

# PROCESSI IDRAULICI

①

## - IPOTESI SEMPLIFICATIVE

- Fluido incompressibile
- Fluido non troppo viscoso ( $\rightarrow$  moto turbolento)
- Fenomeni termici trascurabili

## - COMPONENTI "CORTI"

- Diversi componenti dei circuiti idraulici hanno un volume molto piccolo, che viene ricambiato dalle portate tipiche del circuito in tempi inferiori a 0.1 s.
  - Ci si può quindi aspettare che le corrispondenti dinamiche non siano rilevanti ai fini del controllo.
  - Scriveremo quindi delle equazioni di bilancio statiche ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )
  - Date le ridotte dimensioni dei componenti, l'effetto della gravità nelle equazioni della q.d.m. potrà essere trascurato
- ## - EQUAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$w(x,t) = w(t) \quad \text{uniforme}$$

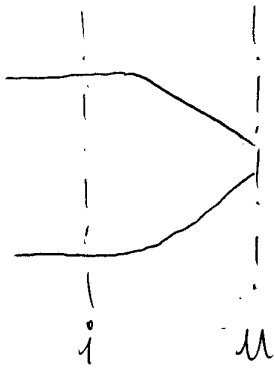
$$\rho A(x) \cdot u(x,t) = w(t) \Rightarrow u(x,t) = \frac{w(t)}{\rho A(x)}$$

(velocità inversamente proporzionale alla sezione)

# PROCESSI IDRAULICI

2/1

- UGELLO



- E' un condotto convergente con un forte restringimento di sezione

- Trascuriamo l'altito distribuito ed i termini dinamici (componente "corto")

Eq. massa  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad w(x,t) = w(t)$

Eq. qdm  $\frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} = 0$  ( $\rho A u = w(t)$  non dipende da  $x$ )

$$\rho A u \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \frac{dz}{dx} = 0 \quad (\rho = \text{cost})$$

$$\frac{\partial u^2/2}{\partial x} + \frac{\partial P/\rho}{\partial x} + \frac{\partial g z}{\partial x} = 0$$

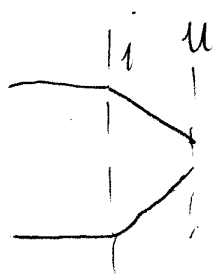
→ Th. di Bernoulli: in un fluido incomprimibile, in assenza di attriti,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = \text{cost}$$

# PROCESSI IDRAULICI

(2/2)

- UGELLO



- con riferimento alle sezioni d'ingresso e di uscita (ugello orizzontale)

$$\frac{P_i}{\rho} + \frac{u_i^2}{2} + g z_i = \frac{P_u}{\rho} + \frac{u_u^2}{2} + g z_u$$

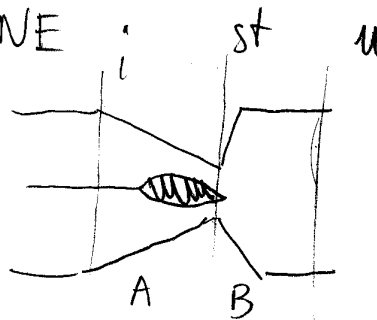
$$\frac{P_i - P_u}{\rho} = \frac{u_u^2}{2} - \frac{u_i^2}{2} \approx \frac{u_u^2}{2} \quad \text{se } \underline{A_u \ll A_i}$$

$$u_u \approx \sqrt{\frac{2(P_i - P_u)}{\rho}}$$

$$W_u = A_u \sqrt{2\rho(P_i - P_u)}$$

- VALVOLA DI REGOLAZIONE

- Schema concettuale:



(A) : convergente "liscio"  
 abrupto trascurabile

$u \uparrow$   $P \downarrow$

sezione di strozzamento  $A_{st}$  modulabile

$$W = A_{st} \sqrt{2\rho(P_i - P_{st})}$$

(B) Divergente: flusso dissipativo (turbolenza)

# PROCESSI IDRAULICI

(3)

- Nel caso di dissipazione ideale  $P_{st} = P_u$

$$W = A_{st} \sqrt{2\rho (P_i - P_u)}$$

- In pratica si ha un certo recupero di pressione, che dipende dal grado di apertura della valvola

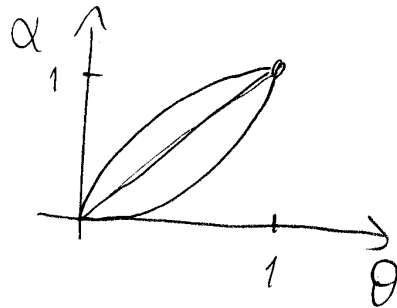
$$C_r = \sqrt{\frac{P_i - P_u}{P_i - P_{st}}} < 1$$

$$W = \frac{A_{st}}{C_r} \sqrt{2\rho (P_i - P_u)}$$

-  $A_{st}$  e  $C_r$  dipendono dall'apertura  $\theta$ ; si può raccogliere tutto nel coeff.  $K_v(\theta)$

$$\begin{aligned} W &= K_v(\theta) \sqrt{\rho (P_i - P_u)} \\ &= K_{vmax} \alpha(\theta) \sqrt{\rho (P_i - P_u)} \end{aligned}$$

$\alpha(\theta)$ : caratteristica intrinseca valvola

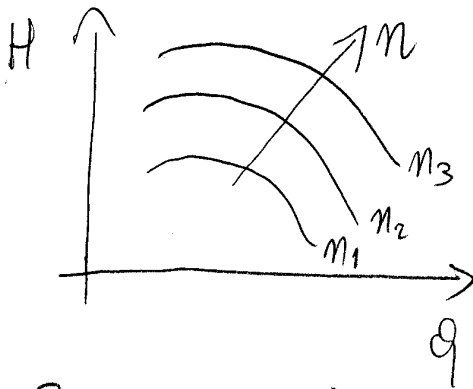


NB  $K_{vmax}$  è dimensionata dal progettista dell'impianto  
 $\alpha(\theta)$  interessa il controlista

- POMPE

- Descritte da famiglie di curve caratteristiche

- Pompe fluidodinamiche



$$\frac{P_u - P_i}{\rho g} = f\left(\frac{w}{\rho}, n\right)$$

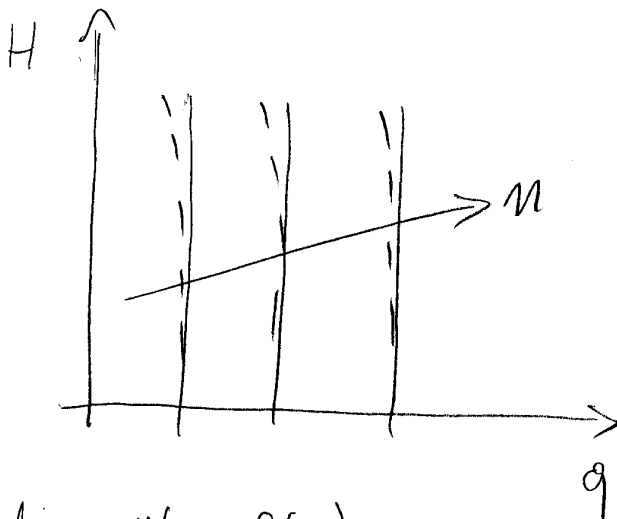
$$H = \frac{P_u - P_i}{\rho g} \text{ prevalenza}$$

$$q = \frac{w}{\rho} \text{ portata volumetrica}$$

$n$ : velocità rotazione (giri/sec)

- giri fissi: motore sincrono, regolazione tramite valvole
- giri variabili: azionamento a velocità variabile (+ efficiente) + costoso

- Pompe volumetriche



- ideale

- reale

ideali  $\frac{w}{\rho} = f(n)$

reali  $\frac{w}{\rho} = f\left(n, \frac{P_u - P_i}{\rho g}\right)$

- Azionamento della pompa

- se la pompa è collegata ad un motore sincrono o ad un azionamento controllato in velocità, si può assumere  $n$  come un ingresso esogeno
- altrimenti occorre includere un modello dell'azionamento e un modello della pompa "vista" dall'albero della girante questo viene detto seconda curva caratteristica, e può essere formulato come

$$C_r = f\left(\frac{\omega}{\rho}, n\right) \quad (\text{coppia resistente})$$

oppure

$$\eta = f\left(\frac{\omega}{\rho}, n\right) \quad (\text{rendimento})$$

dove  $\eta = \frac{W_{idraulica}}{W_{meccanica}} = \frac{q \cdot (P_u - P_i)}{C_r \cdot \omega}$   
↑ velocità angolare

- TURBINE

- Composte da uno statore e da una girante. L'energia di pressione del fluido viene convertita in energia cinetica, e quindi in energia meccanica. Si distinguono

- turbine ad azione: conversione pressione → velocità solo nello statore
- turbine a reazione: conversione pressione → velocità nello statore e sul rotore

# PROCESSI IDRAULICI

(6)

- Turbina Pelton : è una turbina ad azione; lo statore è costituito da uno (o più) ugelli



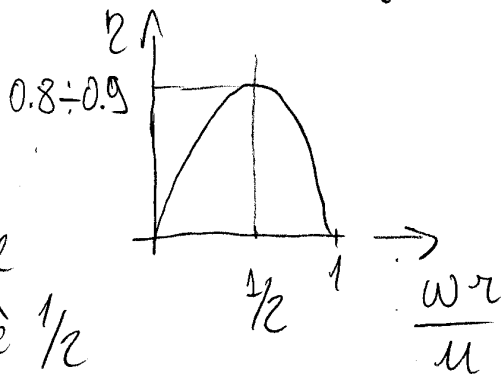
$$W = Au \sqrt{2\rho(P_i - P_{atm})}$$

$$u = \sqrt{\frac{2(P_i - P_{atm})}{\rho}}$$

$$W_{id} = W \frac{u^2}{2}$$

potenza meccanica del getto uscente

$$W_{turb} = \eta \cdot W_{id}$$



- Il rendimento max si ottiene quando la velocità delle pale è  $\frac{1}{2}$  della velocità del getto

- Quando la velocità delle pale raggiunge quella del getto (velocità di fuga), la potenza va a zero

# PROCESSI IDRAULICI

(7)

## - PERDITE DI CARICO CONCENTRATE

- In un circuito idraulico possono essere presenti dei componenti che causano una brusca variazione del campo di moto: imbocchi, sbocchi, variazioni rapide di diametro, orifizi, curve a gomito, etc.
- Assumiamo per semplicità che la portata sia positiva:  $w \geq 0$
- Se i diametri di ingresso e uscita sono uguali, la variazione di pressione è dovuta ai soli fenomeni dissipativi

$$P_i - P_u = K \cdot \rho \frac{u^2}{2} = K \cdot \frac{w^2}{2\rho A^2} = K_p \cdot w^2$$

- Se i diametri sono diversi, c'è anche l'effetto Bernoulli

$$\begin{aligned} P_i - P_u &= K \cdot \rho \frac{u_i^2}{2} + \rho \left( \frac{u_u^2}{2} - \frac{u_i^2}{2} \right) = \\ &= K \frac{w^2}{2\rho A_i^2} + \frac{w^2}{2\rho A_u^2} - \frac{w^2}{2\rho A_i^2} = K_p \cdot w^2 \end{aligned}$$

- Nel caso di inversione di portata, si noti che la perdita di pressione dovuta ad attrito cambia di segno, mentre il termine di Bernoulli no

$$P_i - P_u = K \cdot \rho \frac{u|u|}{2} + \rho \left( \frac{u_u^2}{2} - \frac{u_i^2}{2} \right)$$

in caso di componenti asimmetrici,  $K$  può avere diversi valori per portate positive e negative

- I valori di  $K$  si trovano tabulati sui manuali

# PROCESSI IDRAULICI

(8)

## - COMPONENTI "LUNGI" -

### - CONDOTTA

- Supponiamo  $A(x,t) = \text{costante}$  condotta cilindrica rigida

- Eq. massa  $\cancel{\frac{\partial \rho A}{\partial t}} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

$w(x,t) = w(t)$  portata uniforme

$u(x,t) = \frac{w(t)}{\rho A} = u(t)$  velocità uniforme

- Eq. qd m (lunghezza condotta  $L$ )

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} + \frac{c_l}{2} \rho w |u|/u = 0$$

$$\frac{dw}{dt} + A \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx} + \frac{c_l}{2} \rho w \frac{|w| w}{\rho^2 A^2} = 0$$

$$\int_0^L \frac{dw}{dt} dx + \int_0^L A \frac{\partial P}{\partial x} dx + \int_0^L \rho A g \frac{dz}{dx} dx + \int_0^L \frac{c_l}{2} w \frac{|w| w}{\rho A^2} dx$$

$$L \frac{dw}{dt} + A (P_u - P_i) + \rho A g (z_u - z_i) + \frac{c_l}{2} \frac{wL}{\rho A^2} |w| w = 0$$

$$\frac{L}{A} \frac{dw}{dt} + (P_u - P_i) + \rho g (z_u - z_i) + \frac{c_l}{2} \frac{wL}{\rho A^3} |w| w = 0$$

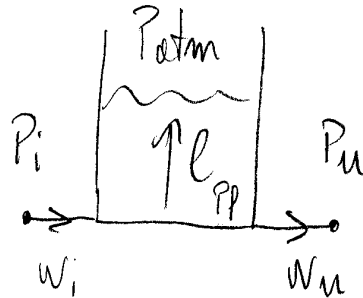
# PROCESSI IDRAULICI

(9)

- SERBATOIO A PELO LIBERO

-  $H_p$  • forma cilindrica verticale

• sbocchi e imbocchi alla base del serbatoio



- Equazione della massa

$$\frac{dV}{dt} = w_i - w_u$$

$$V = \rho A l$$

- Equazioni della quantità di moto

$$P_p - P_{atm} = \rho g l \quad (\text{direzione verticale - legge di Stevino})$$

$$P_i - P_p = K_{pi} w_i^2$$

$$P_p - P_u = K_{pu} w_u^2 \quad (\text{direzione orizzontale agli sbocchi e imbocchi})$$

- Equazione della massa riarrangiata

$$\rho A \frac{dl}{dt} = w_i - w_u ;$$

$$\frac{dP_p}{dt} = \rho g \frac{dl}{dt}$$

$$\boxed{\frac{A}{g} \frac{dP_p}{dt} = w_i - w_u}$$

- Spesso le perdite di carico dei componenti collegati al serbatoio sono  $\gg$  di quelle all'imbocco e allo sbocco; si assume

allora

$$P_i \approx P_p$$

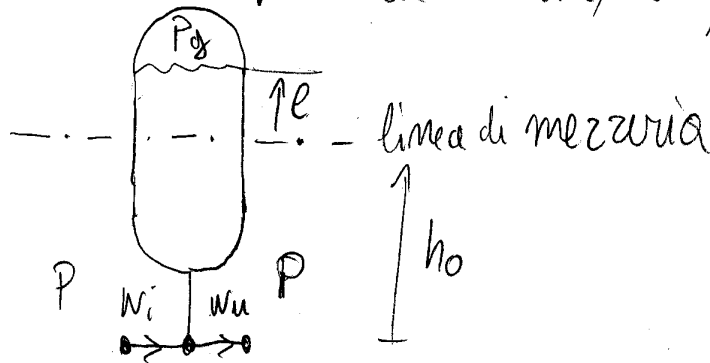
$$P_u \approx P_p$$

# PROCESSI IDRAULICI

(10)

## - SERBATOIO PRESSURIZZATO

- $H_p$ : forma cilindrica (dove varia il livello, sezione A)
  - no scambi di massa liquido - gas
  - il gas compie una trasformazione isoterma (valida per variazioni sufficientemente lente)
  - $V_0$ : volume al di sopra della mezzoria;  $V_1$ : al di sotto della mezzoria



## - Equazioni di conservazione

$$\frac{dM}{dt} = w_i - w_u$$

$$M = \rho (V_1 + Ae) \quad (\text{eq. massa})$$

$$P_g \cdot (V_0 - Ae) = \text{cost}$$

$$(\text{eq. stato gas})$$

$$P = P_g + \rho g (l + h_0)$$

$$(\text{eq. qdm verticale})$$

## - Equazioni per la simulazione

$$\begin{cases} \rho A \frac{de}{dt} = w_i - w_u \\ P_g = \frac{P_{g0} V_0}{V_0 - Ae} \\ P = P_g + \rho g (l + h_0) \end{cases}$$

$$\bullet 3 \text{ eq} + 2 \text{ cc} = 5 \text{ eq}$$

$$\bullet \text{ incognite } w_i, w_u, e, P, P_g$$

$$\bullet \text{ parametri } V_0, A, h_0, P_{g0}$$

$$\bullet \text{ var. di stato: } e$$

# PROCESSI IDRAULICI

(11)

- Le equazioni trovate prima sono di analisi non immediata  
 riformuliamo in modo alternativo, cercando di far comparire  
 P come variabile di stato ( $\rightarrow$  differenziamo alcune eq. algebriche)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = \rho A \frac{dl}{dt} \quad (\text{def. massa}) \\ \frac{dP_g}{dt} (V_0 - A l) - P_g A \frac{dl}{dt} = 0 \quad (\text{eq. stato gas}) \\ \frac{dP}{dt} = \frac{dP_g}{dt} + \rho g \frac{dl}{dt} \quad (\text{eq. Stevino}) \end{array} \right.$$

$\rightarrow$  si ricava  $\frac{dM}{dt} = \frac{\rho A}{\frac{A P_g}{V_0 - A l} + \rho g} \frac{dP}{dt}$

- Forma alternativa:

$$\frac{\rho A}{\frac{A P_g}{V_0 - A l} + \rho g} \frac{dP}{dt} = w_i - w_u$$

- comparire ancora il livello (che è incognito) - vedremo però che nelle eq. linearizzate basta il livello del punto di lavoro

# PROCESSI IDRAULICI

(12)

## - EQUAZIONI LINEARIZZATE

- Equazioni algebriche (prodotto di potenze)

$$V = A^p B^q$$

$$dV = p A^{p-1} B^q dA + q A^p B^{q-1} dB = V \left( p \frac{dA}{A} + q \frac{dB}{B} \right)$$

$$\Delta V = \bar{V} \left( p \frac{\Delta A}{\bar{A}} + q \frac{\Delta B}{\bar{B}} \right)$$

- Sistemi ODE espliciti

$\dot{x} = f(x, u)$  linearizzato attorno all'equilibrio  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u$$

- Sistemi ODE semi-espliciti

$A(x) \dot{x} = f(x, u)$  linearizzati attorno all'equilibrio

$$A(\bar{x}) \neq 0 \quad f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$\dot{x} = \frac{f(x, u)}{A(x)}$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{\frac{df}{dt} \cdot A(\bar{x}) + f(\bar{x}, \bar{u}) \frac{dA}{dt}}{A(\bar{x})}$$

$$A(\bar{x}) \Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} \Delta u$$

# PROCESSI IDRAULICI

(13)

## - MODELLI LINEARIZZATI - EQUIVALENTI ELETTRICI

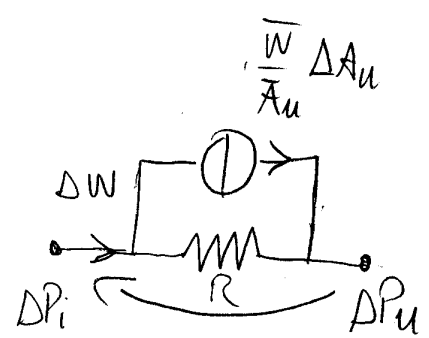
- Ai fini della analisi e della sintesi del sistema di controllo la dinamica alle piccole variazioni attorno ad un punto di equilibrio (o di regime) gioca un ruolo essenziale
- Le equazioni linearizzate dei componenti idraulici sono formalmente identiche a quelle dei componenti elettrici
- si può sfruttare l'analogia per valutare in modo sintetico la dinamica di circuiti complessi, stimare le costanti di tempo dominanti, valutare la trascurabilità di alcuni fenomeni, etc.

## - EQUIVALENTI ELETTRICI

- Correnti  $\leftrightarrow \Delta Portate$
- Tensioni  $\leftrightarrow \Delta Pressioni$

### - Ugello

$$\Delta W_u = \bar{W} \left( \frac{\Delta A_u}{\bar{A}_u} + \frac{1}{2} \frac{\Delta P_i - \Delta P_u}{P_i - P_u} \right)$$

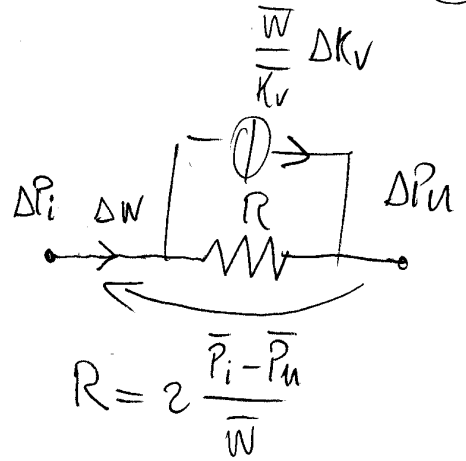


$$R = 2 \frac{\bar{P}_i - \bar{P}_u}{\bar{W}}$$

- Valvola

$$\Delta W = \bar{w} \left( \frac{\Delta K_v}{\bar{K}_v} + \frac{1}{2} \frac{\Delta P_i - \Delta P_u}{\bar{P}_i - \bar{P}_u} \right) =$$

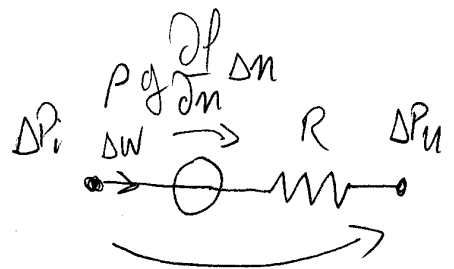
$$= \bar{w} \left( \frac{\alpha'(\theta)}{\alpha(\theta)} \Delta \theta + \frac{1}{2} \frac{\Delta P_i - \Delta P_u}{\bar{P}_i - \bar{P}_u} \right)$$



- Pompa fluidodinamica

$$\Delta P_u - \Delta P_i = g \frac{\partial P}{\partial q} \Delta W + \rho g \frac{\partial P}{\partial m} \Delta m$$

(convenzione generatore)



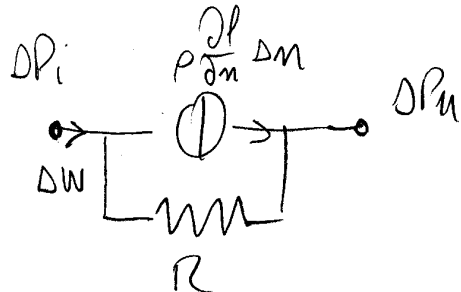
$$R = -g \frac{\partial P}{\partial q}$$

- Pompa volumetrica

ideale  $\Delta W = \rho \frac{\partial P}{\partial m} \Delta m$

reale  $\Delta W = \rho \frac{\partial P}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial P}{\partial H} \frac{1}{g} (\Delta P_u - \Delta P_i)$

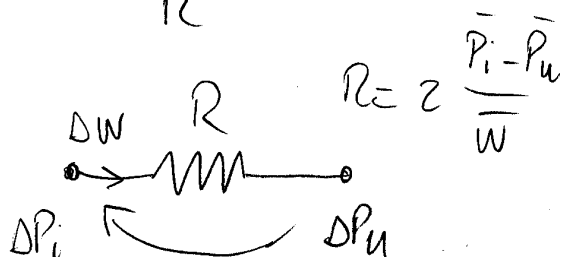
$$R = -\frac{g}{\partial P / \partial H}$$



- Perdita di carico concentrata

$$\Delta P_i - \Delta P_u = (\bar{P}_i - \bar{P}_u) z \frac{\Delta W}{\bar{w}} =$$

$$= z \frac{\bar{P}_i - \bar{P}_u}{\bar{w}} \Delta W$$

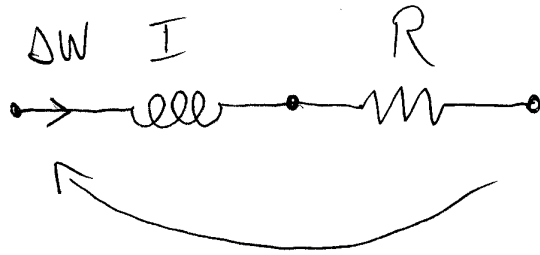


- Condotta

$$\Delta P_i - \Delta P_u = \frac{L}{A} \frac{d\Delta W}{dt} + \frac{c_f \omega L |\bar{W}|}{\rho A^3} \Delta W$$

$$I = \frac{L}{A} \quad (\text{inerzia}) \quad \Delta P_i \quad \Delta W \quad I \quad R \quad \Delta P_u$$

$$R = \frac{c_f \omega L |\bar{W}|}{\rho A^3}$$



- Osservazione: nel caso di condotta circolare, si trova

$$R = \frac{c_f \pi D L \rho A \bar{u}}{\rho A^2 \pi \frac{D^2}{4}} = \frac{4 c_f L}{D} \frac{\bar{u}}{A}$$

mentre per una perdita di carico concentrata con sezione A si trova

$$R = 2 \frac{\bar{P}_i - \bar{P}_u}{\bar{W}} = 2 \frac{K \rho \frac{\bar{u}^2}{2}}{\rho A \bar{u}} = K \frac{\bar{u}}{A}$$

- Considerando valori tipici  $c_f = 0.005$ ,  $K = 1$ , per uguagliare la perdita di carico concentrata occorre che

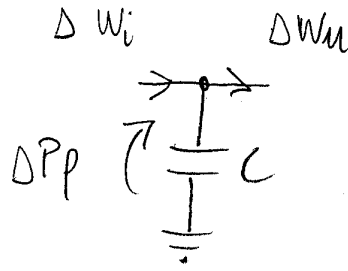
$$\frac{4 c_f L}{D} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{D} = \frac{K}{4 c_f} = 50$$

ovvero la lunghezza della condotta deve essere pari a circa 50 diametri, per avere una perdita concentrata paragonabile ad un gomito o ad un giunto a T.

- Serbatoio a pelo libero (trascurando perdite imbocco)

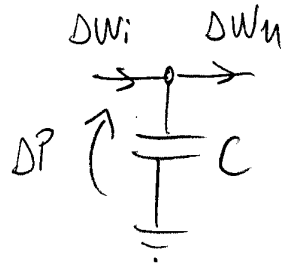
$$\frac{A}{g} \frac{dDP}{dt} = \Delta W_i - \Delta W_u$$

$$C = \frac{A}{g}$$



- Serbatoio pressurizzato (isotermo)

$$\frac{\rho A}{\frac{AP_g}{V_0 - A\bar{e}} + \rho g} \frac{dDP}{dt} = \Delta W_i - \Delta W_u$$



• Se a regime  $\bar{e} = 0$

$$C = \frac{\rho A}{\frac{AP_g}{V_0} + \rho g}$$

• Osservazione: valutiamo i due termini a denominatore in un caso tipico

$$\frac{AP_g}{V_0} \sim \frac{P_g}{h_0} \sim 4 \cdot 10^5 \quad \text{se } P_g = 4 \text{ bar} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$h_0 = 1 \text{ m}$$

$$\rho g \sim 10^4$$

→ il termine gravitazionale risulta di norma trascurabile

$$C \sim \frac{\rho V_0}{P_g}$$