

ESERCITAZIONE MATLAB

- Diagrammi di Bode e risposta in frequenza
- Sistemi di controllo

Diagrammi di Bode e risposta in frequenza

Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$, determinarne il diagramma di Bode di modulo e fase. Si dica, inoltre, quanto vale l'uscita a transitorio esaurito per segnale di ingresso pari a $u(t) = 15 - 3 \sin(0.5 t)$

```
» clear all
» num=10; den=poly([-1 -1 -1])
( oppure: » den=conv([1 1],conv([1 1],[1 1])) )
» figure; grid; bode(num,den)
```

E' anche possibile farsi restituire dal comando bode i valori di pulsazione scelti da Matlab, quelli del modulo e quelli della fase

```
» [modulo,fase,pulsazione]=bode(num,den);
```

In tale caso, tuttavia, il comando non mostra il grafico, il modulo è in scala naturale, la fase è in gradi e la pulsazione è in rad/sec.

Per visualizzare il grafico in scala doppio-logaritmica:

```
» figure; plot(pulsazione,20*log10(modulo)); grid;
```

e sulla finestra della figura scegliere Tools → Axes Properties → X Scale Log

(si possono cambiare eventualmente anche i limiti (da 0.1 a 10: sono i valori minimo e massimo del vettore pulsazione scelto da Matlab)

E' possibile inoltre specificare i valori della pulsazione in un vettore w

```
» pulsmin=0.1; pulsmax=10; quanti=100;
» w=[pulsmin:(pulsmax-pulsmin)/quanti:pulsmax];
» [modulo,fase,pulsazione]=bode(num,den,w);
» figure; plot(pulsazione,20*log10(modulo)); grid;
Ripetere come prima per le scale !
```

Per il diagramma della fase

```
» figure; plot(pulsazione,fase); grid;
```

Poiché il sistema non ha poli sull'asse immaginario ed è esternamente stabile, all'ingresso $u(t) = 15 - 3 \sin(0.5 t)$ corrisponde, a transitorio esaurito, l'uscita $y(t) = 15 G(0) - 3 |G(0.5j)| \sin(0.5 t + \arg G(0.5j))$. Valutiamo $G(0)$, $|G(0.5j)|$ e $\arg G(0.5j)$ con il comando *bode*.

```
» [mod,arg,puls]=bode(num,den,0)
```

da cui $G(0) = + 10$

```
» [mod,arg,puls]=bode(num,den,0.5)
```

da cui $|G(0.5j)| = 7.1554$ e $\arg G(0.5j) = -79.695152$

(confronta con i diagrammi di Bode tracciati ! $20 \log_{10}(7.1554) = 17.1$)

Osservazione

Se la funzione di trasferimento ha guadagno negativo, la fase parte da $+180^\circ$ e non da -180°

```
» num = -100;
» bode(num,den);
```

Poli complessi

Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2\xi s + 1}$, tracciare i diagrammi di Bode per $\xi = 0.5; 0.05; 0.005; 0.0005$

```
» clear all
» figure; hold on;
» num=10;
» for csi=[0.5 0.05 0.005 0.0005],
    den=[1 2*csi 1];
    bode(num,den);
» end;
```

Osservazione

Se la funzione di trasferimento ha poli sull'asse immaginario e se tali punti rientrano nel vettore di pulsazioni definito da Matlab o sono assegnati come argomento, il diagramma sarà rappresentato ma in corrispondenza del picco di risonanza tale diagramma risulterà troncato (il valore teoricamente assunto sarebbe infinito).

» pulsmin=0.1; pulsmax=10;
 » w=[pulsmin:0.1:pulsmax];
 Il vettore w comprende la pulsazione di risonanza $\omega = 1$.
 » [modulo,fase,pulsazione]=bode(num,den,w);
 » plot(pulsazione,20*log10(modulo));
 (cambia la scale delle pulsazioni)

Filtri

• Filtro passa-basso $G(s) = \frac{0.01}{(s + 0.1)^2 (s + 1)^2}$

» clear all
 » num=0.01; den=poly([-0.1 -0.1 -1 -1]);
 » bode(num,den)
 Passano le pulsazioni minori di 0.1 rad/sec.

• Filtro passa-banda $G(s) = \frac{10s}{(s + 1)(s + 10)}$

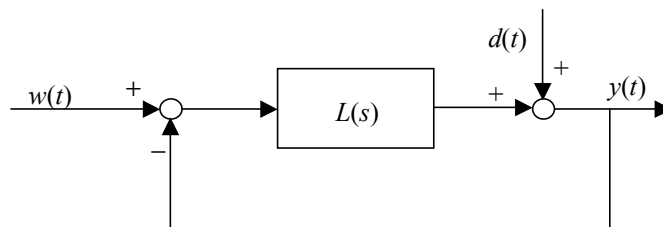
» clear all
 » num=[10 0]; den=conv([1 1],[1 10]);
 » bode(num,den)
 Passano le pulsazioni comprese tra 1 e 10 rad/sec.

• Filtro passa-alto $G(s) = \frac{s}{(s + 10)}$

» clear all
 » num=[1 0]; den=[1 10];
 » bode(num,den)
 Passano le pulsazioni maggiori di 1 rad/sec.

Sistemi di controllo

Studiare la stabilità del sistema di controllo



dove $L(s) = 10 \frac{(1+10s)}{(1+s)^4}$

La pulsazione critica e il margine di fase forniscono un'analisi delle caratteristiche di stabilità di un sistema chiuso in controreazione unitaria. Tali valori si ottengono con il comando *margin*. (» help margin)

» clear all;
 » num=[100 10]; den=poly([-1 -1 -1 -1]);
 » bode(num,den);

Poichè ho una sola intersezione con l'asse a 0 dB e non ci sono poli a parte reale positiva, posso applicare il criterio di Bode per l'analisi della stabilità del sistema dato. Valutiamo dunque il guadagno e il margine di fase di $L(s)$.

Per il guadagno:

» guadagno=bode(num,den,0)

da cui $L(s) = 10$ (positivo !)

Per il margine di fase:

» margin(num,den);

Pm è il margine di fase e W_{cp} la pulsazione critica !

In alternativa, ma non dà il disegno e vale SOLO per i sistemi di controllo asintoticamente stabili, si può usare il comando

» [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(num,den)

In caso contrario tale comando fornisce un margine di fase pari a zero e la pulsazione critica pari a NaN]

Poichè il margine di fase è negativo, il sistema di controllo è instabile.

Supponiamo dunque di poter variare il guadagno μ del sistema a piacere ($\mu > 1$); determiniamo per quali valori il sistema di controllo è stabile. Ora si ha $L(s) = \mu \frac{(1+10s)}{(1+s)^4}$.

Per $\mu = 1$ il diagramma di Bode di $L(s)$ interseca una sola volta l'asse a 0 dB.

Tale risultato continua a valere per $\mu > 1$.

Cerchiamo il μ_{\max} che garantisce l'asintotica stabilità del sistema (essendo il guadagno sempre positivo, occorrerà che il margine di fase sia positivo)

```

» clear all;
» muvett=[]; margfasevett=[]; wcriticavett=[];
» den=poly([-1 -1 -1 -1]);
» for mu=1:0.01:3,
    num=[10*mu mu];
    [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(num,den);
    if margfase>0,
        muvett=[muvett,mu];
        margfasevett=[margfasevett,margfase];
        wcriticavett=[wcriticavett,wcritica];
    end;
» end;
» figure; plot(muvett,margfasevett); xlabel('guadagno');ylabel('margine di fase');
da cui si ricava la stabilità per  $1 < \mu < 1.8$ 

```

Supponiamo ora di operare in un caso di stabilità, per esempio $\mu = 1.25$. Determiniamo l'errore a transitorio esaurito corrispondente a segnali di ingresso pari a $w(t) = 3$ e $d(t) = -2 \sin(0.3 t)$.

```

» clear all;
» mu=1.25; num=[10*mu mu]; den=poly([-1 -1 -1 -1]);
L'errore a transitorio esaurito sarà pari a

```

$$e(t) = \frac{1}{1+L} \Big|_{s=0} \cdot 3 - \frac{1}{1+L} \Big|_{s=0.3j} (-2) \sin \left(0.3t + \arg \frac{1}{1+L} \Big|_{s=0.3j} \right) \text{ dove } \frac{1}{1+L} \text{ è la funzione di sensitività } S.$$

```

» sis1=1;
» sis2=tf(num,den);
» sensit=feedback(sis1,sis2)
» bode(sensit);

```

(notare la differenza con il diagramma di Bode approssimato di S !)

Dalla funzione di sensitività si ottiene

```

» [modulo,fase,pulsazione]=bode(sensit,0);

```

da cui $\frac{1}{1+L} \Big|_{s=0} = 0.4444$

```

» [modulo,fase,pulsazione]=bode(sensit,0.3);

```

da cui $\frac{1}{1+L} \Big|_{s=0.3j} = 0.2312$

e $\arg \frac{1}{1+L} \Big|_{s=0.3j} = -3.6667$

Problema

Data la funzione di trasferimento $L(s) = k \frac{s^2 + 2s + 101}{s^3 + 7s^2 + 7s - 15}$ con $k > 1$

si determini per quali valori di k il sistema a ciclo chiuso risulta stabile.

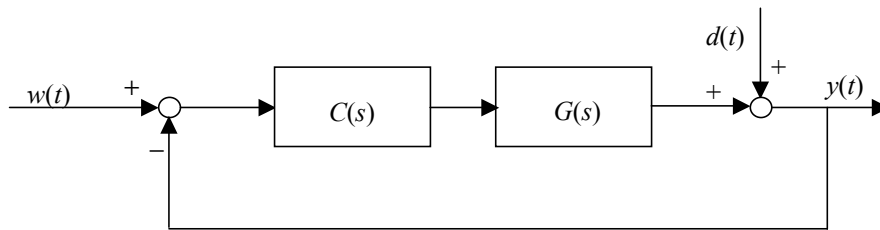
Soluzione

Per $k = 1$ il sistema di controllo è instabile (valgono le ipotesi per l'applicabilità del criterio di Bode e il margine di fase è negativo). Il margine di fase diventa positivo aumentando k (si veda il diagramma di Bode del modulo: la pulsazione critica, in generale, aumenta all'aumentare di k e il modulo della fase critica diventa inferiore a 180°).

Il valore minimo di k che garantisce la stabilità del sistema di controllo è 40 (da determinare seguendo lo schema dell'esempio precedente).

Sintesi del controllore

Per il sistema di controllo in figura



dove $G(s) = \frac{40}{(1 + 0.01s)(1 + 0.001s)^2}$, si vuole progettare un controllore (rete ritardatrice) $C(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$ ($\tau > 0$ e $0 < \alpha < 1$) in grado di stabilizzare il sistema in anello chiuso con margine di fase maggiore di 20° e pulsazione critica maggiore di 300 rad/sec.

Fisso il polo della rete ritardatrice in modo che la pulsazione critica sia superiore a 300 rad/sec. Metterò lo zero oltre la pulsazione critica così da non influenzare il diagramma del modulo e in posizione tale da garantire un margine di fase superiore a 20° .

– Scelta del polo

```

» clear all;
» num=40;
» tauvett=[]; wcrivett=[];
» for tau=0.01:0.001:0.1,
    den=conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
    [mod,fase,puls]=bode(num,den);
    [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(mod,fase,puls);
    if wcritica>0,
        tauvett=[tauvett;tau];
        wcrivett=[wcrivett,wcritica];
    end;
» end;
» plot(tauvett,wcrivett); xlabel('tau'); ylabel('pulsazione critica');

```

La pulsazione critica è dunque superiore a 300 rad/sec per $\tau < 0.038$.

Scegliamo per esempio $\tau = 0.03$ e posizioniamo lo zero della rete ritardatrice (sufficientemente lontano dalla pulsazione critica in modo da non alterare il diagramma del modulo in prossimità di tale valore $\rightarrow \alpha$ piccoli).

– Scelta dello zero

```

» tau=0.03;
» den= conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
» alphavett=[]; mfvett=[];
» for alpha=0.01:0.01:1,
    num=[alpha*tau 1]*40;
    [mod,fase,puls]=bode(num,den);
    [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(mod,fase,puls);
    if margfase>0,
        alphavett=[alphavett;alpha];
        mfvett=[mfvett;margfase];
    end;
» end;
» plot(alphavett,mfvett); xlabel('alpha'); ylabel('margine di fase');

```

Il margine di fase è dunque superiore a 20° per $0.08 < \alpha < 0.27$. Dovendo scegliere α piccolo, fissiamolo a 0.1.

Verifichiamo ora che porre $\tau = 0.03$ e $\alpha = 0.1$ soddisfa le specifiche richieste per la sintesi del sistema di controllo.

```

» clear all;
» tau=0.03;
» alpha=0.1;
» num=[alpha*tau 1]*40;
» den= conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
» margin(num,den);

```

Pulsazione critica e margine di fase soddisfano le specifiche richieste.