



Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a 2 Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Ottimizzazione e cifre di merito
Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey
Metodo di Quine-McCluskey per una funzione completamente specificata
Metodo di Quine-McCluskey per una funzione non completamente specificata

versione del 07/10/03



Sintesi di reti combinatorie a due livelli

- Obiettivo della sintesi: riduzione dei costi della rete combinatoria
- **Mappe di Karnaugh**: tecnica esatta di sintesi ottima per reti a due livelli basata su implicanti primi e copertura della funzione (SOP)
 - riduzione della complessità di una (o più) funzione(i) booleana(e) espressa(e) in forma di *Somma di Prodotti* (SOP)
- La **cifra di merito** utilizzata per guidare l'ottimizzazione è la **cardinalità** della copertura (minor numero di implicanti che coprono la funzione)
- Utilizzare la cardinalità come "indicatore di costo" significa dare peso (costo) identico a tutti i termini prodotto, indipendentemente dalla loro composizione
 - Riduzione del numero di letterali (*obiettivo secondario*)

- 2 -



Ricerca di soluzioni ottime - valutazione costi e prestazioni

- **Costi: area di silicio**
 - dipende dalla **libreria di componenti** utilizzata nella realizzazione e dalla tecnologia implementativa dei componenti (*library binding* o *mapping tecnologico*)
 - standard cell
 - semi-custom (gate array: matrice di porte logiche per le quali è possibile fissare la struttura di interconnessione in fase di progettazione)
 - componenti programmabili (CPLD, FPGA) con funzionalità ridefinibile anche in funzionamento
- **Prestazioni:**
 - **ritardo di propagazione** (o latenza): tempo intercorso tra la presentazione degli ingressi e la generazione di un valore **valido** in uscita
 - **throughput**: tempo necessario tra la presentazione di un set di ingressi e il set successivo (uguale o inferiore alla latenza)

- 3 -



Stima di costi e prestazioni

- L'unica valutazione esatta possibile è quella di portare la fase di sintesi fino alla realizzazione circuitale: **impraticabile!**
- Nella ricerca di una soluzione ottima o ottimale è necessario poter **stimare i costi e le prestazioni**:
 - al più alto livello possibile di astrazione per decidere se proseguire o interrompere la ricerca dell'ottimalità
 - tramite **cifre di merito** che rappresentino **stime indipendenti** dalla tecnologia implementativa
 - con un "basso costo" di stima:
 - il calcolo dei valori stimati deve essere rapido (poco complesso)
 - stimatori a "grana grossa" suscettibili di raffinamenti

- 4 -



Area: cifre di merito

Area di componenti e di collegamenti

- **Area porte logiche**
 - ad ogni porta è possibile associare un costo (funzione della tecnologia e del n° di ingressi per porta), se è nota la libreria
 - **Area collegamenti (wiring)**
 - non definibile se non a implementazione effettuata. In generale, viene considerata proporzionale a quella delle porte
 - **N° di letterali** presenti nella **rappresentazione fattorizzata della funzione**
 - è una delle cifre di merito adottate comunemente per la stima dell'area ed è indipendente dalla libreria tecnologica
 - motivazione: l'ampiezza di una cella che contiene un gate virtuale è proporzionale agli "strati" di silicio che, a loro volta, sono proporzionali al n° di letterali
-

- 5 -



Rappresentazione fattorizzata

- La **rappresentazione fattorizzata** di una funzione logica può essere costituita da:
 - un letterale
 - una somma di forme fattorizzate
 - un prodotto di forme fattorizzate
 - e cioè da una qualsiasi espressione algebrica con parentesi, con l'unico vincolo che l'operazione di complementazione sia applicata **solo** a singole variabili
 - le forme canoniche (SOP e POS) e ovviamente le loro ottimizzazioni sono rappresentazioni fattorizzate della funzione
-

- 6 -



Ritardo di propagazione: cifre di merito

Ritardo di propagazione del percorso critico, cioè del percorso più lungo che collega gli ingressi con l'uscita.

- **ritardo di propagazione attraverso le porte logiche** (in generale, nodi del circuito)
 - la valutazione esatta è possibile ed è funzione del fanout della porta che è noto se è nota la libreria di componenti
- **ritardo di propagazione nei segmenti di interconnessione**
 - è valutabile solo a implementazione effettuata: trascurato
- **ritardo di propagazione = $\tau \times N^\circ$ di porte che costituiscono il percorso critico**, con numero di ingressi per porta costante e τ = ritardo di propagazione in una porta AND o OR con quegli ingressi
 - è la cifra di merito adottata comunemente per la stima del ritardo di propagazione ed è indipendente dalla libreria tecnologica
 - è ricavabile direttamente dall'espressione logica

- 7 -



Area: cifre di merito in reti a 2 livelli e in reti multilivello

Reti a 2 livelli

- In generale si ricercano coperture a **cardinalità minima** nel numero di termini prodotto utilizzati.
 - E' possibile adottare criteri di costo più complessi che tengono conto anche del numero di letterali
- **Metodo di QuineMcCluskey** (ottimizzazione esatta) è più complesso del metodo di Karnaugh e consente di introdurre, in modo sistematico, **funzioni costo** anche complesse.
 - **funzione costo è di tipo additivo**
 - Il costo è associato al singolo termine prodotto e può essere rappresentato dal numero di letterali (se i costi sono identici si ottimizza la cardinalità)
 - **singola uscita**
 - **multi-uscita**: associando un costo (anche identico) al singolo termine prodotto si ottengono soluzioni con condivisione di termini prodotto tra le funzioni da realizzare

Reti multilivello

- La cifra di merito relativa all'area è il **numero di letterali**

- 8 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare (automatizzato in strumenti CAD)
 - Facile da tradurre in un algoritmo.
 - Il numero di variabili trattate è teoricamente illimitato.
 - il problema dalla identificazione sia degli implicanti primi sia della copertura ottima della funzione è di complessità esponenziale. Questo rende praticamente impossibile identificare una soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine della decina.
 - Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.
- Due fasi:
 - 1) Ricerca e identificazione di tutti **implicanti primi**;
 - 2) Ricerca e identificazione della **copertura ottima (costi)**.
 - Per semplicità si fa riferimento alla sola forma *Somma di Prodotti* (SOP). Il procedimento mostrato in questa sezione è facilmente estendibile alla forma *prodotti di somme* (POS).

- 9 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: **Prima Fase**

- La ricerca degli **implicanti primi** viene attuata applicando **sistematicamente** la semplificazione a $Z + a' Z = (a+a') Z = Z$, con Z termine prodotto
- **Identificazione degli implicanti primi:**
 - Il punto di partenza è l'insieme dei **mintermini** della funzione;
 - 1. Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto ricavati al passo precedente;
 - 2. Si semplificano tutte quelle coppie che hanno una parte comune ed una sola variabile differente;
 - 3. Da ogni semplificazione si costruisce un termine prodotto, con meno letterali, che verrà utilizzato al passo successivo
 - 4. I termini prodotto semplificati vengono marcati;
 - La marcatura rende evidente che i **mintermini/implicanti** non sono primi poiché hanno partecipato alla realizzazione di un implicante con meno letterali
 - 5. Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1
 - Il processo ha termine quando non sono più possibili delle riduzioni. I termini prodotto non marcati sono implicanti primi.

- 10 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Esempio

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Punto di partenza		
a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali
 Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali
 Nessuna Riduzione: differiscono di 3 letterali
 Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali
 Riduzione: - 1 1
 (i termini 1 1 1 e 0 1 1 vengono marcati)
 Riduzione: 1 1 -
 (i termini 1 1 1 e 1 1 0 vengono marcati)

Termine implicitamente replicato

Nota: Il confronto esaustivo risolve i problemi sia dovuti alla replicazione dei termini sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.

- 11 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Esempio (cont.)

Punto di partenza			Passo 1		
a	b	c	a	b	c
0	0	0	-	1	1
0	1	1 ✓	1	1	-
1	1	0 ✓			
1	1	1 ✓			

Nessuna Riduzione: i due termini prodotto non sono compatibili poiché nel primo manca a mentre nel secondo manca c.
Fine del processo

Implicanti primi e primi essenziali

Termini non marcati → 0 0 0; - 1 1; 1 1 -
 ↓ ↓ ↓
 a'b'c'; bc; ab

- 12 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

- Il numero dei confronti effettuati può essere ridotto: non vale la pena di confrontare quei termini che sono sicuramente diversi per più di un letterale.
 - Si costruiscono dei gruppi costituiti dallo stesso numero di 1
 - Si confrontano tra loro solo le configurazioni che appartengono a gruppi che differiscono per un solo 1.
 - Questo non garantisce che tutti i confronti siano utili; esclude solo i confronti sicuramente improduttivi
 - Esempio:

a	b	c	d
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Il gruppo 0 ed il gruppo 2 non vengono confrontati

Il gruppo 2 ed il gruppo 3 vengono confrontati (solo un confronto è produttivo)

Il gruppo 3 ed il gruppo 4 vengono confrontati (tutti i confronti sono produttivi)

- 13 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

- Algoritmo di Quine - Mc Cluskey
 - Definizioni di **insieme S_i^j** :
 - insieme dei termini prodotto, all'iterazione j , con un numero di 1 pari ad i .
 - Definizione di **etichetta**:
 - Ad ogni termine prodotto è associata una *etichetta* che **identifica l'insieme dei mintermini che esso copre**.
 - L'etichetta di un nuovo termine prodotto è ottenuta per concatenamento delle etichette dei termini da cui proviene
 - L'etichetta facilita la costruzione della tabella di copertura (seconda fase)

- 14 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Algoritmo di Quine - Mc Cluskey (cont.)

(ricorda: $i=n^\circ$ di 1, j =iterazione)

J=0;

tutti i *mintermini* appartenenti all'ON-set vengono etichettati e posti nei loro rispettivi S_1^0 ;

Ripeti

Per tutti i k che vanno da $\min(i)$ fino a $(\max(i) - 1)$

confronta ogni configurazione in S_k^j con ogni altra in S_{k+1}^j . Le configurazioni semplificate vengono marcate ed il risultato della semplificazione viene etichettato e posto in S_k^{j+1} .

J=J+1;

Fino a che non sono più possibili delle riduzioni

Tutte le configurazioni **non marcate** sono *implicanti primi o primi essenziali*

- 15 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(1,9,11,12,13,14,15)$

0001 1 ✓		-001 1, 9		
1001 9 ✓		10-1 9, 11 ✓		
1100 12 ✓		1-01 9, 13 ✓		
1011 11 ✓	→	110- 12, 13 ✓		
1101 13 ✓		11-0 12, 14 ✓		
1110 14 ✓		1-11 11, 15 ✓		
1111 15 ✓		11-1 13, 15 ✓		
		111- 14, 15 ✓		

1--1 9, 11, 13, 15
11-- 12, 13, 14, 15

Implicanti Primi e
primi essenziali:

P0 (1,9): $b' c' d$

P1 (9,11,13,15): $a d$

P2 (12,13,14,15): $a b$

- 16 -

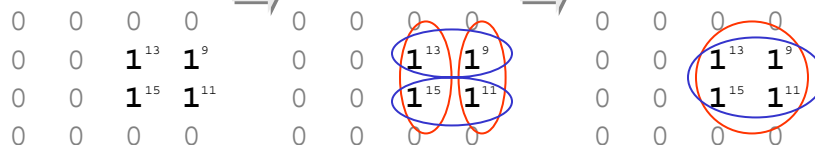


Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Osservazione

1001	9	✓
1011	11	✓
1101	13	✓
1111	15	✓

10-1	9,11	✓
1-01	9,13	✓
1-11	11,15	✓
11-1	13,15	✓
1--1	9,11,13,15	
1--1	9,11,13,15	



Il confronto esaustivo identifica **tutti** i possibili raggruppamenti. Nei passi intermedi il numero dei termini può aumentare considerevolmente per poi ridursi nei passi conclusivi

- 17 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Prima Fase*

□ Esempio

0001	1	✓	00-1	1,3	✓	0--1	1,3,5,7	✓	---1	1,3,5,7,9,11,13,15
0011	3	✓	0-01	1,5	✓	-0-1	1,3,9,11	✓		
0101	5	✓	-001	1,9	✓	--01	1,5,9,13	✓		
1001	9	✓	0-11	3,7	✓	--11	3,7,11,15	✓		
0111	7	✓	-011	3,11	✓	-1-1	5,7,13,15	✓		
1011	11	✓	01-1	5,7	✓	1--1	9,11,13,15	✓		
1101	13	✓	-101	5,13	✓					
1111	15	✓	10-1	9,11	✓					
			1-01	9,13	✓					
			-111	7,15	✓					
			1-11	11,15	✓					
			11-1	13,15	✓					

- 18 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Identificare un sotto insieme degli implicanti ottenuti dalla prima fase (scelta degli implicanti) tale per cui nessun 1 della funzione rimanga scoperto
- Si fa uso della *tabella degli implicanti* o *tabella di copertura*.
 - É una matrice binaria dove:
 - Gli indici di riga sono gli **implicanti primi** identificati
 - Gli indici di colonna sono i **mintermini** appartenenti all'ON-set della funzione.
 - elementi $a_{i,j}$ della matrice sono pari a x (o 1) quando l'implicante i_{esimo} copre il *mintermine* j_{esimo} ; altrimenti nulla (o 0)

P0 (1, 9) : b'c'd
P1 (9, 11, 13, 15) : ad
P2 (12, 13, 14, 15) : ab



	1	9	11	12	13	14	15
P0	x	x					
P1		x	x		x		x
P2				x	x	x	x

- 19 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- **Funzione costo**
- Il costo si introduce aggiungendo di fianco alla colonna degli implicanti il loro costo (il numero di letterali).
- Nel metodo a singola uscita, se l'indicazione di costo viene omessa, si intende che gli implicanti hanno tutti lo stesso costo e quindi si procede solo minimizzando la cardinalità della copertura

- 20 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Il problema della copertura è intrattabile (NP completo):
 - Si utilizzano criteri di *essenzialità* e *dominanza* per ridurre la complessità del problema (ridurre le dimensioni della tabella).
 - Successivamente si utilizza *Branch&Bound*
- Le relazioni tra gli implicanti identificati e i *mintermini* da coprire che permettono la **semplificazione della tabella di copertura** sono:
 - **Criterio di Essenzialità** (non è legato alla funzione costo)
 - È un **criterio di scelta** (inserisce elementi nell'insieme di copertura) e, di conseguenza, di **semplificazione** poiché identifica ed estrae degli implicanti primi essenziali;
 - **Criterio di Dominanza**
 - È un **criterio di sola semplificazione** poiché riduce la dimensione della tabella di copertura eliminando righe (*implicanti/mintermini*) o colonne (*mintermini*) senza operare alcuna scelta
 - Dominanza di riga (è legato alla funzione costo);
 - Dominanza di colonna (non è legato alla funzione costo)
 - Una volta applicata l'essenzialità potresti fare una ricerca esaustiva

- 21 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Criterio di Essenzialità:

- Descrizione:
 - Se una colonna contiene **una sola x**, la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (*riga essenziale*).
- Semplificazione:
 - La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
P0	x	x									x
P1		x	x				x		x		
P2				x	x	x	x				x
P3	x		x	x		x	x	x		x	
P4	x	x			x	x		x	x		

→

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: \emptyset Insieme di copertura: {P3}

- 22 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Criterio di dominanza di riga:

- Descrizione:

- Un **implicante** i -esimo domina un implicante j -esimo quando P_i copre almeno tutti i *mintermini* coperti da P_j . Se viene mantenuto **solo** P_i nella tabella, la sua eventuale scelta non comporterà un costo maggiore di quello che si avrebbe scegliendo P_j .

- Semplificazione:

- P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga).

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

→

	B	E	I	K
P0	x			x
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: {P3}

Insieme di copertura: {P3}

- 23 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Criterio di dominanza di riga e costi (cont.):

- Descrizione:

- Un **implicante** i -esimo domina un implicante j -esimo quando P_i copre almeno tutti i *mintermini* coperti da P_j e ha un costo minore o uguale a P_j . Se viene mantenuto **solo** P_i nella tabella, la sua eventuale scelta non comporterà un costo maggiore di quello che si avrebbe scegliendo P_j .

- 24 -

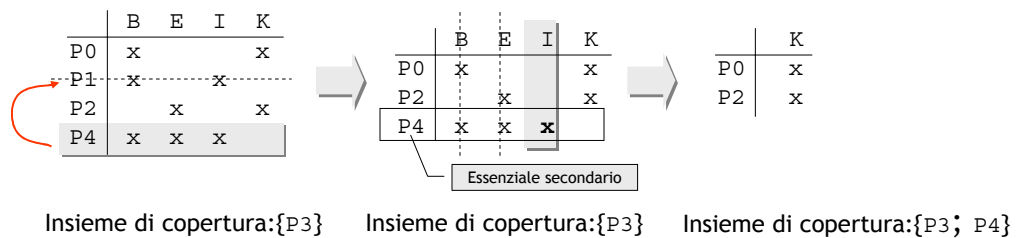


Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Criterio di dominanza di riga (cont.):

- Estrazioni Indotte:

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
- Poiché questi ultimi divengono essenziali a causa di eliminazioni di riga, le righe ad essi associate vengono chiamate *righe essenziali secondarie* (implicanti primi secondari).



- 25 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Dominanza tra colonne:

- Descrizione:

- Un *mintermine* i -esimo domina un *mintermine* j -esimo quando ogni implicante che copre m_j copre anche m_i .
- m_j è generato da tutti gli implicanti di m_i e da qualcuno in più. Per semplificare le scelte nella tabella, mantengo solo il mintermine che genera minori scelte, ma che assicura la copertura anche di quello con un maggior numero di scelte.

- Semplificazione:

- m_j è eliminato dalla tabella. La semplificazione eseguita porta ad una copertura di costo non maggiore di quello che si otterrebbe mantenendo entrambi i mintermini, qualunque sia il costo associato ai termini prodotto stessi.

- 26 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Dominanza tra colonne (cont.):

- Significato:

- Coprire il mintermine m_i induce la copertura anche di m_j .

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: {P3}

→

	E	I	K
P0			x
P1		x	
P2	x		x
P4	x	x	

Insieme di copertura: {P3}

- 27 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica (non riducibile): **tabella ciclica degli implicanti primi**. Se la tabella è vuota, è stato determinato l'insieme di copertura.
- La scelta degli implicanti, in una tabella non riducibile, richiede l'uso di altri criteri:
 - Branch and Bound (B&B) - esponenziale con la dimensione della tabella ridotta
- Procedura per l'identificazione dell'insieme di copertura
 1. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali primari;
 2. Applicazione della dominanza di colonna e di riga;
 3. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali secondari; se ne esistono si ritorna al passo 2, altrimenti vai al passo 4;
 4. Applicazione di un algoritmo di B&B

- 28 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: **Branch&Bound**

- **Branch&Bound**: ogni scelta (branch) corrisponde ad un ramo dell'albero delle scelte
 - Si sceglie un implicante primo P_i come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da P_i dalla tabella di copertura.
 - La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che **possono** portare direttamente ad una soluzione finale S_i di costo C_i .
 - Se la tabella ottenuta dalle semplificazioni, non è riducibile si sceglie un secondo implicante P_j tra quelli rimasti (considerando quindi come possibile copertura parziale la coppia $P_i P_j$) iterando il procedimento di semplificazione e così fino a coprire la funzione a costo C_i .
 - Una volta individuata una soluzione si risale nell'albero, per esaminare le scelte rimaste.
 - Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (*bound*) e si confronta il costo ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata.

- 29 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: **Branch&Bound**

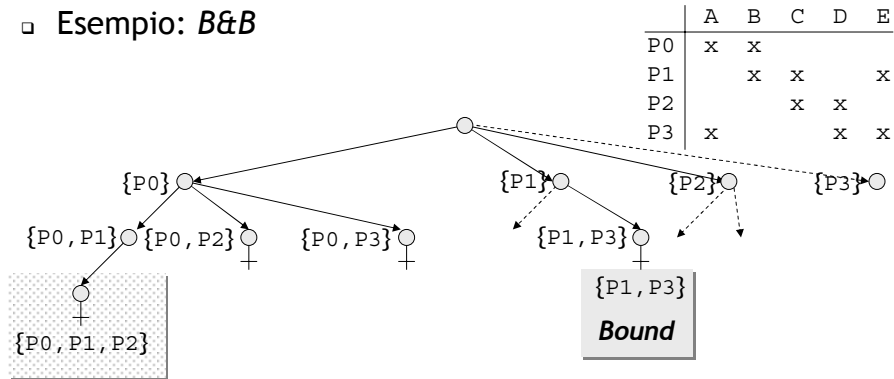
- Metodo che genera molte possibili soluzioni attraverso un processo di ricerca che può crescere esponenzialmente con le dimensioni della funzione.
- Ottimalità garantita solo se si esaminano tutte le possibili alternative.

- 30 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

□ Esempio: *B&B*



Dalla scelta di P0, si procede scegliendo P1 e quindi P2, identificando la soluzione {P0,P1,P2}. Il ramo {P0,P1,P3} non viene esaminato perché porterebbe ad un soluzione dello stesso costo di quella individuata. Si risale fino a P0 per esaminare le soluzioni derivate dalla scelta {P0,P2}, e così via. Individuata la soluzione {P1,P3}, questa costituisce il nuovo bound e, nell'esempio, il procedimento di ricerca termina perché tutte le altre soluzioni sono di costo non inferiore a 2 implicanti.

- 31 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(1,4,5,6,9,13,14,15)$

0001 1 ✓	0-01 1,5 ✓	➔	--01 1,5,9,13
0100 4 ✓	-001 1,9 ✓		
0101 5 ✓	010- 4,5		
0110 6 ✓	01-0 4,6		
1001 9 ✓	-101 5,13 ✓		
1101 13 ✓	-110 6,14		
1110 14 ✓	1-01 9,13 ✓		
1111 15 ✓	11-1 13,15		
	111- 14,15		

Implicanti Identificati:

- P0(1,5,9,13): $c'd$
- P1(4,5): $a'bc'$
- P2(4,6): $a'bd'$
- P3(6,14): bcd'
- P4(13,15): abd
- P5(14,15): abc

- 32 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

□ Esempio (cont.):

Essenzialità

	1	4	5	6	9	13	14	15
P0	x		x		x	x		
P1		x	x					
P2		x		x				
P3				x			x	
P4						x		x
P5							x	x

Insieme di copertura: {P0}

Dominanza di riga

	4	6	14	15
P1	x			
P2	x	x		
P3		x	x	
P4				x
P5			x	x

Insieme di copertura: {P0}

Essenzialità secondaria

	4	6	14	15
P2	x	x		
P3		x	x	
P5			x	x

Insieme di copertura: {P0, P2, P5}

$f(a, b, c, d) = c'd + a'bc' + abc$

- 33 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey : DC

□ L'estensione alle funzioni *non completamente specificate* richiede l'aggiunta delle seguenti regole:

- Ricerca degli implicanti primi:
 - Nel passo relativo alla generazione degli implicanti primi, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.
- Ricerca della copertura ottima:
 - Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini appartenenti all'ON-set.
 - L'ON-set rappresenta l'insieme dei termini che vincola la funzionalità da realizzare.
 - Il DC-set è l'insieme dei termini che rappresenta i gradi di libertà per realizzare la funzionalità stessa: non è obbligatorio sceglierli, può essere conveniente

- 34 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: DC

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(0,2,12,13) \text{ DC}(4,5)$

0000	0 ✓		00-0	0,2	
0010	2 ✓		0-00	0,4	
0100	4 ✓	→	010-	4,5 ✓	→
0101	5 ✓		-100	4,12 ✓	-10- 4,5,12,13
1100	12 ✓		-101	5,13 ✓	
1101	13 ✓		110-	12,13 ✓	

Implicanti Identificati:

- P0: $a'b'd'$
- P1: $a'c'd'$
- P2: bc'

		Essenziali			
		0	2	12	13
P0	x	x			
P1	x				
P2			x	x	

⇒ $f(a, b, c, d) = a'b'd' + bc'$