta w_0^L(s)}{1 + \frac{c_0 + u_0}{c_0 - u_0} e^{st_0}} , \quad (1.49)$$

dove $t_0 = 2\ell c_0 / (c_0^2 - u_0^2)$.

Nel caso (b) avremo:

$$\begin{aligned} \alpha_i(s) &= 0 , & \beta_i(s) &= 1 , & f_i(s) &= \ell [\Delta p_0(t)] \\ \alpha_u(s) &= -r , & \beta_u(s) &= 1 , & f_u(s) &= 0 \end{aligned} ,$$

dove $\Delta p_0(t)$ è la variazione della pressione impressa in ingresso al condotto.

In questo caso i valori di $k_1(s)$ e $k_2(s)$ risultano:

- se $r \neq c_0^2 / [A(c_0 + u_0)]$

$$k_1(s) = \frac{\Delta p_0^L(s)}{Z^+ - Z^- \frac{Z^+ - r}{Z^- + r} e^{-st_0}} , \quad k_2(s) = \frac{\Delta p_0^L(s)}{Z^+ \frac{Z^- + r}{Z^+ - r} e^{st_0} - Z^-} , \quad (1.50)$$

dove $Z^+ := c_0^2 / [A(c_0 + u_0)]$ e $Z^- := c_0^2 / [A(c_0 - u_0)]$.

Qualsiasi siano le condizioni al contorno (e quindi i valori di $k_1(s)$ e $k_2(s)$), la soluzione (1.45), (1.46) si offre ad una interpretazione fisica molto espressiva. A tal fine si ponga:

$$\Delta w_+^L(x, s) := k_1(s) e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x}$$

$$\Delta w_-^L(x, s) := k_2(s) e^{\frac{s}{c_0-u_0}x}$$

$$\Delta p_+^L(x, s) := k_1(s) \frac{c_0^2}{A(c_0+u_0)} e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x}$$

$$\Delta p_-^L(x, s) := -k_2(s) \frac{c_0^2}{A(c_0-u_0)} e^{\frac{s}{c_0-u_0}x}$$

Allora la (1.45), (1.46) si possono riscrivere come:

$$\Delta w^L = \Delta w_+^L + \Delta w_-^L \quad (1.51)$$

$$\Delta p^L = \Delta p_+^L + \Delta p_-^L \quad (1.52)$$

dove inoltre

$$\Delta w_+^L(x, s) := \Delta w_+^L(0, s) e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x} \quad (1.53)$$

$$\Delta w_-^L(x, s) := \Delta w_-^L(l, s) e^{-\frac{s}{c_0-u_0}(l-x)} \quad (1.54)$$

$$\Delta p_+^L(x, s) := \Delta p_+^L(0, s) e^{-\frac{s}{c_0+u_0}x} \quad (1.55)$$

$$\Delta p_-^L(x, s) := \Delta p_-^L(l, s) e^{-\frac{s}{c_0-u_0}(l-x)} \quad (1.56)$$

con

$$\Delta p_+^L(x, s) / \Delta w_+^L(x, s) = Z^+ \quad (1.57)$$

$$\Delta p_-^L(x, s) / \Delta w_-^L(x, s) = Z^- \quad (1.58)$$

Essendo banale la loro antitrasformazione, le equazioni (1.51)-(1.56) sono di lettura immediata:

- variazioni di portata (pressione) sono date dalla somma di due componenti l'una che si propaga lungo la direzione positiva delle x (cioè da $x = 0$ a $x = l$) con velocità pari

alla somma della velocità del suono c_0 e della velocità del fluido u_0 , l'altra che si propaga in direzione opposta (cioè da $x = l$ a $x = 0$) con velocità pari a $c_0 - u_0$;

- le componenti dirette (che si propagano in avanti) di pressione e portata stanno tra loro in un rapporto costante (indipendente da x e da t) pari a Z^+ , le componenti riflesse (che si propagano all'indietro) stanno tra loro in un rapporto costante (diverso) pari a $-Z^-$.

Di fatto le equazioni considerate sono le equazioni delle onde (di pressione e portata) per il condotto in esame e la loro soluzione dice che, in **condizioni isoentropiche**, le onde di pressione e portata sono costituite dalla sovrapposizione di una componente diretta ed una componente riflessa che si propagano (in direzione opposta) con **velocità relativa** al fluido pari alla velocità del suono c_0 .

La velocità del suono è appunto la velocità con cui si propagano le onde pressorie relativamente al mezzo.

La condizione $r = c_0^2 / [A(c_0 + u_0)]$ che dà luogo alla (1.51) è, a questo punto, di immediata interpretazione: se la "resistenza" terminale r del condotto è pari a Z^+ , allora non si ha componente riflessa, ossia l'onda propagatasi dall'ingresso (in cui è posta la "perturbazione" $\Delta p_0(t)$) non si riflette all'indietro una volta arrivata alla fine del condotto.

Questo comportamento, dovuto ad una condizione al contorno molto particolare ($r=Z^+$), è appunto chiamata condizione di **adattamento** "dell'impedenza" terminale r all'impedenza Z^+ , detta anche **impedenza caratteristica** del condotto relativa alla propagazione in avanti (cioè concorde con u_0).

Nella quasi totalità dei casi la velocità di propagazione del suono c_0 è molto maggiore della velocità u_0 di trasporto del fluido. In questo caso le velocità di propagazione dell'onda diretta e riflessa si confondono e possono essere assunte circa pari a c_0 . Di conseguenza vengono a coincidere le impedenze caratteristiche Z^+ e Z^- relative alla componente di onda diretta e riflessa, rispettivamente. Si ha infatti:

$$Z^+ \equiv Z^- \equiv c_0 / A := Z_c \quad ; \quad (1.59)$$

si parla allora semplicemente di impedenza caratteristica del condotto Z_c . Inoltre, riferendosi alle (1.49), $t_0 \equiv 2l/c_0$.

Sempre a scopo di esemplificazione, assumendo vera per semplicità la disuguaglianza $u_0 \ll c_0$, andiamo ad esprimere esplicitamente una possibile variabile di uscita, $\Delta p(l, t)$, del sistema costituito dalle (1.45) e (1.46) con le condizioni al contorno del caso (b) sopra considerato, che corrispondono ai valori (1.50) delle costanti arbitrarie $k_1(s)$ e $k_2(s)$.

Sostituendo la (1.59) nella (1.50) ed utilizzando la (1.46) con $x=l$, si ottiene:

$$\Delta p^L(l, s) = \Delta p_0^L(s) \frac{e^{-st_0/2}}{1 - \alpha e^{-st_0}} (1 - \alpha) \quad ,$$

$$\text{dove } \alpha := \frac{Z_c - r}{Z_c + r} .$$

In questo caso l'unica variabile esogena (ingresso) è la variazione della pressione in ingresso $\Delta p_0(t)$; la variazione dell'uscita è dunque causata solo da $\Delta p_0(t)$, rispetto alla quale si ha la funzione di trasferimento:

$$G(s) := \frac{\Delta p^L(l, s)}{\Delta p_0^L(s)} = e^{-st_0/2} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{-st_0}} \quad (1.60)$$

che, come era scontato trattandosi di un sistema retto da equazioni alle derivate parziali, è una funzione di tipo trascendente.

Data la semplicità della funzione è anche relativamente facile calcolare la risposta a gradino corrispondente alla (1.60). Si può infatti vedere la funzione $G(s)$ come la cascata (Fig. 1.9) di un ritardo puro $e^{-st_0/2}$ e della funzione $G'(s) := \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{-st_0}}$.

La risposta a gradino di $G(s)$ sarà poi pari a quella di $G'(s)$ ritardata di $t_0/2$. Per calcolare la risposta di $G'(s)$ osserviamo che, antitrasformando, essa equivale a:

$$y(t) = \alpha y(t - t_0) + (1 - \alpha)v(t) \quad ; \quad (1.61)$$

poiché $v(t) = u(t - t_0/2) = sca(t - t_0/2)$, si ottengono le risposte a gradino tracciate in Fig. 1.10 per i tre casi di $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ ed $\alpha = 0$ (si noti che il caso $\alpha = 0$ corrisponde al caso di condotto adattato cioè $r = Z_c$, in cui $G'(s) = 1$).

Si osservi che l'equazione (1.61) rappresenta un semplice modello discreto del primo ordine, se si assume come intervallo di discretizzazione del tempo proprio il tempo t_0 .

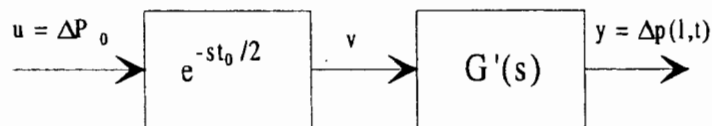


Fig. 1.9 Scomposizione della funzione di trasferimento

Osservazione :

Se si fosse rimossa l'ipotesi di isoentropicità, cioè non si fosse imposta la condizione al contorno $\Delta S(0, t) = 0 \quad \forall t$, la soluzione delle (1.39), (1.40) avrebbe contenuto anche un termine forzante proporzionale a $\frac{\partial \Delta S(x, t)}{\partial t}$ e uno proporzionale a $\frac{\partial \Delta S(x, t)}{\partial x}$, ossia, in base alla (1.44), alla derivata rispetto al tempo della variabile esogena $\Delta S(0, t)$ calcolata al

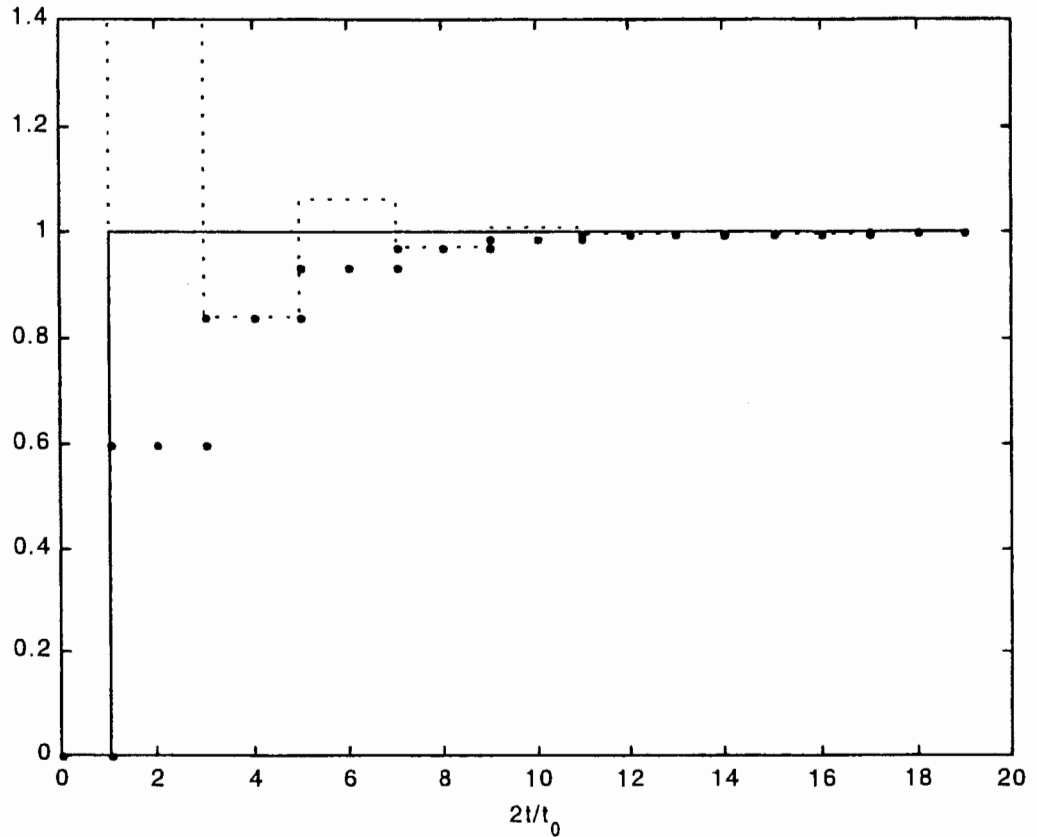


Fig. 1.10 Risposta a gradino di $G(s)$
 (--- $\alpha = -0,4$; — $\alpha = 0$; ••• $\alpha = 0,4$)

tempo $t-x/u_0$. In tale situazione il sistema lineare, cui si applica ovviamente la sovrapposizione degli effetti, sarà caratterizzato ancora dallo stesso tipo di dinamica (che dipende essenzialmente dalla parte omogenea delle equazioni), mentre sull'uscita si avrà l'effetto oltre che degli "ingressi" incorporati nelle condizioni al contorno (1.47), (1.48) anche dell'ingresso $\Delta S(0,t)$, con appropriata funzione di trasferimento.

Rimangono fermi alcuni fatti di tipo strutturale: l'entropia del fluido, nel caso di assenza di attrito e nell'approssimazione delle variazioni prime, non risente delle variazioni di pressione e portata e si **trasporta con la velocità del fluido** (u_0); le variazioni di portata e la pressione, nelle succitate ipotesi, si propagano con la velocità del suono c_0 , essendo eventualmente "disturbate" dalle variazioni di entropia che agisce sul sistema pressione-portata, come variabile esogena.

Poichè nei condotti la velocità di trasporto del fluido è sempre molto minore di quella del suono (di almeno un ordine di grandezza per i gas e di almeno due per i liquidi), ne deriva che al trasporto dell'entropia sono associati fenomeni dinamici relativamente lenti (a bassa frequenza), mentre alla propagazione delle onde di pressione e portata sono associati fenomeni relativamente veloci.

1.4 EQUAZIONI MONODIMENSIONALI: FLUIDO BIFASE

In alcuni importanti processi industriali (per esempio nei generatori di vapore) il fluido in moto in un tubo o condotto può essere costituito da una miscela bifase, che può essere posta in moto o per convezione naturale (cioè sotto la spinta delle forze gravitazionali) o per convezione forzata (cioè provocata da appositi dispositivi, quali le pompe). Le motivazioni che portano a utilizzare per il moto di tali fluidi in volumi "tubiformi" una formulazione monodimensionale sono le stesse viste per il flusso monofase. La descrizione del moto è qui però assai complessa, in quanto, in generale, occorrerebbe suddividere il campo di moto in regioni a confini mobili nelle quali è presente una sola fase, con interazione tra le regioni attraverso interfacce mobili, il cui movimento è spesso incognito. Sia le variabili di ciascuna fase, sia le interfacce mobili sono soggette a fluttuazioni rapide nel tempo che, per la determinazione degli aspetti macroscopici del suo comportamento, possono essere ignorate introducendo opportune operazioni di media.

La derivazione rigorosa delle equazioni dell'efflusso bifase in condotti è assai complessa. Ci si limiterà quindi a presentare le formulazioni rilevanti per l'applicazione alla dinamica dei processi industriali, dando di esse una giustificazione euristica e cercando di precisare sotto quali ipotesi tali formulazioni possono essere utilizzate. In particolare si presenterà il cosiddetto **modello omogeneo** dell'efflusso bifase, che si ottiene assumendo quanto segue:

- nella generica sezione A del condotto le pressioni delle due fasi siano uguali;
- le forze di volume siano dovute solo alla gravità;
- nella generica sezione A la temperatura delle due fasi sia la stessa e pari alla temperatura di saturazione;
- Le velocità \bar{u}_v ed \bar{u}_l con cui si muovono, rispettivamente, la fase vapore e la fase liquida nella generica sezione siano legate da una relazione algebrica nella forma $\bar{u}_v = \bar{u}_l + \bar{\xi}$ oppure $\bar{u}_v = \bar{u}_l \sigma$, dove $\bar{\xi}$ o σ sono calcolabili, a partire dalle proprietà stesse del fluido nella sezione considerata, mediante correlazioni empiriche valide per specificati campi di funzionamento.

Un caso particolare di modello omogeneo (quello più semplice) è quello in cui si assuma $\bar{u}_v = \bar{u}_l$, ossia $\bar{\xi} = 0$ e $\sigma = 1$; per distinguere questo modello molto particolare (ma anche molto usato per la sua semplicità) si utilizzerà la denominazione "modello omogeneo" per il caso $\sigma = 1$ (o $\bar{\xi} = 0$), mentre per il caso $\sigma \neq 1$ (o $\bar{\xi} \neq 0$) si utilizzerà la denominazione "modello quasi-omogeneo".

Un modo per ottenere, mediante considerazioni euristiche, le equazioni del modello quasi-omogeneo è di immaginare l'efflusso bifase come dovuto all'efflusso di due fluidi monofase, ciascuno dei quali occupa una parte della sezione retta A del condotto, pari ad α per la fase vapore e ad $(1-\alpha)$ per la fase liquido (si noti che il parametro α così definito rappresenta il cosiddetto grado di vuoto nella sezione considerata).

L'equazione della massa (1.3) scritta per la sola fase liquida e per la sola fase vapore, rispettivamente, risulta:

$$\frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)u_l]}{\partial x} = -\delta \quad , \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial[\rho_v A\alpha]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_v A u_v \alpha]}{\partial x} = \delta \quad , \quad (1.63)$$

dove ρ_l e ρ_v sono, rispettivamente, le densità del liquido e del vapore, u_l ed u_v le relative velocità e δ è lo scambio di massa tra le fasi nell'unità di tempo (e per unità di lunghezza).

Sommando le (1.62) e (1.63), eliminando così δ si ottiene:

$$\frac{\partial\{[\rho_l(1-\alpha) + \rho_v\alpha]A\}}{\partial t} + \frac{\partial\{[\rho_l u_l(1-\alpha) + \rho_v u_v \alpha]A\}}{\partial x} = 0 \quad (1.64)$$

che può essere scritta in forma del tutto analoga alla (1.3), pur di definire:

$$\bar{\rho} = (1-\alpha)\rho_l + \alpha\rho_v = \text{densità media della miscela} \quad , \quad (1.65)$$

essendo, comunque, la portata data dall'espressione $w = [\rho_l u_l(1-\alpha) + \rho_v u_v \alpha]A$, cioè pari alla somma della portata di liquido e della portata di vapore. La (1.64) diventa allora:

$$\frac{\partial \bar{\rho} A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad . \quad (1.66)$$

Per avere una formulazione più compatta è opportuno operare invece che nella variabile portata w , nella variabile $G := w/A$, detta anche portata specifica di massa.

La (1.66) si scrive allora come:

$$\frac{\partial \bar{\rho} A}{\partial t} + \frac{\partial GA}{\partial x} = 0 \quad . \quad (1.67)$$

allo stesso modo, per le due espressioni della quantità di moto, nella forma (1.10), si scriverà:

$$\frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)u_l]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)u_l^2]}{\partial x} + A(1-\alpha)\frac{\partial p}{\partial x} - [\varphi_{si}^{\tau}]_l + A(1-\alpha)\rho_l g \frac{dz}{dx} = -\varphi^* \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial(\rho_v A u_v \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_v A u_v^2 \alpha)}{\partial x} + A\alpha \frac{\partial p}{\partial x} - [\varphi_{si}^{\tau}]_v + A\alpha\rho_v g \frac{dz}{dx} = \varphi^* \quad (1.69)$$

dove il termine di attrito è stato assunto nella sua forma generica di forza tangenziale (per unità di lunghezza), dovuta al liquido $[\varphi_{si}^{\tau}]_l$ e al vapore $[\varphi_{si}^{\tau}]_v$ separatamente, in quanto la correlazione empirica utilizzata per il fluido monofase nella (1.10) non appare direttamente applicabile alle singole fasi; inoltre φ^* rappresenta gli scambi di forze e quantità di moto tra le due fasi.

Sommando la (1.68) e la (1.69) si ottiene:

$$\frac{\partial GA}{\partial t} + \frac{\partial v' G^2 A}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + A \bar{\rho} g \frac{dz}{dx} - \varphi_{si}^\tau = 0 \quad , \quad (1.70)$$

dove si è definito:

$$v' = \left[\rho_l u_l^2 (1 - \alpha) + \rho_v u_v^2 \alpha \right] / G^2 \quad ,$$

$$\varphi_{si}^\tau = \left[\varphi_{si}^\tau \right]_l + \left[\varphi_{si}^\tau \right]_v = \text{risultante delle forze tangenziali di attrito.}$$

Si noti che v' , dimensionalmente pari a un volume specifico, coincide con l'inverso della densità media $\bar{\rho}$ solo nel caso in cui $u_v = u_l$, cioè nel caso in cui il modello sia omogeneo in senso stretto. Di fatto, in questo caso, il termine cinetico del modello bifase coincide con quello monofase, che si può anche scrivere come $\frac{\partial v G^2 A}{\partial x}$, con $v = 1/\bar{\rho}$. A parte la comparsa di v' al posto di v , il modello dell'efflusso bifase può richiedere qualche attenzione ulteriore per la valutazione del termine φ_{si}^τ . A tale proposito si può osservare che la variabile velocità u , che compare nell'equazione (1.8) del caso monofase, non ha un significato univoco se $u_v \neq u_l$; si può riscrivere però la (1.8) relativa all'efflusso monofase facendo riferimento alla portata specifica di massa:

$$\left[\varphi_{si}^\tau \right]_{monofase} = - \frac{C_f \omega}{2 \rho} G |G| \quad . \quad (1.71)$$

Anche nel caso bifase [8] si impiegano correlazioni empiriche simili alla (1.71), con qualche complicazione (non banale) sul calcolo della densità ρ e del fattore di attrito C_f , se non altro perchè non appare immediato definire, per una miscela bifase, il numero di Reynolds da cui C_f dovrebbe dipendere.

Una delle correlazioni più semplici, valida quando u_l e u_v non differiscono molto (cioè per valori di pressione e/o di G elevati) "emula" la (1.71) nella forma:

$$\left[\varphi_{si}^\tau \right]_{bifase} = - \frac{C_{fb} \omega}{2 \rho_b} G |G| \quad , \quad (1.72)$$

dove ρ_b (in generale $\neq \bar{\rho}$) è la "densità di portata", definita come rapporto tra portata specifica G e velocità media u_m :

$$\rho_b := \frac{G}{u_m} = \frac{G}{u_v \alpha + (1 - \alpha) u_l} \quad ,$$

mentre C_{fb} è esprimibile in funzione del numero di Reynolds R_b (convenzionale) della miscela calcolato come:

$$R_b = \frac{GD}{\mu_b} \quad ,$$

essendo μ_b la "viscosità della miscela", la cui definizione è stata oggetto di molteplici versioni: la più semplice è quella che assume $\mu_b = \mu_l =$ viscosità del liquido

Trattandosi di materia molto specifica e connessa ad un enorme lavoro di tipo sperimentale, anche per le sole miscele acqua-vapore, si rimanda alle pubblicazioni specializzate per ulteriori approfondimenti, fermo restando che, concettualmente, il termine di attrito verrà sempre calcolato mediante correlazioni empiriche, di forma simile alla (1.72), modificata da opportuni fattori correttivi che diventano non banali per le situazioni in cui u_l ed u_v differiscono significativamente.

Considerando infine, l'equazione dell'energia, scritta nella forma (1.19) per ragioni di semplicità, con $e = h - p/\rho$, si potrà scrivere per le due fasi:

$$\frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)h_l]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_l A(1-\alpha)u_l h_l]}{\partial x} - A(1-\alpha)\frac{\partial p}{\partial t} = \omega_l \psi_{sl} - \xi \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial(\rho_v A h_v \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_v A h_v u_v \alpha)}{\partial x} - A \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \omega_v \psi_{sv} + \xi \quad , \quad (1.74)$$

dove ω_l e ω_v sono i perimetri "bagnati" dal liquido e dal vapore, rispettivamente, ψ_{sl} e ψ_{sv} i flussi termici scambiati attraverso i perimetri suddetti ed ξ la potenza per unità di lunghezza scambiata tra le due fasi.

Sommando la (1.73) e (1.74) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{\rho} A \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \omega h'}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial t} = \omega \psi_s \quad , \quad (1.75)$$

dove \bar{h} ed h' sono le entalpie medie "di massa" e di "portata", rispettivamente:

$$\bar{h} = \frac{(1-\alpha)\rho_l h_l + \alpha\rho_v h_v}{\rho} \quad , \quad (1.76)$$

$$h' = \frac{(1-\alpha)\rho_l h_l u_l + \alpha\rho_v h_v u_v}{G} \quad , \quad (1.77)$$

e $\psi_s := (\omega_l \psi_{sl} + \omega_v \psi_{sv})/\omega$ è proprio il flusso medio sulla parete.

Naturalmente, quando le due velocità u_v ed u_l sono uguali, le due entalpie $h' = \bar{h}$. Di fatto il modello omogeneo è formalmente identico a quello del monofase, pur di introdurre opportune quantità medie, del resto assai naturali, quali:

- la densità media (1.65)
- l'entalpia media (1.76).

Nel caso quasi omogeneo, cioè con $\xi \neq 0$ o $\sigma \neq 1$, la situazione è un pò più complessa; innanzitutto occorre verificare che il modello sia effettivamente chiuso.

A tale scopo, verifichiamo qual'è un insieme minimo possibile di variabili incognite, analizzando le equazioni della massa della quantità di moto e dell'energia.

Ragionando, per semplicità a sezione retta invariante nel tempo, nella (1.66) si possono evidenziare le seguenti quattro incognite "fondamentali":

- 1) la pressione p , da cui dipendono ρ_l e ρ_v attraverso le equazioni di stato del fluido (valori sulla "campana" di saturazione);
- 2) il grado di vuoto α ;
- 3) la velocità del liquido u_l ;
- 4) la velocità del vapore u_v .

Attraverso le stesse variabili si possono esprimere tutte le grandezze che appaiono nella (1.70) e nella (1.75), osservando che h_l ed h_v sono esprimibili in funzione della sola pressione.

In linea di principio, quindi, se si aggiunge una relazione, tipicamente una correlazione empirica, che determini il rapporto di velocità σ (detto scorrimento) o la differenza $\bar{\xi}$ tra le velocità, il modello può risultare chiuso. Seguendo una linea di pensiero tipica della termoidraulica tecnica, molti ricercatori hanno realizzato esperimenti per individuare una correlazione empirica di carattere abbastanza generale per l'efflusso bifase. In realtà, a seconda delle condizioni di moto del fluido (in particolare dei valori di pressione e portata specifica) alcune correlazioni si mostrano migliori di altre nel predire i valori sperimentali.

Mentre si rimanda a pubblicazioni specializzate (per esempio [8] per un quadro coerente su tale materia, si riporta qui una tipica correlazione (per la verità la più semplice fra quelle accreditate internazionalmente) dovuta a Bankoff ; essa è espressa nella forma:

$$\alpha = \frac{k}{1 + \frac{1 - x_p \rho_v}{x_p \rho_l}}, \quad (1.78)$$

con $k = 0,71 + 0,000145 P$, P = pressione espressa in bar, mentre x_p , che è il cosiddetto titolo di portata, definito come il rapporto tra la portata (locale) di vapore e la portata totale, è dato da:

$$x_p = \frac{\rho_v u_v \alpha}{G} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)} \quad (1.79)$$

La correlazione (1.78) non appare direttamente come una correlazione che fornisce lo scorrimento σ tra le due fasi; in realtà sostituendo la (1.79) nella (1.78) si ottiene:

$$\sigma = \frac{1 - \alpha}{k - \alpha}, \quad (1.80)$$

relazione che evidenzia due fatti:

- dalla correlazione (1.78) si può ricavare il fattore di scorrimento σ una volta noto il grado di vuoto α e la pressione p (cioè k);
- la correlazione di Bankoff¹ [9] si può utilizzare per $k > \alpha$.

Ne discende che, poichè per definizione $u_v = \sigma u_l$, la relazione (1.80), o la (1.78) insieme a "identità" termodinamiche quali la (1.79), chiude il bilancio equazioni-incognite, consentendo di esprimere u_v in funzione di u_l ed α .

Va infine precisato che, nella realizzazione di modelli dinamici, le variabili usate come incognite principali non sono generalmente costituite dalla tripletta (p, u_l, α) . Più spesso si utilizzano grandezze "medie" quali G ed \bar{h} in luogo di u_l ed α , lavorando così nella tripletta (p, G, \bar{h}) o (p, G, \bar{S}) essendo \bar{S} l'entropia media della miscela definita in modo analogo ad \bar{h} .

Poichè nelle equazioni (1.66), (1.70) e (1.75) compaiono altre variabili oltre alle incognite principali, si tratterà poi di utilizzare una serie di "relazioni termodinamiche" (di fatto identità quali la (1.79)), oltre ad una correlazione empirica del tipo (1.78) o equivalente, per chiudere il modello.

Per brevità, volendo qui soffermarsi sui soli aspetti concettuali, non si considereranno formulazioni specifiche adatte per il dell'effusso bifase nel caso generale $\sigma \neq 1$.

Nel caso particolare $\sigma = 1$, caso spesso impiegato nelle applicazioni di processo specie ad alta pressione, il modello **omogeneo** diventa particolarmente semplice. Esso si può formulare, particolarizzando le (1.66), (1.70) e (1.75), nel seguente modo:

$$\frac{\partial \bar{\rho} A}{\partial x} + \frac{\partial A G}{\partial x} = 0 \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial G A}{\partial x} + \frac{\partial A G^2 / \bar{\rho}}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + A \bar{\rho} g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{C_f}{2} \frac{\omega}{\rho} G |G| = 0 \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} A \bar{h}}{\partial x} + \frac{\partial A G \bar{h}}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial x} = \omega \psi_s, \quad (1.83)$$

dove le naturali incognite fondamentali sono G (o $w=AG$), p ed \bar{h} , mentre la densità $\bar{\rho}$ può essere semplicemente espressa in funzione del titolo X (che per $\sigma = 1$ coincide con x_p) come:

$$\bar{\rho} = \left(\frac{X}{\rho_v} + \frac{1-X}{\rho_l} \right)^{-1},$$

¹ Di fatto esiste una "correzione" (dovuta a Jones [10]) della correlazione di Bankoff per estenderne l'applicabilità a valori di $\alpha \geq k$.

essendo ρ_v e ρ_l funzioni della pressione p e X calcolabile dall'entalpia:

$$X = \frac{\bar{h} - h_l}{h_v - h_l} ,$$

con h_l ed h_v ancora funzioni della sola pressione (entalpia di saturazione del liquido e del vapore).

Val la pena fare un'ultima osservazione, parallela a quella sviluppata per gli efflussi monofase.

Anche nel caso bifase lo scambio di calore espresso dal termine ψ_s verrà tipicamente calcolato mediante una legge di Fourier del tipo (1.22) che fa dipendere ψ_s del salto di temperatura; va però tenuto presente che il calcolo del coefficiente di trasmissione del calore (γ_{fp} nella (1.22)) tra parete e fluido va calcolato in base a correlazioni specifiche dell'efflusso bifase, dato che i fenomeni che si sviluppano nello strato limite sono radicalmente diversi.

Per la trattazione specifica, si rimanda al paragrafo successivo.

1.5 CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER MOTO TURBOLENTO MONODIMENSIONALE

1.5.1 Premessa

La letteratura relativa ai metodi e alle formule di calcolo dei coefficienti di trasmissione del calore, nelle più disparate configurazioni geometriche e condizioni di efflusso, è praticamente sterminata. Per il lettore che voglia avere un quadro relativamente sintetico (ma corretto) delle problematiche coinvolte e delle conoscenze fondamentali si consiglia la consultazione del volume di Incropera e De Witt [11]; un utile riferimento può anche essere il trattato sui Generatori di Vapore di Annaratone [6,12].

Qui ci si limiterà a ricordare quali siano i risultati disponibili per il calcolo di tali coefficienti nella condizione fisica cui si riferisce la trattazione dei paragrafi 1.3, e 1.4, cioè dell'efflusso monodimensionale turbolento in regime monofase e bifase.

Prima di introdurre le formule di calcolo vere e proprie è opportuno chiarire alcuni concetti sul metodo impiegato per la valutazione dei coefficienti di trasmissione del calore nella costruzione di modelli dinamici di processo.

Facendo riferimento per esempio, all'equazione (1.22), si tratta di esprimere il coefficiente γ_{fp} in funzione delle condizioni del fluido ed, eventualmente, della parete con cui è a contatto, cercando di soddisfare ai seguenti requisiti:

- (1) le condizioni del fluido devono essere esprimibili in funzione delle variabili di nocciolo che sono le incognite calcolabili con le equazioni di conservazione;

- (2) il calcolo di γ_{fp} è effettuato "localmente" nel tempo e nello spazio, cioè per ogni coppia (x,t) , dato che va impiegato in equazioni alle derivate parziali.

A fronte del requisito (1) abbiamo che, fenomenologicamente, lo scambio termico convettivo tra fluido e parete è determinato da ciò che succede nello strato limite, dove la complessità dei fenomeni è proibitiva per una trattazione analitica di ragionevole complessità. È necessario quindi ricorrere a "**correlazioni empiriche**" cioè a formule ricavate sulla base di esperimenti, che correlino i valori del coefficiente γ_{fp} ai valori delle variabili di nocciolo, basandosi sul fatto che esiste un'ovvia correlazione tra i fenomeni dello strato limite e quelli del nocciolo (oltre che eventualmente della parete), anche se tale correlazione non è facile da stabilire in base a pure considerazioni teoriche.

Dunque la validità di tali correlazioni deriva dalla validità (e dalla rappresentatività) degli esperimenti che ne stanno alla base.

A questo proposito va osservato che, in apparente contrasto con il requisito (2), gli esperimenti sono pressochè sempre di tipo stazionario e basati sulla misura di grandezze medie nello spazio. Nell'impiego di tali correlazioni si dovrà quindi ipotizzare:

- (1) che la dinamica dei fenomeni coinvolti (nello strato limite) sia così rapida da rendere valida istante per istante la relazione che si stabilisce a regime, in considerazione della massa assai ridotta dello strato limite stesso;
- (2) che, nell'esperimento gli effetti locali (tipicamente effetti di imbocco e di sbocco in un tubo) siano trascurabili, tali da rendere i valori medi praticamente coincidenti con i valori in ogni punto del flusso e che lo scambio in condizioni generiche non sia influenzato da una distribuzione non uniforme delle proprietà del fluido e della parete.

Esistono casi, specie nell'efflusso bifase, in cui una valutazione puramente locale di γ_{fp} conduce ad errori non trascurabili, specie per l'accuratezza richiesta in fase di dimensionamento/progetto del processo. Per le applicazioni di controllo, tuttavia, l'interpretazione "istantanea e locale" delle correlazioni empiriche risulta ampiamente accettabile.

Da ultimo un'osservazione sulla formulazione delle correlazioni. Per garantire la massima generalità e applicabilità alle correlazioni stesse, queste vengono tipicamente formulate in termini adimensionali, cioè come relazioni tra numeri adimensionali, quali:

- **il numero di Reynolds** $Re = (GD)/\mu$
- **il numero di Prandtl** $Pr = (c_p\mu)/\lambda$
- **il numero di Nusselt** $Nu = (\gamma_{fp} D)/\lambda$

Questa filosofia sarà mantenuta, ove possibile, anche in questa trattazione.

1.5.2 Efflusso turbolento monofase

Nel caso di un fluido monofase in moto turbolento in un condotto liscio circolare, si può utilizzare con buona accuratezza per fluidi allo stato di liquido o di vapore (con esclusione dei metalli liquidi) **l'equazione di Dittus-Boelter**:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n, \quad (1.84)$$

dove $n = 0,4$ per processi di riscaldamento (cioè $T_p > T$ nell'equazione (1.22)) e $n = 0,3$ per processi di raffreddamento ($T_p < T$ nell'equazione (1.22)). L'equazione (1.84) è stata verificata sperimentalmente per i seguenti intervalli di funzionamento:

$$0,7 \leq Pr \leq 160$$

$$Re \geq 10^4$$

$$L/D \geq 10$$

dove L e D sono, rispettivamente, la lunghezza e il diametro del condotto.

La condizione $L/D > 10$ è essenzialmente dovuta al non verificarsi delle condizioni di regime turbolento nelle zone vicine alle estremità del condotto (zona di imbocco e di sbocco).

L'equazione (1.84) risulta ancora applicabile per tubi "essenzialmente" lisci, cioè caratterizzati dalla inevitabile rugosità dei tubi commerciali; non può essere applicata a tubi dotati di speciali accorgimenti per aumentarne la "rugosità", quali alettature, rigature ecc., che possono essere utilizzate proprio per incrementare lo scambio termico.

Per i metalli liquidi ($3 \cdot 10^{-3} \leq Pr \leq 5 \cdot 10^{-2}$), l'equazione di Dittus-Boelter non è corretta. Sempre nelle condizioni di moto turbolento sviluppato ($L/D \geq 10$) in tubi lisci circolari si può applicare per superfici con flusso termico costante, la correlazione di Skupinski et al. [11, p.394]:

$$Nu = 4,82 + 0,0185 (Re Pr)^{0,827}, \quad (1.85)$$

valida per

$$3,6 \cdot 10^3 < Re < 9,05 \cdot 10^5$$

$$10^2 < Re Pr < 10^4$$

Se la superficie è a temperatura costante va preferita la correlazione di Seban e Shimazaki, valida per $Re Pr > 100$:

$$Nu = 5,0 + 0,025 (Re Pr)^{0,8}. \quad (1.86)$$

Se i tubi non sono circolari si possono ancora applicare le correlazioni sopracitate, con l'avvertenza di sostituire al parametro D (diametro) il **diametro idraulico** equivalente D_e :

$$D_e = 4A/\omega$$

Nel caso di assetti di moto diversi (per esempio moto esterno del fluido rispetto ad un banco di tubi, come in Fig.1.11), si applicano ancora correlazioni del tipo:

$$Nu = k Re^\alpha Pr^\beta, \quad (1.87)$$

con k , α e β costanti opportune.

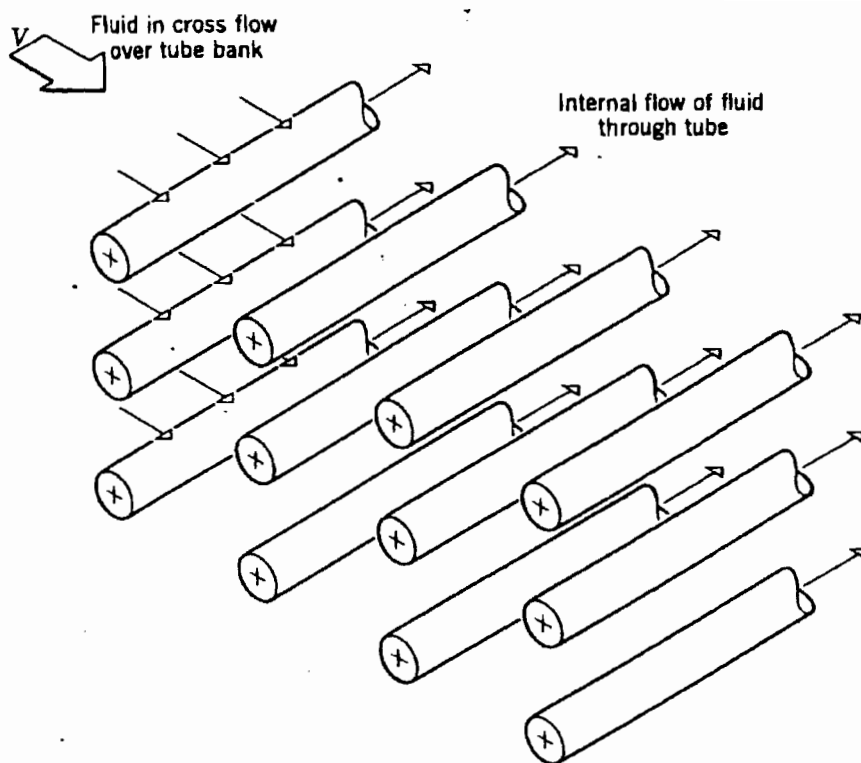


Fig. 1.11 Moto esterno rispetto a un fascio tubiero

Va anche osservato che le correlazioni (1.84)-(1.87) si basano su valori (Nu , Re , Pr) calcolati con le proprietà del nocciolo; per tale ragione esse si applicano correttamente quando i differenziali di temperatura tra la parete e il fluido ($T_p - T$) sono moderati.

In caso contrario, nelle correlazioni occorre introdurre "correzioni" che tengano conto anche della temperatura T_p della superficie che scambia con il fluido [11].

Infine, sottolineiamo che le correlazioni qui introdotte sono tutte relative a situazioni di **convezione forzata**, dove cioè esiste una causa esterna che produce il moto (ad esempio una pompa o un ventilatore). In tali condizioni si hanno velocità relativamente elevate e assetti di moto facilmente individuabili in quanto determinati da una specifica azione esterna "di controllo".

Si ha una trasmissione del calore anche in regime di **convezione naturale**, dove cioè il moto non è dovuto ad una forzante esterna, ma allo stesso campo gravitazionale, dove agiscono forze in grado di far spostare una massa di fluido in conseguenza delle eventuali differenze di densità (si pensi per esempio al moto dell'aria in una stanza nelle vicinanze di un termosifone).

Qui le velocità sono decisamente minori (e quindi i coefficienti di scambio termico più ridotti) ma, ciò che è più sostanziale per la costruzione di modelli, esiste una assai maggior difficoltà a valutare il campo di moto e, quindi, le condizioni di scambio. La determinazione delle correnti di moto è connessa strettamente agli stessi gradienti termici e dipende pesantemente dalle specifiche condizioni geometriche e di contatto. Per tali ragioni non ha molto senso associare queste situazioni all'efflusso monodimensionale turbolento,

cui si limita la validità di questo paragrafo. Fortunatamente nei processi industriali le situazioni di convezione naturale non sono molto frequenti: ove lo siano occorre riferirsi allo specifico assetto di moto e alla vasta letteratura "sperimentale" sull'argomento [11].

1.5.3 Efflusso bifase

Trattando dello scambio termico in un efflusso bifase si potrebbe, in generale, considerare due condizioni di funzionamento duali: l'ebollizione e la condensazione. È tuttavia abbastanza arduo (o persino arbitrario) descrivere i fenomeni di condensazione con modelli di efflusso bifase monodimensionale; questo, unito al fatto che nell'ambito di questo testo si utilizzerà sempre il "modello di efflusso bifase" per descrivere fenomeni di ebollizione, induce a restringere la trattazione al caso di ebollizione in regime di convezione forzata.

Il tipico assetto cui si riferisce è dunque quello di Fig. 1.12, dove sono evidenziati i vari regimi di flusso che si instaurano, usualmente, quando un fluido percorre un tubo diabatico, entrando nelle condizioni di liquido ed uscendo, eventualmente, nelle condizioni di vapore surriscaldato. È possibile così mettere in evidenza che, in un processo di riscaldamento del fluido (necessario per avere ebollizione), si determinano regimi di moto sostanzialmente diversi all'aumentare del titolo di vapore, ossia del rapporto tra portata di vapore e portata di liquido.

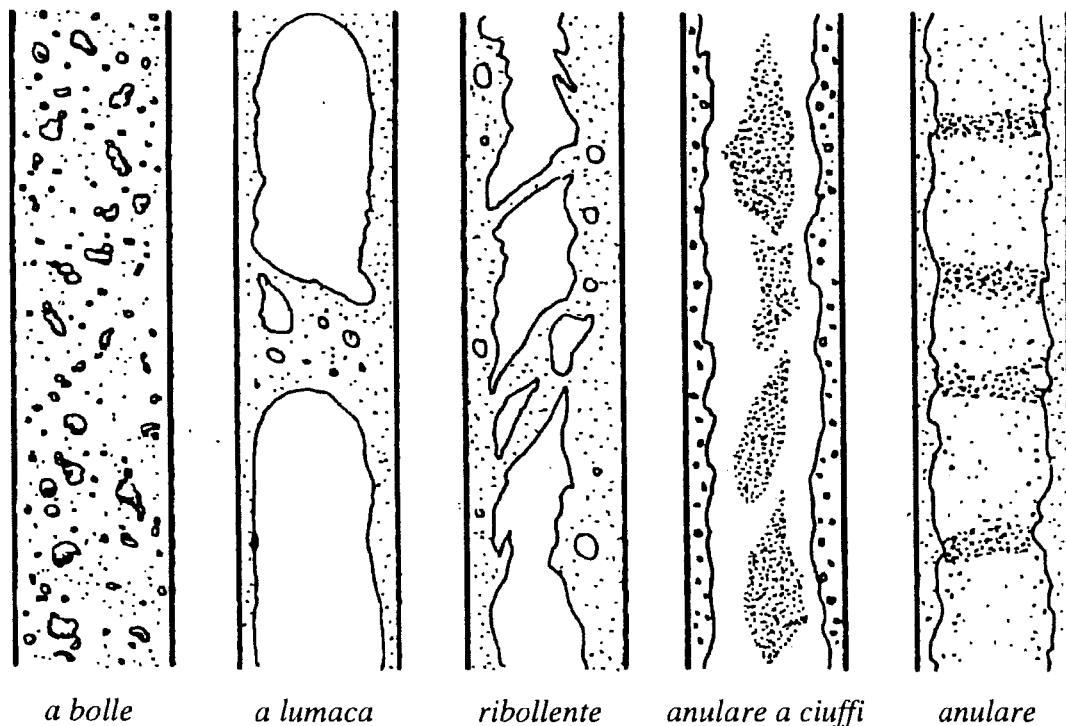


Fig. 1.12 Regimi di flusso per ebollizione in regime di convezione forzata all'interno di un tubo.

All'inizio del tubo il fluido è nello stato di liquido e, dunque, scambierà in regime di convezione forzata monofase, alla quale si potrà ancora applicare una delle correlazioni

presentate nel par. 1.5.2. Non appena la temperatura interna T_p della parete del tubo supera la temperatura di saturazione T_S (corrispondente alla pressione locale) del fluido, comincia a determinarsi ebollizione, tipicamente con la formazione di bolle che si staccano dalla parete (dove avviene la transizione di fase) per essere trascinate nel flusso liquido che caratterizza il nocciolo. In questa particolare situazione, almeno nella zona in cui T_p è ancora di poco superiore a T_S , posso avere ancora il nocciolo in condizioni di liquido sottoraffreddato (si parlerà allora di zona di **ebollizione sottoraffreddata**, non esplicitamente evidenziata in figura), per cui si potrebbe determinare anche la ricondensazione delle bolle una volta catturate dal nocciolo. Rimane comunque attivo un efficiente meccanismo di trasferimento di calore "veicolato" della formazione di bolle sulla parete con la corrispondente cessione al fluido del calore latente di evaporazione.

Non appena il titolo di vapore (nel nocciolo) diventa maggiore di zero, pur continuando lo stesso meccanismo, il nocciolo risulta interessato dal trasporto di bolle "disperse" nella massa liquida, determinando un certo grado di vuoto α (α = area occupata dal vapore/area totale). L'aumento del titolo e, conseguentemente, del grado di vuoto è anche associato, almeno a regime permanente, ad un incremento della velocità del fluido, che, a sua volta, determina un miglioramento delle condizioni di scambio (più rapida rimozione delle bolle che si formano sulla parete), cioè del coefficiente di scambio. La disposizione e la forma dei volumi occupati dal vapore cambia sostanzialmente quando il titolo cresce ulteriormente a causa di un fenomeno di raggruppamento delle bolle in "slug" che possono occupare anche frazioni della sezione di efflusso.

Quando la percentuale di liquido si riduce ulteriormente, praticamente tutto il nocciolo viene occupato dal vapore, mentre la parete continua ad essere "bagnata" dal liquido che, ora, assume l'assetto di un film, che costituisce così un "anello" che circonda il nocciolo di vapore.

In tutti i regimi finora considerati il meccanismo di trasferimento di calore è sempre lo stesso: si ha vaporizzazione di masse elementari sulla parete e, promossa dal moto, si ha la rimozione di tali volumi verso il nocciolo, mentre una nuova massa elementare di liquido ritorna a contatto con la parete, "bagnandola". Poichè all'aumentare progressivo del titolo aumenta la velocità di trasporto del nocciolo, diventa sempre più efficiente il meccanismo di rimozione/ricambio del fluido che vaporizza sulla parete, determinando così un progressivo incremento del coefficiente di scambio termico (come qualitativamente illustrato in figura). Accanto al meccanismo tipico dell'ebollizione continua ad accompagnarsi anche un meccanismo di trasferimento di calore tipico della convezione monofase, meccanismo che risulta dominato (e mascherato) da quello dell'ebollizione fino a che quest'ultimo riesce a mantenersi.

Pur essendo moltissime le correlazioni empiriche proposte per descrivere lo scambio termico nei vari regimi di efflusso bifase, si può assumere, almeno in linea di principio, che, fino alla zona di transizione esclusa, il coefficiente di scambio termico γ_{fp} possa esprimersi nella forma:

$$\gamma_{fp} = \gamma_{fp}^c + \gamma_{fp}^B \quad , \quad (1.88)$$

dove γ_{fp}^c è la componente convettiva (ancora calcolabile con correlazioni tipo la 1.87) e γ_{fp}^B è la componente di ebollizione, calcolabile con correlazioni specifiche.

Va sottolineato che comunque, prima della zona di transizione, il coefficiente di trasmissione del calore risulta sempre notevolmente elevato, essendo sempre maggiore di quello del flusso monofase liquido e potendo risultare maggiore di questo anche per più di un ordine di grandezza. Nell'efflusso bifase in regime di ebollizione sviluppata valori di γ_{fp} dell'ordine di 10^5 W/m²°C non sono da ritenere eccezionali, a fronte di valori generalmente non superiori a 10^4 per la convezione allo stato di liquido.

Nella parte finale del tubo, ammesso che il processo realizzi la completa vaporizzazione, ad un certo punto la quantità del liquido comincia a diventare insufficiente per bagnare l'intera superficie della parete; cominciano a formarsi delle zone "asciutte", fino a che l'intera parete non risulta completamente "secca", cioè interamente lambita dal vapore, mentre il liquido residuo rimane disperso nel nocciolo in forma di minuscole gocce. Si determinano, così, prima una **zona di transizione** in cui il coefficiente di scambio cade rapidamente (per l'annullarsi della componente γ_{fp}^B) a valori tipici della convezione forzata monofase gassosa, situazione che si mantiene in tutta la zona di **moto disperso** dove il coefficiente γ_{fp}^c aumenta, seppur in modo limitato, a causa dell'incremento di velocità associata all'aumento del titolo.

Questa zona, caratterizzata proprio da un regime convettivo, si raccorda poi con la zona di convezione forzata in fase di vapore surriscaldato che si verifica quando, essendo ormai il titolo pari ad uno, il fluido diventa vapore surriscaldato.

Si noti che la riduzione di coefficiente di scambio associata alla zona di transizione costituisce un vero e proprio "crollo" in quanto nella zona di moto disperso si hanno valori di γ_{fp} dell'ordine di qualche migliaio.

Mentre si rimanda alla letteratura specializzata per un quadro ragionato delle correlazioni di scambio termico applicabili all'efflusso bifase (si veda ad esempio [8]), val la pena sottolineare che il crollo del coefficiente di scambio termico associato alla zona di transizione è un fenomeno di rilevanza nei processi industriali interessati dall'ebollizione bifase, in quanto è evidente che, a parità di flusso incidente nella parete, la riduzione del coefficiente stesso determina un corrispondente incremento della temperatura di parete dato che la temperatura del fluido è, comunque, quella di saturazione. È quindi necessario evitare, per non danneggiare il materiale che costituisce la parete, che la transizione avvenga in zona indesiderata, cioè interessata da alto flusso.

Da questo punto di vista va anche osservato [8] che il crollo del coefficiente di scambio per "asciugatura" del tubo può avvenire anche a valori di titolo decisamente bassi (ad esempio $0,2 \div 0,3$ o anche meno) se il flusso termico incidente è sufficientemente elevato: si parla in questi casi, allora, di "crisi termica" o "burn-out", in quanto, più che da una reale deficienza di liquido, il mancato bagnamento della parete è dovuto alla troppo intensa produzione di vapore sulla parete, che provoca la repulsione del liquido. Il fenomeno della

crisi termica è generalmente evitato con opportune scelte di progetto del processo e va, in ogni caso evitato (con il controllo) durante il funzionamento dello stesso.

1.6 EQUAZIONI DI BILANCIO SU VOLUME FINITO

1.6.1 Generalità

Esistono molte situazioni fisiche in cui il fluido di lavoro non è confinato in un volume con sviluppo essenzialmente tubiforme: si tratta allora di considerare l'applicazione di principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia ad un volume di controllo generico (cioè di forma ed estensione qualsiasi), sempre nell'ipotesi che il volume sia, in generale, aperto e diabatico.

Si prenderà quindi in considerazione il caso della Fig. 1.12, dove supporremo che, in generale, esistano n immissioni di fluido (portate entranti w_{i1}, \dots, w_{in}) ed m estrazioni di fluido (portate uscenti w_{u1}, \dots, w_{um}). Il volume V e la superficie S che lo confina potranno essere anche variabili nel tempo, ad esempio per rappresentare la deformazione della superficie di confine sotto le forze di pressione o lo spostamento di un confine non materiale nel tempo.

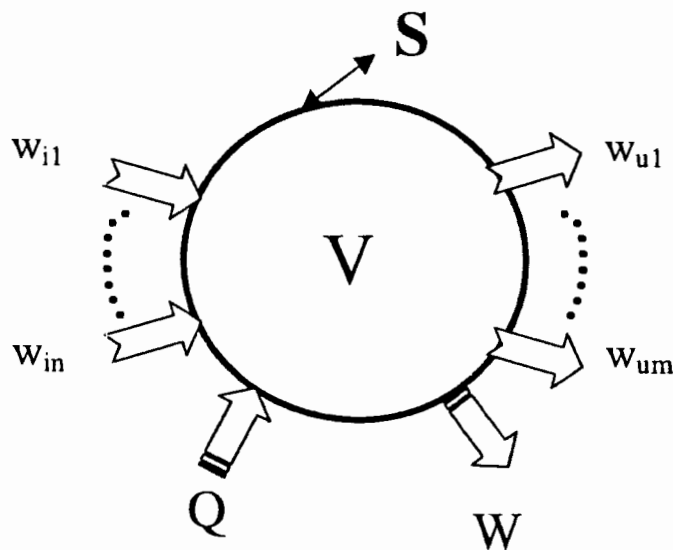


Fig. 1.12 Volume di controllo aperto diabatico

Analogamente a quanto fatto nel caso monodimensionale, si può formulare ogni principio di conservazione in modo unitario, come segue.

Si indichi con ψ la generica quantità contenuta nel volume V , ossia, a seconda del caso, la massa totale M o l'energia totale E o la quantità di moto totale \vec{P} . Si formulerà allora il principio di conservazione a parametri concentrati relativo al volume di controllo V **aperto** e, in generale, **diabatico** nel seguente modo:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} - \sum_{j=1}^m \phi_{uj} + \phi_s + F_v \quad , \quad (1.89)$$

dove ϕ_{ij} è il flusso (nell'unità di tempo) della grandezza considerata (M , E o \vec{P}) che entra nel volume V con l'immissione w_{ij} di fluido, ϕ_s è l'analogo flusso che transita attraverso la superficie di confine S ed F_v è la somma dei termini "sorgente".

Si noti che la superficie S può essere anche complessa ed articolata e può comprendere anche parti in movimento (as esempio le pale di una girante a contatto con il fluido).

1.6.2 Formulazione delle equazioni

Se particularizziamo l'equazione (1.89) al caso della massa, otteniamo l'equazione di conservazione della massa a parametri concentrati, osserviamo che:

$$\psi = M = \iiint_V \rho dV \quad ,$$

dove ρ è la densità locale del fluido;

$$\phi_{ij} = w_{ij} \quad , \quad \phi_{uj} = w_{uj} \quad ;$$

$$\phi_s = 0 \quad ,$$

in quanto supporremo che la superficie S non sia attraversata da massa;

$$F_v = 0 \quad ,$$

in quanto non si può avere generazione o perdita di massa nel volume.

L'equazione della massa è dunque semplicemente:

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} - \sum_{j=1}^m w_{uj} \quad . \quad (1.90)$$

Consideriamo ora la quantità di moto. Si avrà:

$$\psi = \vec{P} = \iiint_V \rho \vec{u} dV$$

dove \vec{u} è la velocità locale del fluido;

$$\phi_{ij} = w_{ij} \vec{u}_{ij} \quad , \quad \phi_{uj} = w_{uj} \vec{u}_{uj} \quad ,$$

dove \vec{u}_{ij} e \vec{u}_{uj} sono le velocità del fluido in corrispondenza della immissione j -esima e della estrazione j -esima rispettivamente;

$$\phi_s = 0 \quad ,$$

in quanto non vi è transito di massa e, quindi, di quantità di moto attraverso S ;

$$F_v = \vec{R}_i + \vec{R}_u + \vec{R}_{N,S} + \vec{R}_{T,S} + \vec{R}_M \quad ,$$

dove \vec{R}_i è la risultante delle forze agenti sul fluido attraverso i condotti di immissione, \vec{R}_u la risultante delle analoghe forze agenti sui condotti di estrazione, $\vec{R}_{N,S}$ è la risultante delle forze **Normali** che agiscono dall'esterno sulla superficie S , $\vec{R}_{T,S}$ è la risultante delle forze tangenziali che agiscono su S , \vec{R}_M è la risultante delle forze di massa.

Risulta quindi:

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} A_{ij} \text{vers}(\vec{u}_{ij}) \quad ,$$

$$\vec{R}_u = \sum_{j=1}^m p_{uj} A_{uj} \text{vers}(\vec{u}_{uj}) \quad ,$$

$$\vec{R}_M = M\vec{g} \quad ,$$

dove p_{ij} e p_{uj} sono, rispettivamente, le pressioni agenti sulla j -esima sezione di immissione e sulla j -esima sezione di estrazione, le cui aree sono, rispettivamente, A_{ij} ed A_{uj} , il simbolo $\text{vers}(\vec{v})$ indica il versore del generico vettore \vec{v} . Le sezioni A_{ij} e A_{uj} sono assunte sul piano normale alle velocità \vec{u}_{ij} ed \vec{u}_{uj} , rispettivamente.

Riguardo alle risultanti $\vec{R}_{N,S}$ ed $\vec{R}_{T,S}$ possiamo solo dire che esse saranno dovute, la prima alle forze di pressione che la superficie S esercita sul fluido, la seconda alle forze di attrito sulla stessa superficie:

$$\vec{R}_{N,S} = \iint_S p \vec{n} dS \quad ,$$

$$\vec{R}_{T,S} = \iint_S \vec{\tau}_A dS \quad ,$$

dove p è la pressione locale (sull'elemento di superficie), \vec{n} è il versore della normale ad S nel punto, $\vec{\tau}_A$ è lo sforzo tangenziale dovuto all'attrito. Ogni ulteriore specificazione di tali forze, in particolare di $\vec{\tau}_A$, può essere effettuata solo con riferimento al caso specifico considerato.

L'equazione della quantità di moto si scriverà dunque:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} = & \sum_{j=1}^n w_{ij} \vec{u}_{ij} - \sum_{j=1}^m w_{uj} \vec{u}_{uj} + \sum_{j=1}^n p_{ij} A_{ij} \text{vers}(\vec{u}_{ij}) - \sum_{j=1}^m p_{uj} A_{uj} \text{vers}(\vec{u}_{uj}) + \\ & + M\vec{g} + \iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau}_A dS \quad . \end{aligned} \quad (1.91)$$

Se si considera, infine, il caso dell'energia, si avrà:

$$\psi = E = \iiint_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} + gz \right) dV \quad ,$$

dove e è l'energia interna specifica, u il modulo della velocità e z la quota (relative all'elementino di volume);

$$\phi_{ij} = w_{ij} \left(e_{ij} + \frac{u_{ij}^2}{2} + gz_{ij} \right) + p_{ij} A_{ij} u_{ij} \quad ,$$

dove e_{ij} , u_{ij} , e z_{ij} sono l'energia interna specifica, il modulo della velocità e la quota dell'immissione j -esima,

$$\phi_{uj} = w_{uj} \left(e_{uj} + \frac{u_{uj}^2}{2} + gz_{uj} \right) + p_{uj} A_{uj} u_{uj} \quad ,$$

dove e_{uj} , u_{uj} , e z_{uj} , hanno, per le estrazioni, significato analogo a quello di e_{ij} , u_{ij} , z_{ij} ;

$$\phi_s = -W_s + Q_s \quad ,$$

W_s è la potenza meccanica totale (lavoro nell'unità di tempo) trasferita attraverso la superficie S , positiva se uscente, mentre Q_s è la potenza termica totale (calore nell'unità di tempo) trasferito attraverso la superficie S , positiva se entrante;

$$F_V = G_V \quad ,$$

dove G_V rappresenta la potenza generata all'interno del volume V (per esempio per reazione chimica, positiva se esoterma).

Si noti che i termini $(p_{ij} A_{ij} u_{ij})$ e $(p_{uj} A_{uj} u_{uj})$ rappresentano le potenze (meccaniche) trasferite attraverso le superfici A_{ij} ed A_{uj} a causa del lavoro fatto dalle forze di pressione (le forze di pressione, normali alle superfici A_{ij} ed A_{uj} , sono dirette come le corrispondenti velocità u_{ij} o u_{uj} , con verso opposto nel secondo caso, per cui il prodotto scalare è il semplice prodotto dei moduli con il segno opportuno).

In ϕ_{ij} ed ϕ_{uj} , si sono trascurate le potenze termiche trasferite per diffusione attraverso le superfici A_{ij} ed A_{uj} data la loro esiguità.

Inoltre spesso il termine G_V risulta nullo: quando non sono presenti meccanismi fisici di generazione di energia all'interno della massa fluida.

L'equazione dell'energia si scriverà dunque:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left(h_{ij} + \frac{u_{ij}^2}{2} + gz_{ij} \right) - \sum_{j=1}^m w_{uj} \left(h_{uj} + \frac{u_{uj}^2}{2} + gz_{uj} \right) + Q_s - W_s + G_V \quad (1.92)$$

dove h_{ij} ed h_{uj} sono le entalpie della j -esima immissione e della j -esima estrazione, rispettivamente ($h = e + p/\rho$), e conglobano quindi il termine di immissione di energia, "trasportata" dalla massa di fluido, con il lavoro delle forze di pressione all'imbocco o allo sbocco.

1.6.3 Osservazioni sull'applicazione delle equazioni a parametri concentrati

Va innanzitutto osservato che, nonostante la loro apparente semplicità, le equazioni di conservazione a parametri concentrati sono del tutto **generali**, in quanto la loro formulazione non è soggetta ad alcuna ipotesi fisica di tipo restrittivo, come è invece il caso delle equazioni **monodimensionali**. Questa osservazione potrebbe indurre alla (erronea) conclusione che non vi è alcuna ragione di utilizzare equazioni più complicate (alle derivate parziali) quando, comunque, si possono applicare equazioni più semplici e più generali.

In realtà nell'applicazione della formulazione monodimensionale, e data la particolare situazione fisica trattata, è implicitamente assicurato il "pareggio" tra equazioni ed incognite: tre equazioni scalari alle derivate parziali in (x,t) e tre incognite costituite da funzioni definite sul piano (x,t) , quali, ad esempio, $p(x,t)$, $h(x,t)$ e $w(x,t)$. Quando invece si applichino le equazioni di bilancio globale (a parametri concentrati) si formula un sistema di equazioni che non fornisce, generalmente, **un modello chiuso**, in quanto non è, in generale, sufficiente a determinare le tre incognite M , E e \vec{P} , in quanto diverse altre grandezze che compaiono nelle equazioni non possono essere assunte né note (cioè variabili esogene) né direttamente calcolabili in funzione di M , E e \vec{P} . Per esempio, nella (1.91) compaiono sia le portate w_{ij} sia le pressioni p_{ij} : le condizioni al contorno sull'immissione j forniranno in generale solo una relazione tra le due variabili w_{ij} e p_{ij} , l'altra dovrà essere fornita dalle equazioni relative al volume V . In altri termini, se si impone la portata all'immissione j non si può, fisicamente, imporre anche la pressione e viceversa. Il modello quindi, per essere chiuso, dovrà essere in grado di calcolare non solo le quantità globali M , E e \vec{P} , ma anche appropriate quantità locali, se non altro per determinare completamente le condizioni di interfaccia con il "mondo esterno".

Come si può procedere allora?

Sul piano concettuale la soluzione è ovvia: perchè le equazioni formulate in termini di quantità globali possano essere utilizzate per calcolare anche le necessarie proprietà locali, occorre che la distribuzione spaziale delle proprietà termodinamiche sia **banalizzabile a priori**, cioè si possa assumere una distribuzione spaziale nota a priori, eventualmente di tipo semplice, ricavandola da considerazioni di tipo fisico-empirico sul processo in esame.

Un esempio semplice può servire a concretizzare il concetto.

Se il fluido può essere supposto "ben miscelato" all'interno del volume V , la temperatura potrà essere assunta uguale in tutti i punti e, quindi, si potrà sostituire ad una quantità integrale (per esempio E) una quantità intensiva (la temperatura T) senza incrementare il numero delle incognite.

Si può quindi concludere che, pur essendo assolutamente generali, le equazioni di conservazione a parametri concentrati si possono applicare con successo (cioè pervenendo ad un modello chiuso) solo quando si possano introdurre, a priori, ipotesi di uniformità delle proprietà intensive all'interno del volume V o, comunque, ipotesi che consentano di assegnare la distribuzione spaziale delle proprietà intensive stesse, in modo da ricondurre il problema ad avere come incognite tre sole quantità scalari

unicamente dipendenti dal tempo (e quindi determinabili con tre sole equazioni differenziali ordinarie nella variabile indipendente "tempo").

Nella formulazione delle equazioni (1.90)-(1.92) non si è introdotta alcuna ipotesi limitativa sulle possibili deformazioni del volume V , cioè sulla variabilità nel tempo della superficie S . Nel caso in cui la superficie S fosse perfettamente fissa, allora nell'equazione (1.92) il termine W_S sarebbe certamente nullo in quanto, per consentire il trasferimento di potenza meccanica attraverso S è necessario che su S siano applicate delle forze il cui punto di applicazione sia dotato di velocità non nulla. Ovviamente, invece, i termini dell'equazione (1.91) che esprimono le risultanti delle forze su S in detta equazione potranno essere non nulli anche se la superficie fosse fissa.

Le componenti di forze dovute alle forze d'attrito, cioè lo sforzo tangenziale $\bar{\tau}_A$ nell'equazione (1.91), saranno significative solo in presenza di una consistente velocità relativa tra il fluido e la superficie S in corrispondenza dei punti di contatto. Ne segue che le forze di attrito risulteranno trascurabili tutte le volte che il fluido sia dotato di basse velocità (relativamente alla superficie S).

Da quanto detto si può concludere che l'applicazione delle equazioni a parametri concentrati deve essere subordinata ad una analisi preliminare sulla plausibilità di opportune ipotesi di uniformità delle proprietà nel volume di controllo scelto per l'applicazione stessa, eventualmente frazionando il volume di fluido complessivo in "sottovolumi".

Appendice 1: ALCUNE RIFORMULAZIONI DELLE EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE

Equazione "dell'energia meccanica"

Si moltiplichino tutti i termini dell'equazione (1.10) per la velocità del fluido u e si applichi la regola di derivazione del prodotto ai primi due termini; si ottiene:

$$\rho A u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho A u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \left(\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u}{\partial x} \right) + u A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 + \rho A g u \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

in cui il terzo termine è nullo grazie all'equazione della massa (1.3). Tenendo poi conto che $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ per ipotesi, l'equazione (A.1.1) può essere riscritta come:

$$\rho A \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} + gz \right)}{\partial t} + w \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} + gz \right)}{\partial x} + A u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 = 0$$

Applicando di nuovo l'equazione della massa, si possono, nei primi due termini, portare **contemporaneamente** sotto il segno di derivata i fattori ρA e w , rispettivamente, arrivando a:

$$\frac{\partial \left[\rho A \left(\frac{u^2}{2} + gz \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[w \left(\frac{u^2}{2} + gz \right) \right]}{\partial x} + A u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

L'equazione (A.1.2) ha una forma di tipo "energetico", pur non essendo altro che una rielaborazione dell'equazione della quantità di moto.

Tuttavia, sia formalmente che sostanzialmente, non si tratta di un principio di conservazione dell'energia meccanica: di fatto il termine $A u \frac{\partial p}{\partial x}$ non equivale esattamente al lavoro fatto dalle forze di pressione e l'ultimo termine occorrerebbe interpretarlo come lavoro fatto dalle forze di attrito, anche se il punto di applicazione reale delle forze esterne ha velocità nulla. (Si potrebbe interpretare come lavoro interno, eseguito dallo strato limite sul nocciolo della corrente fluida).

Equazione dell'energia in forma entropica

Sottraendo la (A.1.2) dalla (1.17) ed esprimendo l'energia interna come $e = h-p/\rho$, si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho Ah)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Auh)}{\partial x} - \frac{\partial Ap}{\partial t} - uA \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 = \omega \psi_S + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{A.1.3})$$

Se si trascura (come discusso nel paragrafo 1.3.6) il termine di diffusione e, in accordo alle ipotesi con cui è stata ricavata la (1.17), si trascurano gli effetti energetici dovuti alla eventuale deformazione di A (cioè si pone $\rho \frac{\partial A}{\partial t} \equiv 0$), l'equazione (A.1.3) può essere riformulata come:

$$\rho A \frac{\partial h}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial x} - \rho A \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - w \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 + \omega \psi_S \quad (\text{A.1.4})$$

dove si è utilizzata l'equazione (1.3) della massa per portare **contemporaneamente** fuori dal segno di derivata il fattore ρA e w nel primo e nel secondo termine, rispettivamente.

Tenendo conto che, per un sistema termodinamico ad un componente [13], vale la relazione (**equazione di Gibbs**):

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp \quad , \quad (\text{A.1.5})$$

l'equazione (A.1.4) diventa:

$$\rho A T \frac{\partial S}{\partial t} + w T \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{C_f}{2} \rho \omega |u| u^2 + \omega \psi_S \quad (\text{A.1.6})$$

che costituisce l'equazione dell'energia in forma entropica. Tale forma dell'equazione dell'energia presenta il vantaggio di contenere in forma differenziata solo la variabile entropia: si presta quindi a realizzare soluzioni disaccoppiate o quasi disaccoppiate delle tre equazioni fondamentali della termoidraulica, cioè la (1.3), la (1.10) e la (1.17) sostituita appunto dalla (A.1.6).

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Citrini, G. Nosedà, *IDRAULICA*, Casa Ed. Ambrosiana, Milano, II ediz., 1987.
- [2] E. Pedrocchi, M. Silvestri, *Introduzione ai fenomeni di trasporto*, CLUP, Milano, 1980.
- [3] E. Pedrocchi, M. Silvestri, *Introduzione ai fenomeni di trasporto*, CLUP, Milano, 1980
- [4] R. Perry, D. Green, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, McGraw Hill, 6-th edit., 1984.
- [5] E. Pedrocchi, M. Silvestri, *Introduzione ai fenomeni di trasporto*, CLUP, Milano, 1980
- [6] D. Annaratone, *Generatori di vapore*, vol.1, CLUP, Milano, 1985.
- [7] G. Prouse, *Equazioni differenziali alle derivate parziali*, Masson, 1990.
- [8] J. C. Collier, *Convective boiling and condensation*, McGraw Hill, sec. edit., 1981.
- [9] S. G. Bankoff, *A variable density single-fluid model for two-phase flow with particular reference to steam-water flow*, Journal of Heat Transfer, 82, 1960.
- [10] A. B. Jones, D. T. Dight, *Hydrodynamic stability of a boiling channel*, KAPL-2208, Knolls Atomic Power Laboratory, 1962.
- [11] F. P. Incropera , D. P. De Witt, *Fundamentals of heat and mass transfer*, John Wiley & Sons, , sec. edit., 1985.
- [12] D. Annaratone, *Generatori di vapore*, vol.2, CLUP, Milano, 1985.
- [13] E. Pedrocchi, M. Silvestri, *Introduzione alla termodinamica tecnica*, CLUP, Milano, sesta ed., 1987.