

Esercizio 1

Si consideri il segnale rappresentato in fig. 1.

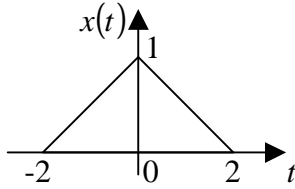


figura 1

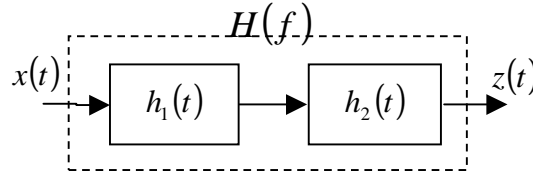


figura 2

1. Si determini la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$.
2. Si calcoli l'energia, la potenza e il valore medio di $x(t)$.
3. Che cosa s'intende per risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario ?
4. Si determini la risposta in frequenza $H(f)$ del sistema lineare stazionario rappresentato in fig. 2, costituito dalla cascata di due sistemi lineari stazionari con risposta all'impulso $h_1(t) = 2 \cdot \text{sinc}(t - 1.5)$ e $h_2(t) = \text{sinc}(2t)$.
5. Il segnale $x(t)$ entra nel sistema rappresentato in fig.2: si determini la trasformata di Fourier $Z(f)$ del segnale $z(t)$ in uscita. Si rappresenti graficamente il modulo e la fase di $Z(f)$.
6. Si determini la trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale $y(t) = \sum_n z(t - nT_0)$, ottenuto periodicizzando¹ con periodo $T_0 = 3$ il segnale $z(t)$. Si determini l'andamento nel tempo del segnale $y(t)$.

Esercizio 2

Un segnale analogico con banda $B_a = 20$ kHz e ampiezza uniformemente distribuita nell'intervallo che si estende tra -2 Volt e $+2$ Volt, viene convertito in formato binario con tecnica PCM utilizzando $n = 8$ bit per campione.

1. Determinare la potenza del rumore di quantizzazione e il rapporto segnale-rumore di quantizzazione.
2. Determinare il valore di R_b [bit/s], frequenza di emissione della sequenza binaria all'uscita del convertitore PCM.
3. Come è possibile ricostruire il segnale analogico originale ?

La sequenza binaria così ottenuta viene trasmessa con un sistema binario antipodale in banda base. Il canale, modellizzato come un filtro passabasso ideale, con banda B uguale alla banda del segnale trasmesso, introduce un'attenuazione $\gamma = 26$ dB. All'ingresso del filtro di ricezione è presente un rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0 / 2 = 10^{-9}$ [W/Hz]. Il filtro di trasmissione è del tipo radice di Nyquist con fattore di roll-off $\alpha = 0.25$ e il filtro di ricezione è adattato.

4. Quanto vale la banda B ? Rappresentare graficamente la risposta in frequenza del canale $H_c(f)$ (il grafico deve riportare chiaramente i valori numerici sugli assi).
5. Determinare la potenza di trasmissione necessaria per garantire una probabilità di errore $P_b(e) = 3 \cdot 10^{-7}$.
6. Come cambiano i requisiti del sistema in termini di banda e di potenza, se si utilizzassero quattro livelli in trasmissione volendo garantire la stessa probabilità di errore $P_b(e)$.
7. Come cambiano i requisiti del sistema di trasmissione in termini di banda e di potenza, se si quantizzasse il segnale analogico originario con $n = 9$ bit per campione (mantenendo due livelli in trasmissione e garantendo la stessa probabilità di errore $P_b(e)$).

¹ Si ricorda la relazione tra le trasformate $Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k Z\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$.

Soluzione Esercizio 1

1. $X(f) = |X(f)| = 2 \operatorname{sinc}^2(2f)$.
2. $m_x = P_x = 0$; $E_x(f) = \frac{4}{3}$.
3.
4. $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) = 2 \operatorname{rect}(f) e^{-j3\pi f} \cdot 0.5 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \operatorname{rect}(f) e^{-j3\pi f}$.
5. $Z(f) = X(f) \cdot H(f)$; $|Z(f)| = 2 \operatorname{sinc}^2(2f) \cdot \operatorname{rect}(f)$; $\angle Z(f) = -3\pi f$.
- 6.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{1}{3} Z(0) \delta(f) + \frac{1}{3} Z\left(\frac{1}{3}\right) \delta\left(f - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} Z\left(-\frac{1}{3}\right) \delta\left(f + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{2}{3} \delta(f) + \frac{2}{3} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2}{3}\right) e^{-j\pi} \delta\left(f - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2}{3}\right) e^{j\pi} \delta\left(f + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{2}{3} \delta(f) - \frac{9}{8} \delta\left(f - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{8} \delta\left(f + \frac{1}{3}\right). \\ y(t) &= \frac{2}{3} - \frac{9}{4} \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right). \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2

1. $E(e^2) = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{4}{2^8}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = 2 \cdot 10^{-5} [W] = -17 \text{dBm}$; $SNR_Q = 6 \cdot N = 48 \text{dB}$.
2. $R_b = 2 \cdot B_a \cdot N = 320 \text{ kbit/s}$.
3. La ricostruzione ideale del segnale analogico si realizza tramite la cascata di un decodificatore che ricostruisce, data la sequenza binaria, i campioni quantizzati e di un filtro ideale passabasso che ricostruisce dai campioni quantizzati il segnale continuo. La frequenza di taglio del filtro passabasso e' uguale alla meta' della frequenza di campionamento.
4. $\gamma_{lin} = 400$; $B = \frac{R_b}{2} (1 + \alpha) = 200 \text{ kHz}$; $H_c(f) = 0.05 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$
5. $P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 3 \cdot 10^{-7} \Rightarrow E_b = 25 \cdot \frac{N_0}{2} = 25 \cdot 10^{-9} [J]$;
 $P_{tx} = \gamma_{lin} \cdot E_b \cdot R_b = 3.2 [W]$.
6. Utilizzando 4 livelli di trasmissione, invece di due, il requisito di banda si dimezza e la potenza richiesta aumenta del fattore 2.5, cioe' di 4dB (trascurando il fattore moltiplicativo della funzione Q).
7. Utilizzando un ulteriore bit per quantizzare ogni campione, aumenta il ritmo di emissione dei bit all'uscita del convertitore, che diventa $R_b = 360 \text{ kbit/s}$, corrispondente ad un aumento del 12.5%. Sia la banda dunque, sia la potenza di trasmissione (se si vuole garantire la stessa probabilita' di errore, cioe' lo stesso E_b) dovranno essere aumentate della stessa quantita'.