# PROPAGAZIONE ONDE



- PROPAGAZIONE DELLE ONDE IN UN CONDOTTO (LIQUIDO)
- Rimuoviamo l'ipotesi di fluido incomprimibile ($\rho = cost$) e introduciamo l'effetto della comprimibilità del liquido

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{B} \qquad \text{acqua: } B = 21'000 \text{ bar}$$

per i liquidi, B è sempre molto elevata, quindi le variazioni di densità sono comunque modeste

- Consideriamo una condotta <u>elastica</u> <u>cilindrica</u>

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{K} \qquad K = \underset{\uparrow}{\overset{\text{modulo Young}}{E}} \cdot \frac{S \leftarrow \text{spessore}}{D \leftarrow \text{diametro}}$$

$$A(x,t) = A_0 + \Delta A(x,t) = A_0 + \frac{A_0}{K} \Delta P(x,t) \qquad (\Delta A \ll A_0)$$

- Trascuriamo <u>l'attrito</u> $\Rightarrow c_f = 0$
- Supponiamo la condotta <u>adiabatica</u> $\Rightarrow \phi = 0$
- Equazione della <u>massa</u>

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad d\rho A = \rho dA + A d\rho = A\left(\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{B}\right) dP$$

$$A\left(\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{B}\right)\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{A}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{1}{c_0^2} = \frac{\rho}{B}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{B} + \frac{\rho}{K}$$

vedremo che $c_0$ e $c$ sono le velocità di propagazione delle onde

# PROPAGAZIONE ONDE



- Regime $\frac{\partial}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}=0 \qquad \overline{w}(x)=\overline{w}$$

- Linearizzazione

$$\boxed{\frac{A}{c^2}\frac{\partial \Delta P}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}=0}$$

– Equazione q.d.m.

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \rho A u^2}{\partial x}+\rho A g\frac{dz}{dx}+A\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

- Regime

$$\frac{d\bar{\rho}\bar{A}\bar{u}^2}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{\overline{w}^2}{\bar{\rho}\bar{A}}=\overline{w}^2\frac{d}{dx}\frac{1}{\bar{\rho}\bar{A}}=-\frac{\overline{w}^2}{(\bar{\rho}\bar{A})^2}\frac{d}{dx}\bar{\rho}\bar{A}=$$

$$=-\bar{A}\frac{\bar{u}^2}{c^2}\frac{d\bar{P}}{dx}$$

Poichè $u \ll c$ → termine trascurabile rispetto ad $A\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$

$$\bar{\rho}\bar{A}g\frac{dz}{dx}+\bar{A}\frac{d\bar{P}}{dx}=0$$

$$\int_0^L \bar{\rho}\bar{A}g\frac{dz}{dx}dx+\int_0^L \bar{A}\frac{d\bar{P}}{dx}dx=0$$

le variazioni di $\bar{\rho}$ e $\bar{A}$ sono molto piccole → porto fuori dal segno di integrale

$$P_u-P_i=\bar{\rho}g\,(z_i-z_u)$$

# PROPAGAZIONE ONDE



- linearizzazione

Supponiamo che il contributo del termine $\frac{\partial \rho A u^2}{\partial x}$ sia trascurabile anche in transitorio

$$\boxed{\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + A\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = 0}$$

– Equazione energia (forma entropica)

$$\rho A T \frac{\partial s}{\partial t} + W T \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

- Regime

$$\cancel{\overline{WT}}\frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = 0 \qquad \bar{s}(x) = \bar{s} = \bar{s}_i$$

- Linearizzazione

$$\bar{\rho} \bar{A} \bar{T} \frac{\partial \Delta s}{\partial t} + \overline{W} \overline{T} \frac{\partial \Delta s}{\partial x} + \cancel{\Delta(WT)\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}} = 0$$

$$\boxed{\bar{\rho} \bar{A} \frac{\partial \Delta s}{\partial t} + \overline{W}\frac{\partial \Delta s}{\partial x} = 0}$$

# PROPAGAZIONE ONDE

## - SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARIZZATE

- Applichiamo il metodo della trasformata di Laplace per ridurre le PDE a ODE lineari omogenee, che risolveremo col metodo di Eulero

$$\begin{cases} \frac{A}{c^2} s \Delta P + \frac{d \Delta W}{dx} = 0 & \text{massa} \\ s \Delta W - A \frac{d \Delta P}{dx} = 0 & \text{qdm} \\ s \Delta S + \bar{u} \frac{d \Delta S}{dx} = 0 & \text{energia} \end{cases}$$

$$\Delta P = -\frac{c^2}{sA} \frac{d \Delta W}{dx}$$

$$s \Delta W - \cancel{A} \frac{c^2}{s \cancel{A}} \frac{d^2 \Delta W}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \Delta W}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Delta W = 0$$

eq. lineare omogenea a coeff. cost.

equazione caratt.: $\lambda^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{s}{c} \qquad \Delta W = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$$

integrale generale

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta W(x,s) &= K_1(s)\, e^{-\frac{s}{c}x} + K_2(s)\, e^{+\frac{s}{c}x} \\ \Delta P(x,s) &= \frac{c}{A} K_1(s)\, e^{-\frac{s}{c}x} - \frac{c}{A} K_2(s)\, e^{\frac{s}{c}x} \end{aligned}}$$

$K_1(s)$, $K_2(s)$ da determinare in base alle condizioni al contorno

$$\frac{d\Delta S}{dx} + \frac{s}{\bar{u}}\Delta S = 0$$ eq lineare omogenea a coeff. cost.

eq. caratt. $\lambda + \frac{s}{\bar{u}} = 0$

$$\Delta S(x,s) = K_3(s)\, e^{-\frac{s}{\bar{u}}x}$$

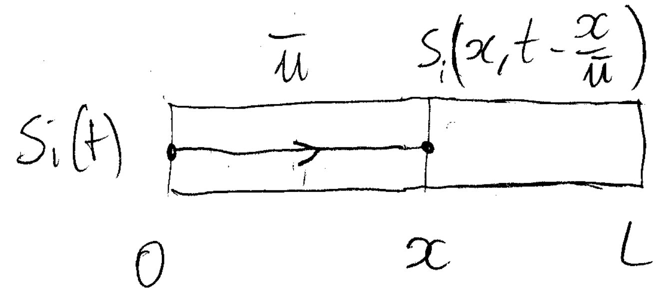
Ponendo come condizione al contorno l'entropia all'ingresso

$\Delta S(0,s) = \Delta S_i(s)$ si trova immediatamente

$$\boxed{\Delta S(x,s) = \Delta S_i(s)\, e^{-\frac{s}{\bar{u}}x}}$$

– Interpretazione fisica : eq. energia

$$\Delta S(x,t) = \Delta S_i\left(t - \frac{x}{\bar{u}}\right)$$




- L'entropia si propaga con la velocità del fluido $\bar{u}$
- Se $\Delta S_i = 0 \Rightarrow \Delta S(x,t) = 0$ processo isoentropico

# PROPAGAZIONE ONDE

- Interpretazione fisica: eq. massa + q.d.m.

$$\Delta W(x,t) = K_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + K_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\Delta P(x,t) = \frac{c}{A} K_1\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{c}{A} K_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

| onde progressive | onde regressive

- le perturbazioni di pressione e portata si propagano in avanti e all'indietro con la velocità del suono c
- Nel caso di condotta infinitamente rigida $(K \to \infty)$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B}}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = c_0; \quad \text{acqua: } c_0 = \sqrt{\frac{21000 \cdot 10^5}{10^3}} = 1450 \frac{m}{s}$$

- In generale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B} + \frac{\rho}{K}}} = \sqrt{\frac{\frac{BK}{B+K}}{\rho}} < c_0$$

l'elasticità della condotta aumenta la comprimibilità effettiva del liquido, e quindi riduce la velocità del suono

# PROPAGAZIONE ONDE

- Ad ogni perturbazione di pressione, che si muove con velocità $\pm c$, corrisponde una perturbazione di portata; il rapporto vale

$$\frac{\Delta P}{\Delta W} = \pm \frac{c}{A} = \pm Z$$

$Z$: impedenza caratteristica del condotto

(+) onde progressive

(−) onde regressive

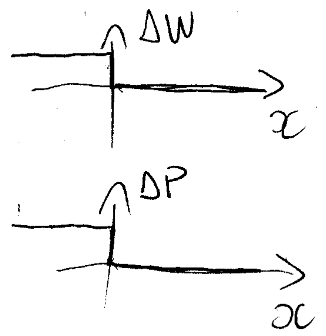
– P.es: $K_1(t) = sca(t) \Rightarrow$

$$\Delta W = sca\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

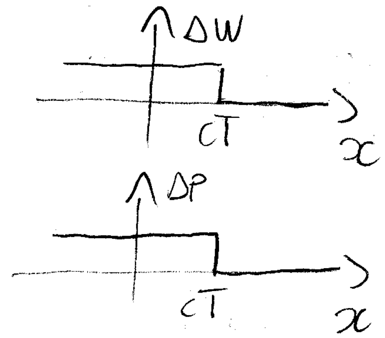
$$\Delta P = \frac{c}{A}\, sca\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

(progressive)

$\boxed{t=0}$



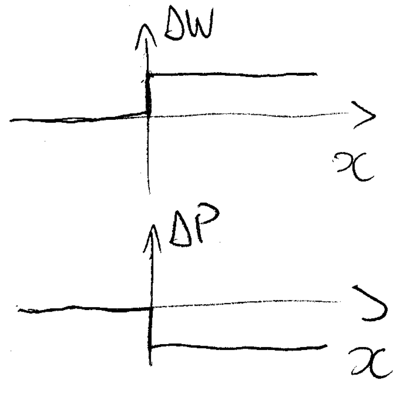

$\boxed{t=T}$

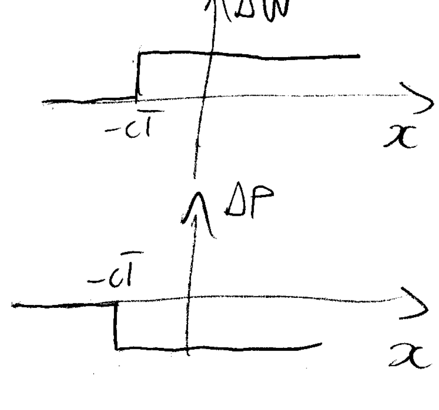



$K_2(t) = sca(t) \Rightarrow$

$$\Delta W = sca\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\Delta P = -\frac{c}{A}\, sca\left(t + \frac{x}{c}\right)$$



# PROPAGAZIONE ONDE



- SOLUZIONE RIGOROSA
  - Se si considera anche il termine cinetico $\frac{\partial \rho A u^2}{\partial x}$ nella equazione della q.d.m., si ottiene una soluzione simile, dove però la velocità di propagazione vale

$$\overline{u} \pm c$$

e le impedenze caratteristiche valgono

$$\frac{c^2}{A(c+\overline{u})}, \quad -\frac{c^2}{A(c-\overline{u})}$$

(vedi dispensa)

- Se $\overline{u} << c$ la soluzione approssimata è più che soddisfacente; tipicamente $\overline{u} < 10 \ m/s$, $c \sim 1000 \ m/s$
- Il termine cinetico diventa ben più rilevante in presenza di variazioni significative della sezione del condotto

$$A = A_0(x) + \frac{A_0}{K} \Delta P \qquad \frac{\partial A_0}{\partial x} \neq 0$$

- PROPAGAZIONE ONDE IN CONDOTTE PERCORSE DA GAS
  - la derivazione teorica è molto simile; in particolare, se le condizioni sono di moto <u>isoentropico</u>, si può assumere che

$$\rho = \rho(P, S) = \rho(P, \overline{S}) = \rho(P)$$

quindi $\frac{d\rho}{dP} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_S$, che può essere calcolata lungo una trasformazione isentropica

# PROPAGAZIONE ONDE

- Una trasformazione isentropica per un gas ideale comporta

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = cost \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P} = \frac{1}{\gamma R^* T} \qquad \text{con } R^* = \frac{R}{\mathcal{M}} \begin{array}{l} \leftarrow \text{cost. universale gas} \\ \leftarrow \text{massa molecolare} \end{array}$$

- Riprendendo l'equazione della massa $\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

$$d\rho A = \rho dA + A d\rho = A\left(\frac{\rho}{K} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_s\right) dP = \frac{A}{c^2} dP$$

→ Il termine $\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_s$ gioca lo stesso ruolo di $\frac{\rho}{B}$ nel caso dei liquidi; in particolare, se $K \to \infty$ (condotta rigida)

$$c = \frac{1}{\sqrt{d\rho/dP}} = \sqrt{\gamma R^* T}$$

- Per l'aria a temperatura ambiente risulta $c \simeq 340 \frac{m}{s}$

- EQUAZIONI RISOLTE RISPETTO ALLE C.C.

- Imponendo condizioni al contorno in $x = 0$, si trova

$$\Delta W(x,s) = \Delta W(0,s)\, Ch(\nu x) - \frac{1}{Z} \Delta P(0,s)\, Sh(\nu x)$$

$$\Delta P(x,s) = \Delta P(0,s)\, Ch(\nu x) - Z\, \Delta W(0,s)\, Sh(\nu x)$$

$$\Delta S(x,s) = \Delta S(0,s)\, e^{-\mu x}$$

$$\text{con} \quad \nu = \frac{s}{c} \qquad \mu = \frac{s}{u}$$

- Si noti che in generale non ha senso fisico imporre entrambe le c.c. idrauliche all'ingresso, quindi le equazioni vanno completate con c.c. realistiche
- Posto $x = L$ (sbocco della condotta), si può scrivere

$$\begin{cases} \Delta W_u = \Delta W_i \, Ch(s\tau) - \frac{1}{Z} \Delta P_i \, Sh(s\tau) & \tau = \frac{L}{c} \\ \Delta P_u = \Delta P_i \, Ch(s\tau) - Z \, \Delta W_i \, Sh(s\tau) & \tau_u = \frac{L}{u} \\ \Delta S_u = \Delta S_i \, e^{-s\tau_u} \end{cases}$$

$\Delta W_u, \Delta P_u, \Delta S_u$ : valori all'uscita della condotta
$\Delta W_i, \Delta P_i, \Delta S_i$ : " all'ingresso "

- Le equazioni appena scritte rappresentano in forma comoda l'integrale generale delle equazioni a derivate parziali linearizzate. Per ottenere la soluzione di uno specifico problema occorrerà aggiungere 3 equazioni, corrispondenti alle condizioni al contorno, del tipo:

$$\alpha_i \Delta W_i(s) + \beta_i \Delta P_i(s) = \gamma_i \Delta W_i^0(s) + \delta_i \Delta P_i^0(s)$$

$$\alpha_u \Delta W_u(s) + \beta_u \Delta P_u(s) = \gamma_u \Delta W_u^0(s) + \delta_u \Delta P_u^0(s)$$

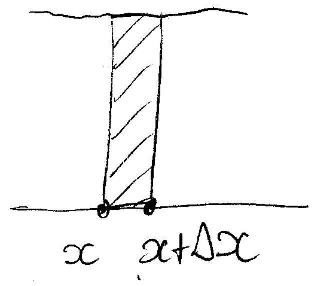
$$\Delta S_i(s) = \Delta S_i^0(s)$$

dove i termini con apice $^0$ sono le forzanti (ingressi esogeni) e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ opportuni coefficienti costanti

# PROPAGAZIONE ONDE

- EQUIVALENTE ELETTRICO
  - È possibile formulare un equivalente elettrico della parte idraulica del modello. Moltiplicando le equazioni di conservazione della massa e della q.d.m. linearizzate per la lunghezza $\Delta x$ di un elementino di condotta, risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{A\Delta x}{c^2}\dfrac{\partial \Delta P}{\partial t} + \dfrac{\partial W}{\partial x}\Delta x = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta W}{\partial t}\Delta x + A\dfrac{\partial \Delta P}{\partial x}\Delta x = 0 \end{cases}$$



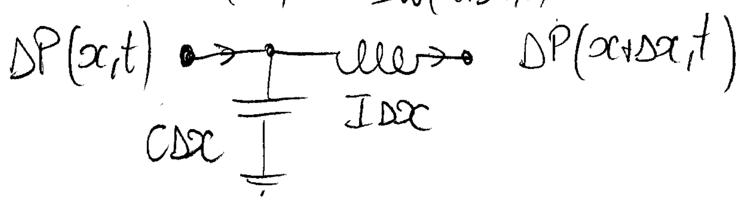

che si può riformulare come

$$\begin{cases} C\,\Delta x\,\dfrac{d}{dt}\Delta P(x,t) = \Delta W(x,t) - \Delta W(x+\Delta x,t) \\ I\,\Delta x\,\dfrac{d}{dt}\Delta W(x+\Delta x) = \Delta P(x,t) - \Delta P(x+\Delta x,t) \end{cases}$$

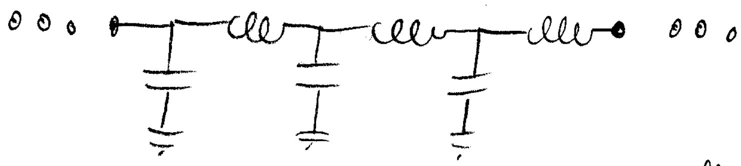
dove $C = \dfrac{A}{c^2}$ è una capacità per unità di lunghezza

$I = \dfrac{1}{A}$ è una inertanza per unità di lunghezza

- Il circuitino elementare equivalente è



- La condotta è quindi rappresentata dalla connessione serie di ∞ elementi



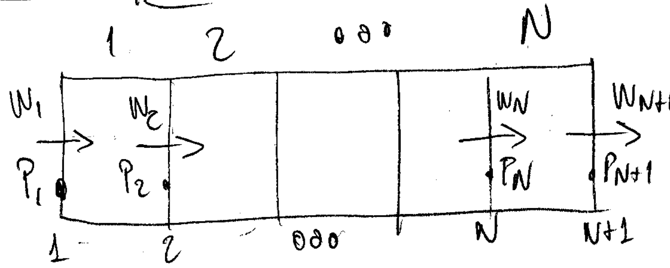
- Si tratta del modello elettrico di una <u>linea di trasmissione</u> (p.es, un cavo coassiale)

- INTEGRAZIONE NUMERICA
- Gli ambienti di simulazione non supportano direttamente l'integrazione di PDE (salvo i codici per simulazione di dettaglio 2D o 3D). Occorre quindi trasformare le PDE in equazioni maneggiabili numericamente
- <u>Strategia #1</u>: volumi finiti
  Si integrano le equazioni su volumi di lunghezza finita, e si approssimano i valori medi con i valori in punti opportuni. Si ottengono sistemi ODE.
- <u>Strategia #2</u>: discretizzazione temporale
  Si adotta un algoritmo di integrazione a passo fisso, in cui $\Delta t$ sia un sottomultiplo del tempo di attraversamento dell'onda. Si ottengono equazioni dinamiche a tempo discreto

# PROPAGAZIONE ONDE



## - Volumi finiti




lunghezza totale: $L$

lunghezza cella $\ell = \frac{L}{N}$

$$\int_{(j-1)\ell}^{j\ell} \frac{A}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t}\,dx + \int_{(j-1)\ell}^{j\ell} \frac{\partial w}{\partial x}\,dx = 0 \qquad \text{(massa)}$$

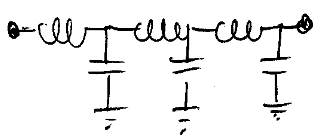
$$\boxed{\frac{A\ell}{c^2}\frac{d}{dt}P_{mj} = w_j - w_{j+1}} \qquad j = 1 \ldots N$$

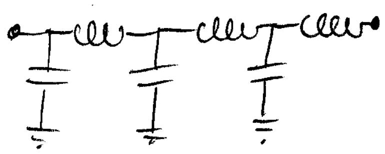
$$\int_{(j-1)\ell}^{j\ell} \frac{\partial w}{\partial t}\,dx + \int_{(j-1)\ell}^{j\ell} \rho A g \frac{dz}{dx}\,dx + \int_{(j-1)\ell}^{j\ell} A\frac{\partial P}{\partial x}\,dx = 0$$

$$\boxed{\ell\frac{d}{dt}w_{mj} + \rho A g\left(z_j - z_{j-1}\right) + A\left(P_{j+1} - P_j\right) = 0} \qquad j = 1 \ldots N$$

- Si può scegliere:

$$\boxed{\begin{aligned} w_{mj} &= w_j \\ P_{mj} &= P_{j+1} \end{aligned}} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{\begin{aligned} w_{mj} &= w_{j+1} \\ P_{mj} &= P_j \end{aligned}}$$





- NB: è possibile anche aggiungere il termine di attrito distribuito

$$\int_{(j-1)l}^{jl} \frac{c_f w}{\rho A^2} w^2 \, dx = \frac{c_f w l}{\rho A^2} w_{mj}^2$$

– DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE

- Partendo dalle equazioni linearizzate, è possibile antitrasformare nel dominio del tempo, grazie alla presenza di soli termini del tipo $e^{-s\tau}$, che corrispondono a ritardi puri. Si possono quindi reinterpretare le equazioni come quelle di un sistema a segnali campionati, descritto da equazioni a tempo discreto
- Risultati analoghi si ottengono utilizzando il metodo delle caratteristiche, che può anche essere applicato alle equazioni non-lineari (vedi Ferrelli, Magnezzoni, Rossi, "A novel approach to Speed Control of Hydro Power Stations", Automatica, 1990)