SOLUZIONI

Politecnico di Milano

Facoltà di Ingegneria

sede di Como

Fondamenti di Automatica - allievi gestionali

docente: Fabio Dercole

A.A. 2003/04

Terzo appello, PARTE A, 8/9/2004

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

15	15	2

voto totale

32

1. Le risposte devono essere giustificate
2. Non si possono consultare libri, appunti, colleghi, ...
3. Le risposte devono essere riportate sugli stessi fogli su cui sono formulate le domande, facendo eventualmente uso del retro del foglio

Esercizio 1

I finanziamenti concessi da una banca alle imprese sono classificati in tre categorie: 1, elevata affidabilità; 2, media affidabilità; 3, scarsa affidabilità. Ogni anno, in base alle informazioni sulla solidità delle imprese, una frazione α_{ij} dei finanziamenti di categoria i viene riclassificata in categoria j, mentre una ulteriore frazione β_i diviene parte delle "sofferenze" (finanziamenti non più riscuotibili). Inoltre, alla fine di ogni anno t la banca concede nuovi prestiti per un ammontare $u(t)$, esclusivamente di categoria 1. I valori dei coefficienti sono i seguenti:

$$\begin{array}{rclrclrcl} \alpha_{11} &=& 0.8 & \alpha_{12} &=& 0.2 & \alpha_{13} &=& 0 \\ \alpha_{21} &=& 0 & \alpha_{22} &=& 0.7 & \alpha_{23} &=& 0.2 \\ \alpha_{31} &=& 0 & \alpha_{32} &=& 0 & \alpha_{33} &=& 0.9 \\ \beta_1 &=& 0 & \beta_2 &=& 0.1 & \beta_3 &=& 0.1 \end{array}$$

1. Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, rappresenti l'ammontare di finanziamenti di categoria i concessi nell'anno t e $y(t)$ l'ammontare delle nuove sofferenze alla fine dell'anno t.
2. Discutere la stabilità del sistema, il suo tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazoni.
3. Determinare il modello ARMA del sistema.
4. Determinare l'ammontare delle nuove sofferenze annue all'equilibrio se $u(t) = 100$ per ogni t.

Soluzione (continuare sul retro se necessario)

1)
$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t)$$
$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

2) $x(t) = Ax(t) + bu(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A è triangolare, quindi gli autovalori sono 0.8, 0.7, 0.9 tutti in modulo < 1. Il sistema è pertanto asintoticamente stabile

La costante di tempo dominante è $T_d = -\frac{1}{\ln|\lambda_d|}$, dove $\lambda_d = 0.9$ (quello con modulo più vicino a 1)

Il tempo di risposta è $\approx 5\,T_d$

Non ci sono oscillazioni perchè non ci sono autovalori negativi o complessi coniugati.

3) $zx_1 = 0.8\,x_1 + u \;\rightarrow\; x_1 = \dfrac{1}{z-0.8}\,u$

$zx_2 = 0.2\,x_1 + 0.7\,x_2 \;\rightarrow\; x_2 = \dfrac{0.2}{z-0.7}\cdot\dfrac{1}{z-0.8}\,u$

$zx_3 = 0.2\,x_2 + 0.9\,x_3 \;\rightarrow\; x_3 = \dfrac{0.2}{z-0.9}\,\dfrac{0.2}{z-0.7}\,\dfrac{1}{z-0.8}\,u$

$$\overbrace{(z-0.7)(z-0.8)(z-0.9)}^{D(s)}\,y(t) = \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \beta_2}}{0.1}\cdot 0.2\,(z-0.9) + \underset{\substack{\uparrow\\ \beta_3}}{0.1}\cdot 0.04\Big)\,u$$

4) $\mu = G(1) = \dfrac{N(1)}{D(1)} = \dfrac{0.002 + 0.004}{0.3\cdot 0.2\cdot 0.1} = 1$

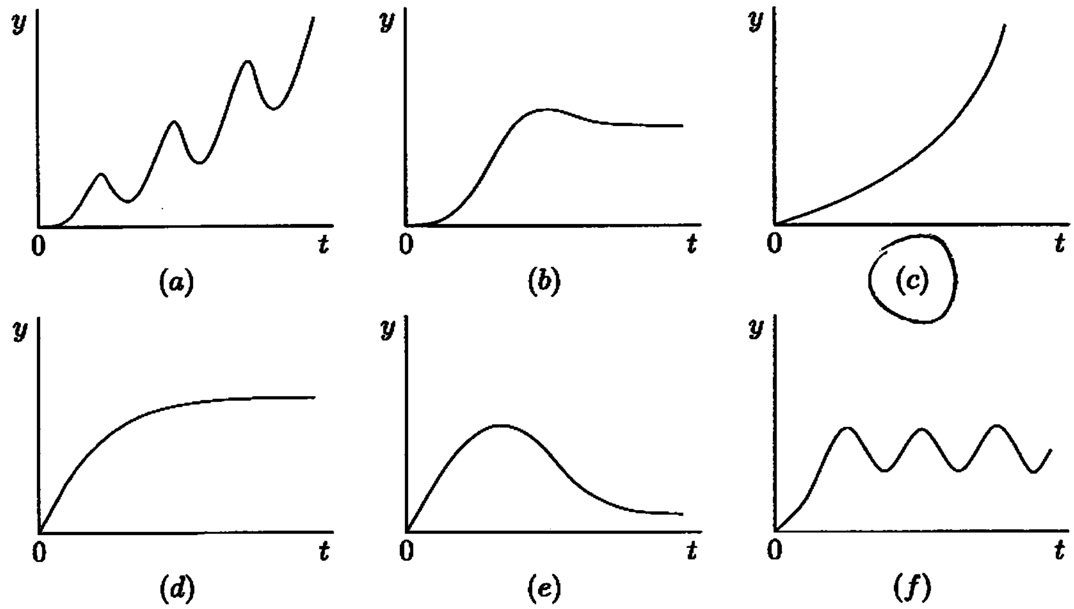
(ovvio, perché all'equilibrio i nuovi finanziamenti ($\bar{u}$) eguagliano quelli cessati ($\bar{y}$), altrimenti il numero di finanziamenti non può restare costante)

Esercizio 2

Di un sistema lineare del secondo ordine a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

si sa che $\det(A) = -1$. Si dica, giustificando la risposta, quale può essere, tra quelle in figura, la risposta del sistema se $u(t) = 1$ per ogni t.



Soluzione (continuare sul retro se necessario)

La risposta del sistema può essere la c.

Infatti il sistema è instabile perchè $\det A = -1$ dice che un autovalore è positivo e uno è negativo ($\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$).

Quindi l'uscita del sistema può tendere all'infinito, ma senza oscillazioni (come in a) poichè le oscillazioni sarebbero giustificate nel caso di autovalori complessi coniugati

Esercizio 3
Non è richiesta alcuna giustificazione. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Risposta esatta +1; errata -0.5; non data 0.

Il comando Matlab `-c'*inv(A)*b+d` restituisce:

1. l'uscita di equilibrio di un sistema dinamico lineare a tempo continuo;
2. lo stato di equilibrio di un sistema dinamico lineare a tempo continuo;
3. l'uscita di equilibrio di un sistema dinamico lineare a tempo discreto;
4. Il guadagno di un sistema dinamico lineare a tempo continuo.

Dopo il comando Matlab `[num,den]=ss2tf(1,2,3,0)` le variabili `num` e `den` valgono:

1. `num=[6 0]`, `den=[1 1]`;
2. `num=[0 6]`, `den=[1 -1]`;
3. `num=6`, `den=-1`;
4. `num=6`, `den=1]`;

Politecnico di Milano

Facoltà di Ingegneria

sede di Como

Fondamenti di Automatica - allievi gestionali

docente: Fabio Dercole

A.A. 2003/04

Secondo appello, PARTE B, 8/9/2004

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

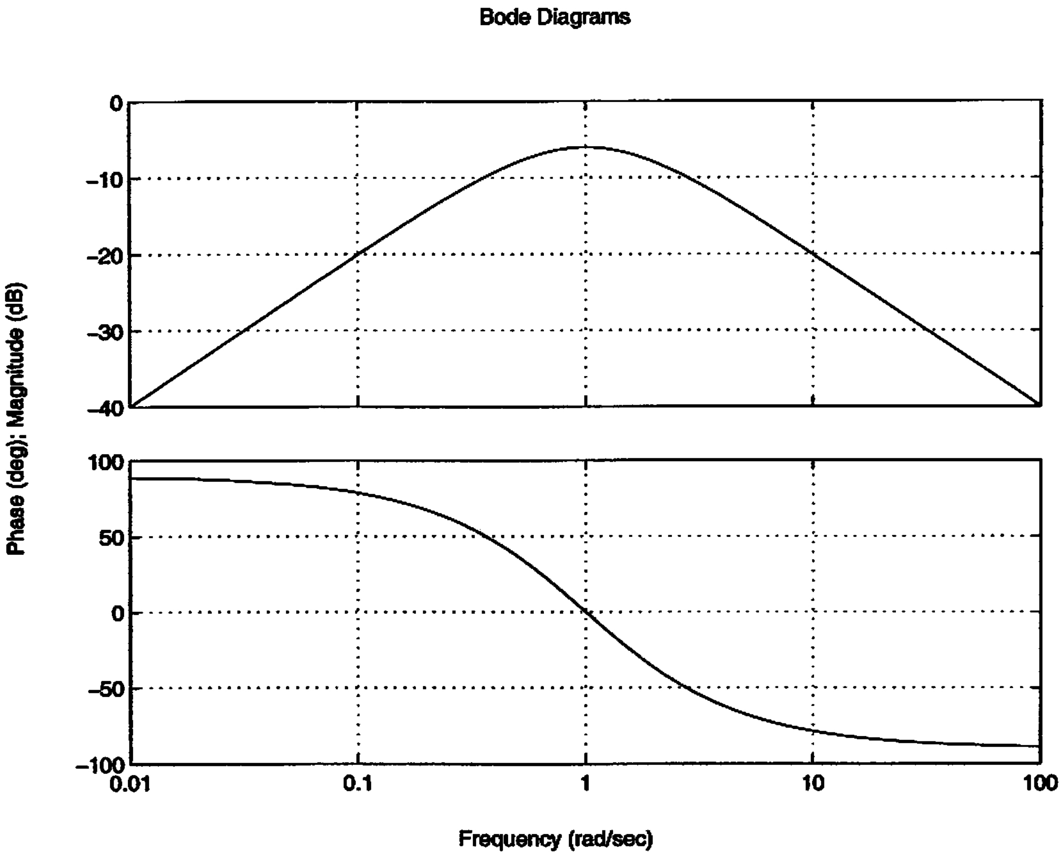
FIRMA:

15	15	2

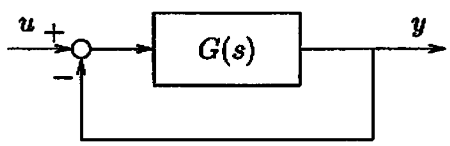
voto totale
32

1. Le risposte devono essere giustificate
2. Non si possono consultare libri, appunti, colleghi, ...
3. Le risposte devono essere riportate sugli stessi fogli su cui sono formulate le domande, facendo eventualmente uso del retro del foglio

Esercizio 1
Mediante una serie di esperimenti in regime sinusoidale su un sistema lineare, si sono ricavati i seguenti diagrammi di Bode (modulo e fase).



1. Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i diagrammi.
2. Rappresentare graficamente le risposte allo scalino e all'impulso del sistema, discutendo in particolare il tempo di risposta.
3. Discutere la stabilità del sistema in figura, in cui $G(s)$ è la funzione di trasferimento determinata al punto 1.



Soluzione (continuare sul retro se necessario)

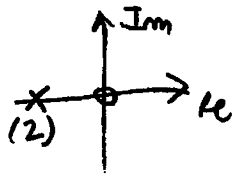
1) • A basse pulsazioni il diagramma del modulo ha pendenza +20dB/dec e la fase è circa +90°, quindi c'è uno zero nell'origine.
• Prolungando l'andamento a basse pulsazioni il diagramma del modulo interseca l'asse a 0dB in $\omega \simeq 1$, quindi il guadagno relativo è pari a 1 (il guadagno del sistema è pari a 0).

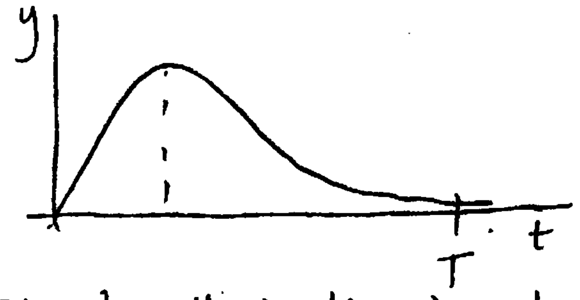
- Ad alte pulsazioni il diagramma del modulo ha pendenza -20 dB/dec e la fase è circa $-90°$. Quindi ci sono due poli stabili vicini alla pulsazione $\omega = 1$ dove il modulo è massimo.
- Non sono necessari poli complessi coniugati per spiegare i diagrammi quindi una $G(s)$ compatibile è data da

$$G(s) = \frac{s}{(1+s)^2}$$

2) Risposta allo scalino

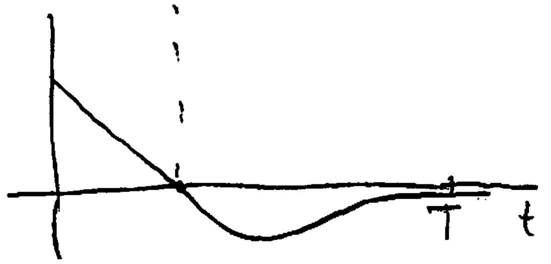
- sistema esternamente stabile e guadagno nullo, quindi $y(t) \to 0$ per $t \to \infty$
- poli reali $\to$ no oscillazioni
- surplus di poli pari a $1 \to \dot{y}(0) \neq 0$ e $\dot{y}(0) > 0$
- c'è uno zero superiore ($m_s = 1$) e nessun zero reale rigueadrato ($\delta = 0$) e $m_s \leq N \leq m_s + \delta$ (N: numero di estremi della risposta allo scalino) $\to N = 1 \to$ un minimo, dovendo $y(t)$ crescere inizialmente per poi tendere a 0 per $t \to \infty$





$T \simeq 5 T_d = 5 \quad (T_d = 1)$

Risposta all'impulso: derivata della risposta a scalino



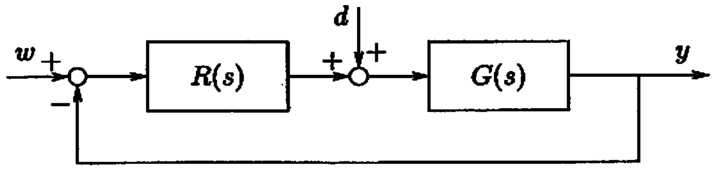
3) $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{s}{1+3s+1}$ esternamente stabile perchè i poli sono le radici di $1+3s+1$ entrambe a parte reale negativa

Esercizio 2
Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$R(s) = \mu \qquad G(s) = \frac{1000}{(1+0.01s)(1+0.1s)(1+s)}$$

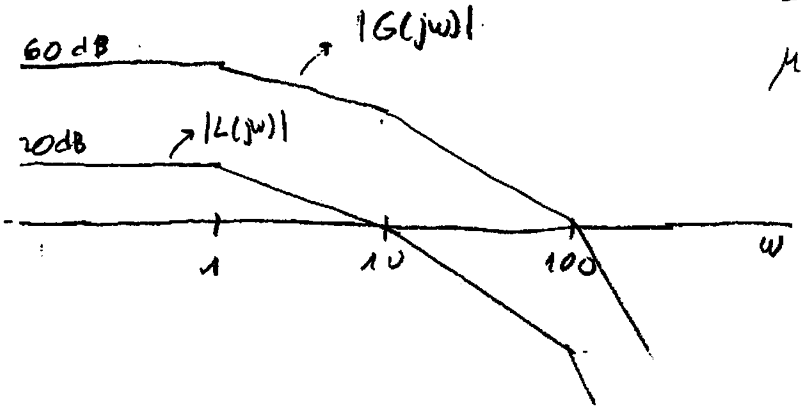
1. Determinare un valore di μ che renda il sistema di controllo asintoticamente stabile, specificando il margine di fase ottenuto.
2. Utilizzando il valore di μ ricavato al punto 1, determinare l'errore a regime dovuto al riferimento $w(t) = \text{sca}(t)$ e al disturbo $d(t) = -\text{sca}(t)$.
3. Determinare (anche in modo approssimato) il tempo di risposta del sistema di controllo.

E' possibile far uso della carta logaritmica allegata.



Soluzione (continuare sul retro se necessario)

1)



$L(s) = \mu G(s)$

$\mu = 0.01 \rightarrow \omega_c = 10$

$\angle L(j\omega_c) = -\operatorname{atan}(10) - \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}(0.1) \simeq -84,3 - 45 - 5,7$ (gradi)

$\varphi_m = 180° + \angle L(j\omega_c) \simeq 45°$

2) Il guadagno d'anello è $\mu_{anello} = \mu \cdot 1000 = 10$
Il guadagno tra w e $e = w - y$ è $1/(1+\mu_{anello})$ e quello tra d ed e è $-1000/(1+\mu_{anello})$, quindi l'errore e_∞ a regime vale

$$e_\infty = \frac{1}{11}(1) - \frac{1000}{11}(-1) = \frac{1001}{11}$$

3) La costante di tempo del sistema regolato è circa pari a $1/\omega_c = 1/10$, per cui il tempo di risposta è circa pari a $5 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}5$.

Esercizio 3

Non è richiesta alcuna giustificazione. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Risposta esatta +1; errata -0.5; non data 0.

Le equazioni corrispondenti al sistema dinamico generato dal comando Matlab `sistema=ss(1,2,3,4)` sono le seguenti:

1. $\dot{x} = 2x + u$, $y = 3x + 4u$
2. $x(t+1) = x(t) + 2u(t)$, $y(t) = 3x(t) + 4u(t)$
3. $\dot{x} = x + 2u$, $y = 3x + 4u$
4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + u$, $y = x$

I diagrammi di Bode (modulo e fase) rappresentati nell'Esercizio 1 sono ottenuti con il seguente comando Matlab `[a,b]=bode(num,den)`:

1. `bode([1 0],[1 1],[.01:.01:100])`
2. `bode([1 0],conv([1 0],[1 0]),[.01:.01:100])`
3. `bode([1 0],conv([1 1],[1 1]),[.01:.01:100])`
4. `bode([0 1],[1 1],[.01:.01:100])`