



## Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Karnaugh

Introduzione

Metodo di Karnaugh per reti completamente specificate

Le condizioni di indifferenza

Metodo di Karnaugh per reti non completamente specificate

Versione del 22/09/03



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Introduzione

### □ Obiettivo:

Ridurre la complessità di una (o più) funzione(i) booleana(e) espressa(e) in forma di *Prodotto di Somme* o di *Somma di Prodotti* (SOP). **Si considerano le forme canoniche come soluzioni iniziali**

- Ci si riferirà alla sola forma *Somma di Prodotti* o *SOP*
  - l'altra ne è la duale ed i principi sono gli stessi.

### □ Nella sintesi a due livelli gli obiettivi sono due:

- **Riduzione del numero dei termini prodotto** (*principale*)
- **Riduzione del numero di letterali** (*secondario*)
- Esempio:
  - $f(a, d, c) = a'b'c' + a'bc' + a'b'c$  equivale a  $f(a, d, c) = a'b' + a'c'$

### □ Metodologie di sintesi **ottima**:

- Esatte: *Karnaugh* e *Quine - Mc Cluskey*;
- Euristiche per sintesi a due livelli.



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Karnaugh

- Si propone di identificare **forme minime a due livelli** applicando la regola di riduzione  $aZ + a'Z = (a+a')Z = Z$  con  $Z$  termine prodotto di  $n-1$  variabili.
  - Esempio:  $abcd' + ab'cd' = acd'$
- La riduzione può essere applicata iterativamente.
  - Esempio:  $abc'd' + abc'd + abcd' + abcd = abc'(d'+d) + abc(d'+d) = abc' + abc = ab(c'+c) = ab$ 
    - Nota: si osservi che la applicazione della relazione identificata è applicata ad un numero di termini pari a **2<sup>n</sup>** quindi 2, 4, 8, ...
- Osservazione: la regola identificata mantiene inalterato il numero dei livelli.
  - Cioè, somme di prodotti rimangono tali. Al più, tali espressioni possono banalizzarsi in semplici prodotti o costanti.

- 3 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Karnaugh

- La formula di riduzione potrebbe essere facilmente applicata direttamente alle espressioni Booleane.
- Il problema consiste nell'identificare:
  1. sia tutti i **termini su cui applicare la riduzione**;
    - Non è sempre immediato identificare tutti termini su cui applicare la regola di riduzione identificata.
  2. sia i tutti **termini** che partecipano **a più riduzioni contemporaneamente** e replicarli (vedi esempio).
    - Nota: si ricordi che, per le proprietà dell'algebra di Boole, la relazione  $x+x=x$  può essere applicata anche come  $x=x+x$ .

- 4 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Karnaugh (cont.)

- Esempio di replicazione dei termini:

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\text{SOP: } f(a,b) = a'b + ab + ab'$$



$$= (a' + a)b + ab' = b + ab'$$

$$= a'b + a(b + b') = a'b + a$$

- Nessuna delle due espressioni è ulteriormente riducibile
- È evidente, comunque, che la soluzione minima sia  $a+b$

- 5 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Karnaugh (cont.)

- Esempio di replicazione dei termini:

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\text{SOP: } f(a,b) = a'b + ab + ab'$$



$$= a'b + ab + ab + ab'$$



$$= (a' + a)b + a(b + b') = a + b$$

- 6 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

---

### □ Karnaugh (cont.)

- Il metodo delle **mappe di Karnaugh** consente di risolvere direttamente i problemi identificati:
  - sia dovuti alla replicazione dei termini.
  - sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.
- Il metodo delle mappe di Karnaugh è **grafico**.
  - La sua applicazione è semplice per un numero di variabili fino a 4.
  - Risulta complesso per un numero di variabili da 5 a 6.
  - È praticamente inattuabile per un numero di variabili superiori a 6.

---

- 7 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

---

### □ Mappe di Karnaugh

- Una mappa di Karnaugh è uno schema deducibile dalla **rappresentazione geometrica** delle configurazioni binarie.
- Definizione utili:
  - **Distanza di Hamming**: numero di bit che cambia nel passare da una configurazione binaria ad un'altra
    - Esempio: la *distanza di Hamming* tra le configurazioni 01001 e 10101 è 3 poiché cambiano 3 bit.
- L'applicazione della **regola di riduzione** consiste nell'**identificare** le configurazioni binarie associate ai **termini prodotto** che sono a **distanza di Hamming unitaria**.
  - Esempio: i termini prodotto  $abcd'$  e  $ab'cd'$  corrispondono a 1110 e 1010 e sono a *distanza di Hamming* pari ad 1.

---

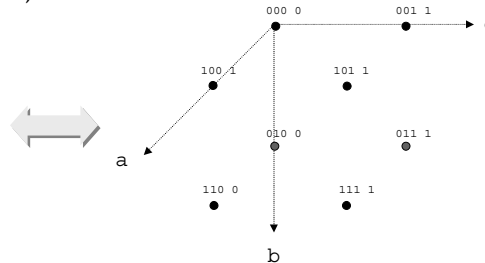
- 8 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- È noto che una funzione di commutazione a  $n$  variabili  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  può essere rappresentata in modo comodo utilizzando una *tabella della funzione* o *tabella della verità*.
- In modo assolutamente equivalente una funzione a  $n$  variabili può essere associata ad una *rappresentazione cartesiana in uno spazio a  $n$  dimensioni*.
- Esempio (spazio 3 dimensionale)

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

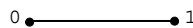


- 9 -

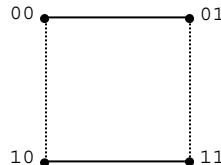


## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Nella rappresentazione cartesiana di una funzione in uno spazio a  $n$  dimensioni, collegando i vertici le cui configurazioni sono a *distanza di Hamming unitaria* si ottiene un *n-cubo*.
  - Spazio a 1 dimensione (1 variabile)
    - È una *linea*, e l'*1-cubo* è un segmento: i due vertici sono associati alle configurazioni 0 e 1



- Spazio a 2 dimensioni (2 variabili):
  - È il piano, il *2-cubo* è un quadrato che si ottiene dall'*1-cubo per proiezione*. Si premette 0 alle configurazioni dei vertici originali, 1 a quelle dei vertici proiettati

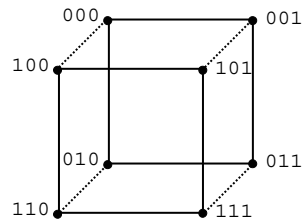


- 10 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Spazio a 3 dimensioni (3 variabili)
  - Il 3-cubo è un solido, che si ottiene dal 2-cubo *per proiezione*, premettendo 0 alle configurazioni dei vertici originali, 1 a quelle dei vertici proiettati



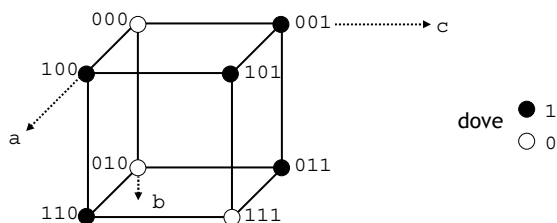
- 11 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Si può pensare di trasportare una tabella delle verità a  $n$  variabili su un  $n$ -cubo, marcando opportunamente i nodi associati a 0 e 1.
  - Si sottolinea nuovamente che due configurazioni sono a distanza unitaria (adiacenti) se e solo se i vertici associati sono collegati da un lato.
- Esempio:  $f(a, b, c) = \text{ON}_{\text{set}}(1, 3, 4, 5, 6)$

**ON<sub>set</sub>** =  
insieme di 1  
della  
funzione

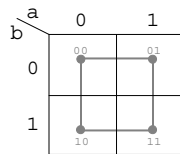


- 12 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Di fatto, la rappresentazione in uno spazio a  $n$  dimensioni non è maneggevole
  - Già per sole tre dimensioni non è di semplice utilizzo.
- Quindi, si passa allo *sviluppo nel piano dei cubi*.
- Al cubo sviluppato nel piano, che ha  $2^n$  vertici, si sovrappone una griglia (*mappa*) con  $2^n$  caselle organizzate secondo righe e colonne
  - Esempio: per il 2-cubo si ha una mappa di 4 caselle su due righe e due colonne, e ad ogni colonna si associa una delle variabili come coordinata

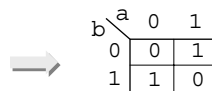


- 13 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Una mappa così realizzata costituisce una *mappa di Karnaugh*:
  - Le *configurazioni* assunte dalle variabili di ingresso danno origine agli *indici di riga e colonna* della mappa.
  - In ogni casella si trascrive il valore assunto dalla funzione quando la configurazione delle variabili corrisponde a quella delle coordinate che contrassegnano le caselle.
  - In una mappa di Karnaugh, *due caselle che condividono un lato di un n-cubo corrispondono a due configurazioni di variabili adiacenti* (distanza di Hamming pari ad 1).
  - Esempio:  $f(a, b) = \text{ON}_{\text{set}}(1, 2)$

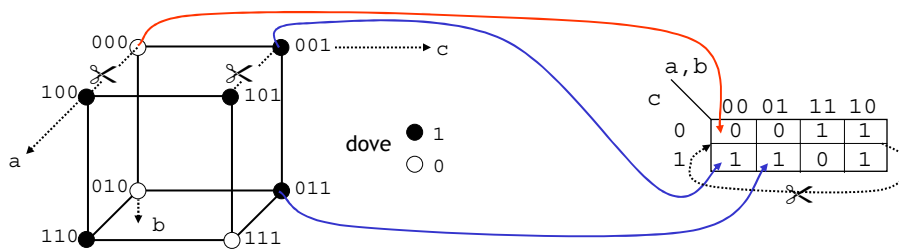


- 14 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Lo sviluppo nel piano di un 3-cubo implica il taglio del cubo
- Il taglio deve mantenere intatta, concettualmente, la **adiacenza fra vertici**. Si presti molta attenzione all'**ordinamento delle coordinate**
  - ordinamento delle coordinate mantiene le distanze di Hamming e non coincide con la numerazione consecutiva

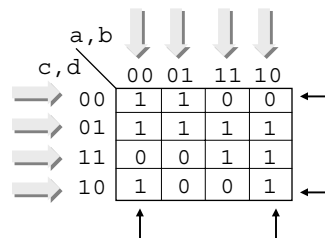


- 15 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Caratteristiche delle mappe: riassunto
  - Indici di riga e colonna: configurazioni adiacenti
  - Cambia un solo bit nel passaggio da una configurazione ad un'altra



Le colonne e righe identificate da 00 e 10 sono adiacenti

Contenuto della matrice: valori della assunti dalla funzione  
Esempio:  $f(a, b, c, d)$  per  $a=0$   $b=0$   $c=0$  e  $d=0$  assume valore 1

- 16 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### Caratteristiche delle mappe

- Si ricorda che: un implicante è un termine prodotto in cui compaiono solo alcuni dei letterali.

$$F(a, b, c, d) = a'b'c'd' + a'b'cd' + a'bc'd' + ab'c'd + ab'cd + ab'cd'$$
$$F(a, b, c, d) = a'b'd' + a'c'd' + \dots$$

a, b	raggruppamento 1		raggruppamento 2	
c, d	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

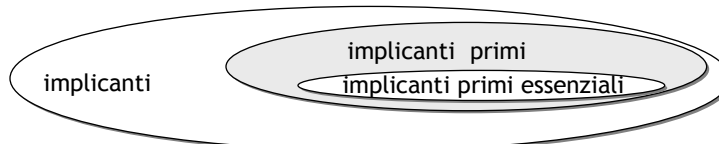
- 17 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### Metodo:

1. Individuare gli implicanti primi e primi essenziali;
  - **Implicante primo**
    - Termine prodotto associato ad un *raggruppamento* di dimensione massima.
  - **implicante primo essenziale**
    - Implicante primo che copre uno o più 1 non coperti da nessun altro implicante primo.
2. Copertura:
  - Scelta del minor numero di implicanti primi e primi essenziali



- 18 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Scopo:
  - identificare una forma SoP che includa *il numero minimo di implicanti e*
  - a parità di numero di prodotti - gli *implicanti* col minimo numero di letterali (definita come *forma minima*) garantendo *la copertura di tutti gli 1 della funzione.*
- Teorema:
  - Esiste sicuramente una forma minima costituita *da soli implicanti primi*
    - sulla mappa di Karnaugh si identificano tutti gli implicanti primi.
    - Nota: la somma di *tutti* gli implicanti primi è spesso *ridondante.*
  - *Implicanti primi essenziali* **devono** essere inclusi nella forma minima.
  - Una *forma minima* costituita da soli *implicanti primi essenziali* è *unica*
    - Condizione sufficiente.

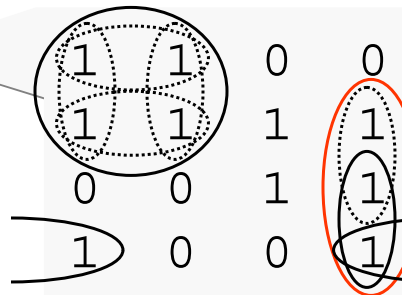
- 19 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Esempio: alcuni raccoglimenti

a, b	c, d			
	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1



raccoglimento

Raccoglimento di  
dimensione massima

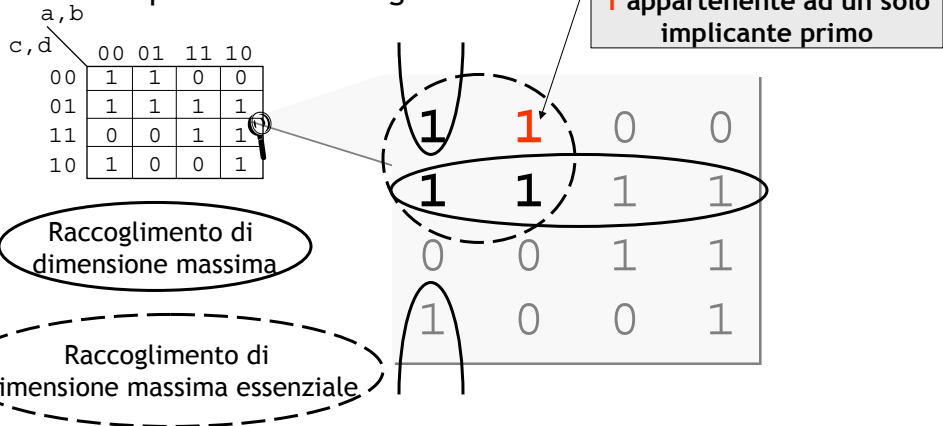
ERRORE: valido raccoglimento solo di 2,4,...

- 20 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

□ Esempio: alcuni raccoglimenti



- 21 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

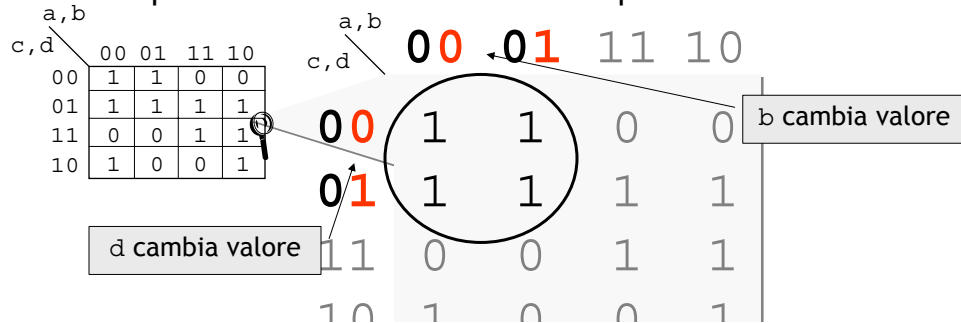
- Ad ogni raccoglimento è associato un termine prodotto.
- Il termine prodotto (**implicante**) è ottenuto:
  - identificando le variabili che non cambiano mai di valore e riportando ogni variabile in modo *naturale* (esempio: a) se il valore che essa assume è 1 o in modo *complementato* (esempio: a') se il valore da essa assunto è 0
- Osservazione:
  - un numero di 1 raccolti pari a  $2^n$  produce un implicante di N-n letterali dove N è il numero delle variabili della funzione.
    - Esempio: per una funzione di quattro variabili -es.  $f(a,b,c,d)$  - un implicante che raccoglie quattro 1 è associato ad un termine prodotto di 2 variabili (es.  $a'd$ )

- 22 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Esempio: identificazione del termine prodotto



b e d cambiano valore: non compaiono nel termine prodotto.  
a e c compaiono come 0 quindi  $a'$  e  $c'$ .  
Il termine prodotto è  $a'c'$ .

- 23 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Copertura

- Copertura: sotto insieme degli implicanti identificati tale per cui nessun 1 della funzione rimane *scoperto*.
- Poiché ogni implicante scelto aumenta il costo della realizzazione della funzione, il numero di implicanti da scegliere deve essere il minore possibile.
- L'obiettivo è la riduzione del costo; questo si traduce nella identificazione della **copertura di minima cardinalità**:
  - sotto insieme degli implicanti primi e primi ed essenziali identificati che realizza una copertura della funzione che è di cardinalità minima.

- 24 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Copertura (cont.)

- Scelta degli implicanti per realizzare la copertura:
  1. Si scelgono tutti gli **implicanti primi essenziali**.
    - Gli implicanti primi essenziali devono essere parte della copertura poiché "sono essenziali" e, quindi, non è possibile fare a meno di loro.
  2. Si eliminano tutti gli implicanti primi che sono coperti da quelli essenziali (**eliminazione implicanti completamente ridondanti**)
    - gli implicanti eliminati, detti *completamente ridondanti*, coprono degli 1 che sono già ricoperti da quelli essenziali e, quindi, non servono ed aumentano il costo.
  3. Si seleziona il **numero minore degli implicanti primi** che sono **rimasti**.
    - gli implicanti residui sono detti *parzialmente ridondanti*.
- Osservazione: la scelta viene fatta seguendo un criterio basato sulla pura osservazione della tabella.

- 25 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Esempio:

$$f(a, b, c, d) = \sum (0,1,2,4,5,9,10,11,13,15)$$

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Implicanti primi essenziali

$a'c'$ ;  $ad$

Implicanti primi

$a'b'd'$ ;  $b'cd'$ ;  $ab'c$ ;  $c'd$

		a, b		c, d	
		00	01	11	10
00	c, d	1	1	0	0
01	1	1	1	1	1
11	0	0	0	1	1
10	1	0	0	0	1

Completamente ridondante

- 26 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

□ Esempio (cont.):

Implicanti primi essenziali

$a'c'$ ;  $ad$

$f(a,b,c,d) = a'c' + ad + b'cd'$   
Forma minima (unica)

Tabella ottenuta dopo la selezione degli implicanti primi essenziali

	a, b				
c, d	00	01	11	10	
00	0		0	0	1 da coprire
01					
11	0	0		1	
10	1	0	0	1	

Implicanti primi

$a'b'd'$ ;  $b'cd'$ ;  $ab'c$ ;  $c'd$

↑  
Parzialmente ridondanti

- 27 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

□ Esempio:

$$f(a,b,c,d) = \sum (0,2,4,5,10,11,13,15)$$

Implicanti primi essenziali

Nessuno

Implicanti primi

$a'c'd'$ ;  $bc'd$ ;  $acd$ ;  $b'cd'$ ;  
 $a'b'd'$ ;  $a'bc'$ ;  $abd$ ;  $ab'c$

$$f(a,b,c,d) = a'c'd' + bc'd + acd + b'cd'$$

$$f(a,b,c,d) = a'b'd' + a'bc' + abd + ab'c$$

Due forme minime

	a, b				
c, d	00	01	11	10	
00	1	1	0	0	
01	0	1	1	0	
11	0	0	1	1	
10	1	0	0	1	

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

- 28 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- **Condizioni di Indifferenza (don't care)**
  - La specifica di un progetto (la descrizione di quello che si vuole progettare) contiene, spesso, delle **condizioni di indifferenza** (denominate anche *don't care* o *DC*).
  - le **condizioni di indifferenza** corrispondono a **configurazioni di ingresso per le quali il valore dell'uscita non è noto e non è neppure di interesse sapere quanto può valere**. Questo accade quando:
    - Le configurazioni di ingresso non si presentano mai;

e/o

  - Le configurazioni di ingresso impediscono all'uscita della rete - in fase di progetto - di essere osservata.

- 29 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

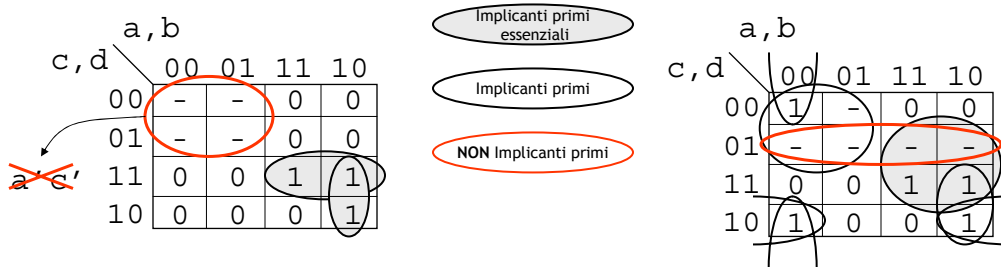
- Le configurazioni di ingresso per le quali il valore dell'uscita è non specificato vengono definite **condizioni di indifferenza** e costituiscono il  $DC_{set}$  della funzione stessa.
- Sulla tabella delle verità (o in una mappa di Karnaugh) il valore non specificato della funzione si indica il simbolo “-” (o anche “x”).
- Le **condizioni di indifferenza** sono **gradi di libertà** nel processo di sintesi.
  - In fase di sintesi, ai valori non specificati si può assegnare indifferentemente il valore 0 oppure 1 a seconda di quanto conviene per minimizzare la funzione.
  - Una **condizione di indifferenza non** deve necessariamente essere **coperta** da un implicante (forma SoP), ma **può** esserlo se questo conviene cioè se consente di:
    1. o di ridurre il numero degli implicanti;
    2. o di ridurre il numero dei letterali degli implicanti esistenti.

- 30 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

- Importante:
  1. Gli implicanti primi realizzati solamente mediante condizioni di indifferenza non hanno alcuno scopo (non servono).
  2. Un implicante primo non diventa essenziale perché è l'unico a coprire una data condizione di indifferenza.



- 31 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: **Esempio 1**

- Esempio 1:
  - Si voglia sintetizzare una funzione con quattro ingressi  $A, B, C, D$  e un'uscita  $f$ . Gli ingressi rappresentano *cifre decimali codificate in codice BCD*;
  - 1. l'uscita deve valere 1 se e solo se la cifra in ingresso è minore o uguale a 3 oppure maggiore o uguale a 8.
- Dalla specifica risulta che, delle 16 possibili configurazioni degli ingressi *solo 10 potranno effettivamente presentarsi*.
  - Nota: Codifica BCD
- In corrispondenza delle configurazioni di valori *impossibili*, non interessa il valore che la funzione può assumere
  - In questi casi, il valore dell'uscita è *non specificato*.

- 32 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: *esempio*

1

### □ Esempio 1 (cont.)

A	—	RC	f	→	
B	—				
C	—				
D	—				

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	-
1	0	1	1	-
1	1	0	0	-
1	1	0	1	-
1	1	1	0	-
1	1	1	1	-

		c, d			
		a, b			
		00	01	11	10
00		1	1	1	1
01		0	0	0	0
11		-	-	-	-
10		1	1	-	-

- 33 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: *esempio*

1

### □ Esempio 1 (cont.)

- Ignorando la presenza dei gradi di libertà introdotti dalle condizioni di indifferenza, l'utilizzo dei soli 1 porterebbe a identificare due implicanti essenziali.

		c, d			
		a, b			
		00	01	11	10
00		1	1	1	1
01		0	0	0	0
11		-	-	-	-
10		1	1	-	-

→	$f(a,b,c,d) = a'b' + c'b'$
---	----------------------------

- 34 -

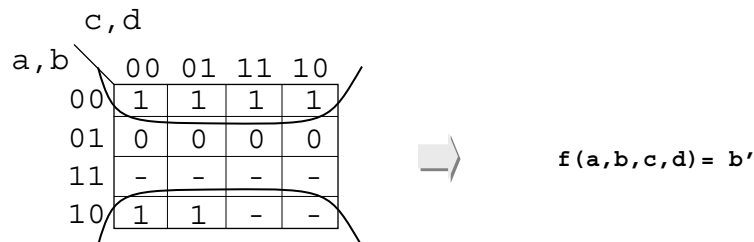


## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi esatti - Karnaugh: esempio*

1

### □ Esempio 1 (cont.)

- Servendosi delle condizioni di indifferenza si migliora il risultato riducendo il costo della realizzazione.
  - assegnando valore 1 in corrispondenza di 1010 e 1011 e valore 0 in corrispondenza delle altre configurazioni.



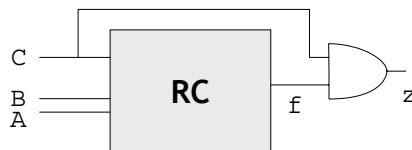
- 35 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi esatti - Karnaugh: esempio 2*

### □ Esempio 2:

- Si voglia sintetizzare la rete RC di figura soggetta ai seguenti vincoli di progetto:
  1. il valore assunto da A è sempre uguale a quello di B.
  2. Quando  $A=0; B=0$  e quando  $A=1; B=1; C=0$  il valore di  $f$  è 1 mentre, in tutti gli altri casi,  $f$  vale 0.
- Problema: Qual è la funzione associata alla rete combinatoria RC ( $f=g(a, b, c)$ )?



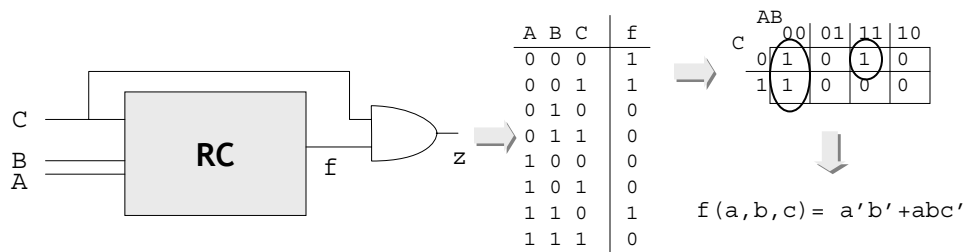
- 36 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: *esempio 2*

### □ Esempio 2 (cont.):

- si consideri il seguente esempio dove il valore di A è sempre uguale al valore di B mentre C può assumere qualunque valore. Quando A=B=0 e quando A=B=1 e C=0 il valore di f è 1 mentre, in tutti gli altri casi, f vale 0. Qual è la funzione associata alla rete combinatoria RC (f=g(a,b,c))?
- Se non facessimo alcuna considerazione né sul fatto che A deve essere uguale a B né sul contesto in cui è inserito il circuito si avrebbe:



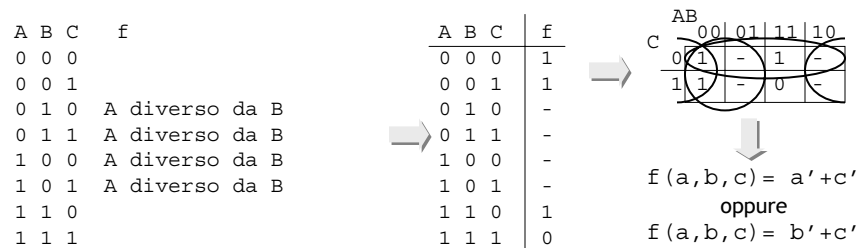
- 37 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: *esempio 2*

### □ Esempio 2 (cont.):

- si consideri il seguente esempio dove il valore di A è sempre uguale al valore di B mentre C può assumere qualunque valore. Quando A=B=0 e quando A=B=1 e C=0 il valore di f è 1 mentre, in tutti gli altri casi, f vale 0. Qual è la funzione associata alla rete combinatoria RC (f=g(a,b,c))?
- Considerando il solo **vincolo sugli ingressi**, espresso da "A è sempre uguale a B", si avrebbe:



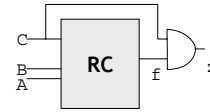
- 38 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh: *esempio 2*

### □ Esempio 2 (cont.):

- Considerando i vincoli imposti **sia sugli ingressi** **sia sulle uscite** :



Configurazioni mai prodotte dall'ambiente

A	B	C	f
0	0	0	-
0	0	1	-
0	1	0	A diverso da B
0	1	1	A diverso da B
1	0	0	A diverso da B
1	0	1	A diverso da B
1	1	0	-
1	1	1	-



A	B	C	f
0	0	0	-
0	0	1	1
0	1	0	-
0	1	1	-
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	0



Configurazioni mai osservate da Z

A	B	C	f
0	0	0	Z indipendente da f
0	0	1	-
0	1	0	Z indipendente da f
0	1	1	-
1	0	0	Z indipendente da f
1	0	1	-
1	1	0	Z indipendente da f
1	1	1	-

Il simbolo “-” indica che il valore assunto dalla uscita non ha alcuna importanza poiché:

- La configurazione degli ingressi ad esso relativa non viene mai generata
- L'uscita corrispondente alla configurazione degli ingressi non viene mai osservata

- 39 -



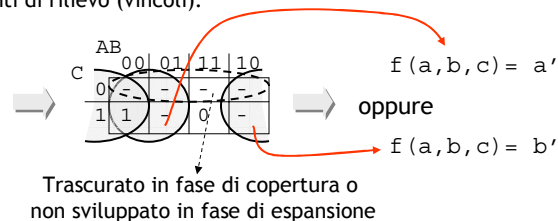
## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (*cenni*)

### □ Metodo (riassunto):

- Rispetto al caso senza condizioni di indifferenza si hanno seguenti variazioni:
  - Individuare gli implicanti primi e primi essenziali considerando le condizioni di indifferenza come se fossero 1;**
    - Nota: Si ricordi che gli implicanti primi realizzati solamente mediante condizioni di indifferenza non hanno alcun valore.
  - Coprire solo l'ON<sub>set</sub>** della funzione con gli implicanti identificati.
    - Infatti, i soli termini significativi sono gli 1 della funzione. Questi termini sono gli unici elementi di rilievo (vincoli).

### □ Esempio:

A	B	C	f
0	0	0	-
0	0	1	1
0	1	0	-
0	1	1	-
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	0



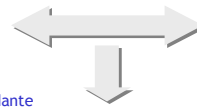
- 40 -



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (cenni)

### □ Esempio

$$f(a,b,c,d) = ON(1,11,12,13,14,15)DC(3,4,5,9)$$



a	b	c	d	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	-
0	1	0	0	-
0	1	0	1	-
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	-
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Implicanti primi essenziali

ab

Implicanti primi

$b'd$  ;  $c'd$  ;  $bc'$  ;  $ad$

Completamente ridondante

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	-	1	0
01	1	-	1	-
11	-	0	1	1
10	0	0	1	0

$$f(a,b,c,d) = ab + b'd$$

Forma minima (unica)