



Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Metodo di Quine-McCluskey per più funzioni

versione del 22/10/03



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: **Multi-Uscita**

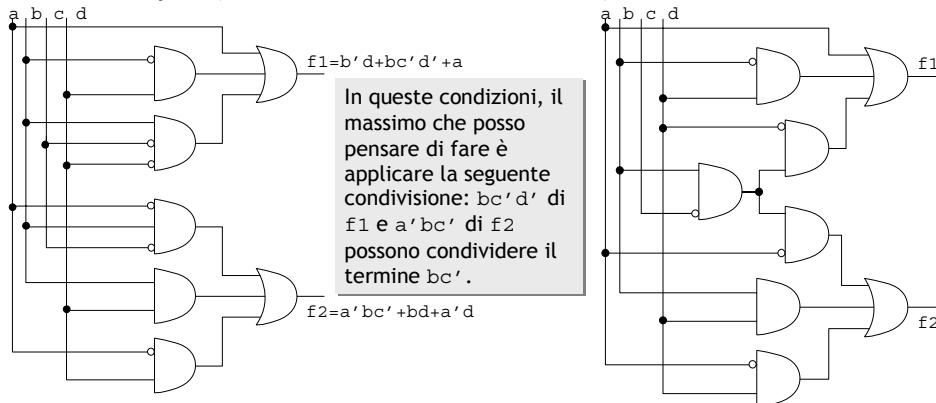
- Nel caso di funzioni a più uscite una prima soluzione consiste nel minimizzare le funzioni singolarmente.
- Il risultato ottenuto potrebbe risultare non ottimale se si considera che le funzioni potrebbero condividere degli implicanti riducendo il costo.
- Gli **implicanti** che possono essere **condivisi non sono necessariamente primi per le funzioni prese singolarmente**
 - Se prese singolarmente, le forme ottenute per le funzioni possono non essere minime
- Gli implicanti che possono essere condivisi sono **implicanti primi ma di più funzioni**.
- Come si ottengono gli **implicanti primi di più funzioni?**

- 2 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio (cardinalità=cifra di merito):



Forma ottima senza condivisione:
cardinalità copertura=6

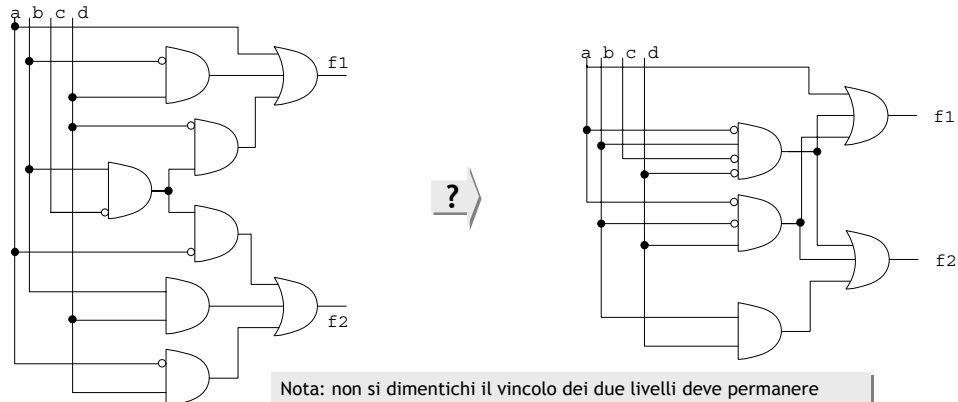
Forma sub-ottima con condivisione:
cardinalità copertura=7

- 3 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio (cardinalità=cifra di merito):



Forma sub-ottima con condivisione

Forma ottima con condivisione:
cardinalità copertura =4

- 4 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

□ Esempio (cont.) (cardinalità=cifra di merito):

- Giustificazione del risultato
Senza condivisione

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₁	00	0	1	1	1
	01	1	0	1	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	1	1

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₂	00	0	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	0	0

Con condivisione

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₁	00	0	1	1	1
	01	1	0	1	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	1	1

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₂	00	0	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	0	0

Nota:
Gli
implicanti
condivisi non
sono primi
per f₁ e f₂
prese
singolarmente

- 5 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

□ Esempio (cont.) (cardinalità=cifra di merito):

- Giustificazione del risultato

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₁	00	0	1	1	1
	01	1	0	1	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	1	1

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₂	00	0	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	0	0

f₁·f₂

a,b	c,d	00	01	11	10
f ₁ ·f ₂	00	0	1	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	0	0	0	0

Nota: gli implicanti primi
di f₁·f₂ che conviene
utilizzare sono solo 2.
La scelta è un problema
legato alla copertura
ottima delle funzioni.

Inutile perché già coperto
da implicanti primi di
dimensioni maggiori delle
singole funzioni

- 6 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- In generale, oltre agli implicanti primi delle singole funzioni è necessario considerare anche tutti gli implicanti ottenuti combinando in tutti i modi possibile le funzioni da minimizzare.
 - Il numero delle combinazioni possibili con N funzioni è $2^N - 1$.
 - Ad esempio, con tre funzioni le combinazioni possibili sono: f_1 , f_2 , f_3 , $f_1 * f_2$, $f_1 * f_3$, $f_2 * f_3$, $f_1 * f_3 * f_3$
- Si osservi che il metodo analizzato potrebbe essere applicato anche alle *mappe di Karnaugh*. Comunque, tale metodo è limitato sia dal numero delle variabili sia dalla quantità di tabelle da realizzare
 - Ad esempio, 10 funzioni implicherebbero la realizzazione di 1023 tabelle.
- Il metodo di Quine-Mc Cluskey collassa tutte le informazioni in una unica tabella.
 - Il numero degli implicanti primi estratti resta lo stesso mantenendo il problema di copertura della stessa complessità.

- 7 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- L'utilizzo del metodo a più funzioni **completamente specificate o non completamente specificate** richiede l'applicazione delle seguenti estensioni:
 - **Costruzione della tabella**
 - si procede come per il caso scalare con la differenza che si associa ad ogni **mintermine** un ulteriore "**identificatore**" costituito da tanti bit quante sono le funzioni considerate
 - l'identificatore consente di individuare a quale funzione/i appartiene il mintermine. Quindi, un bit dell'identificatore assume valore 1 se e solo se la funzione che ad esso corrisponde contiene tale mintermine; 0 in caso contrario.

- 8 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio1: $F = |f_1 f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

	f_1	f_2
0000	0	10
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	11
0101	5	11
1100	12	10
1011	11	01
1101	13	11



Mappa di Karnaugh di f_1
a,b

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	x	1	0
01	0	x	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

Mappa di Karnaugh di f_2
a,b

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	x	1	0
11	0	0	0	x
10	0	0	0	0

- 9 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio2: $F = |f_1 f_2| = |ON_1(8,10,11,14,15) ON_2(4,8,11,12,15)|$

0100	4	01
1000	8	11
1010	10	10
1100	12	01
1011	11	11
1110	14	10
1111	15	11



Mappa di Karnaugh di f_1
a,b

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Mappa di Karnaugh di f_2
a,b

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

- 10 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Generazione di implicanti primi

- La generazione dell'implicante segue le stesse modalità viste per il caso scalare.
- L'identificatore delle funzioni di ogni nuovo implicante viene ottenuto come AND bit a bit dei due indicatori.
 - **Nota:** se l'indicatore ottenuto è 00...0 il nuovo implicante non è una espansione valida (cioè non appartiene a nessuna funzione) e non viene riportato.
- Viene *marcata*, ossia coperta da un implicante di livello superiore, quella *configurazione il cui indicatore è uguale al risultato dell'AND eseguito* (l'implicante di livello superiore copre quello di livello inferiore per le stesse funzioni).

Ad esempio, se consideriamo i due mintermini

- 011 3 101 e 001 1 011 si ottiene l'implicante 0-1 1,3 001
- e nessun mintermine viene marcato come coperto.

- 11 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Quattro casi possibili - esempi:

- L'identificatore di appartenenza risultante è 000...000
 - La configurazione ottenuta non corrisponde a nessuna espansione valida poiché non appartiene a nessuna delle funzioni.

```

0000  0 1100
      AND
0001  1 0011
      ↳ Passo 1 nessun risultato 0000
  
```

- L'identificatore di appartenenza risultante non coincide con nessun identificatore di partenza
 - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida ma non coinvolge tutte le funzioni ne del primo ne del secondo implicante coinvolto.

```

1100  12 1110
      AND
1101  13 0111
      ↳ Passo 1 110- 12,13 0110
  
```

- 12 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio 2 (cont.)

-100	4,12	01	P1
10-0	8,10	10	P2
1-00	8,12	01	P3
<hr/>			
101-	10,11	10	✓
1-10	10,14	10	✓
<hr/>			
1-11	11,15	11	P4
111-	14,15	10	✓

1-1- 10,11,14,15 10

P0

Mappa di Karnaugh di f_1

a,b	00	01	11	10
c,d	00	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Mappa di Karnaugh di f_2

a,b	00	01	11	10
c,d	00	0	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Raggruppamento
NON valido per f_2

- 17 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Tabella di Copertura

- la tabella di copertura è ottenuta per giustapposizione delle tabelle relative ad ogni funzione in cui si riportano i soli termini del ONset.

Esempio1 (Cont.): $F = |f_1 \ f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \ ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

P0:	1011	11	01
P1:	00-0	0,2	10
P2:	0-00	0,4	10
P3:	0-01	1,5	01
P4:	010-	4,5	11
P5:	-101	5,13	11
P6:	-10-	4,5,12,13	10



	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

- 18 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Identificazione della copertura ottima

- si applica in maniera simile al caso di singola uscita con alcune differenze.
- **costi e copertura**: quando un termine prodotto viene scelto per la prima volta e inserito nella copertura di una o più funzioni, il suo costo viene portato a 0 (diventa un *buon candidato* a essere scelto anche in altre funzioni)
- **Essenzialità**:
 - se l'implicante in oggetto è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte la riga viene eliminata (scelta dell'implicante) così come tutte le colonne coperte.
 - l'implicante in oggetto **non** è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte (una o più funzioni hanno tale l'implicante non essenziale), la riga viene mantenuta e viene scelto tale implicante per le funzioni per cui è essenziale; in queste ultime vengono eliminate le sole colonne coperte.

- 19 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Identificazione della copertura ottima (cont.).

- si applica in maniera simile al caso di singola uscita con le seguenti differenze:
- **Dominanza di riga**
 - Si guarda l'intera riga. Come per il caso di funzioni ad una sola uscita.
- **Dominanza di colonna**
 - La dominanza di colonna ha validità solo all'interno di una funzione. Una colonna della funzione f_i non può coprire né essere coperta da una colonna presente nella funzione f_k .

- 20 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio 1 (cont.):

	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

Nota:
nella scelta di P5 a causa della sua essenzialità in f2 per 13, la riga eliminata è solo quella in corrispondenza di f2 poiché P5 non è essenziale per f1.

Le espressioni Booleane sono

$$f1 = P1 + P6$$

$$f2 = P3 + P4 + P5$$

Si osservi che non ci sono termini comuni.

- 21 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio 2 (cont.):

	f1					f2				
	8	10	11	14	15	4	8	11	12	15
P0	x	x	x	x						
P1						x			x	
P2	x	x								
P3							x		x	
P4			x		x			x		x
P5	x						x			

Soluzione parziale: estrazione degli essenziali
 $f1: \{P0\}$
 $f2: \{P1, P4\}$

- 22 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio di copertura completo:

	f1					f2					f3															
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15
P0						x			x	x	x															
P1			x	x						x	x															
P2					x	x	x	x																		
P3											x	x	x	x	x	x	x	x								
P4		x	x						x	x		x			x		x		x							x
P5	x	x							x	x			x	x			x	x								
P6			x	x								x		x												
P7																								x		x
P8									x															x	x	
P9					x	x																	x	x		
P10														x	x			x	x			x	x			x
P11				x											x							x				x

Identificazione ed estrazione degli essenziali

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

- 23 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio di copertura completo con costo identico per tutti gli implicant (a)

		f1					f2					f3			
	C	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
1	P0					x	x	x							
1	P1	x	x				x	x							
1	P2			x	x										
1	P3							x	x	x	x	x	x	x	
1	P4				x				x			x		x	
0	P5							x	x			x	x		
0	P6	x	x												
1	P7														x
1	P8						x	x							x
0	P9					x	x								
0	P10									x			x	x	
1	P11			x											x

dominanza di riga

Soluzione parziale

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

- 24 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (b)

C		f1					f2					f3			
		5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
1	P0				x	x	x								
1	P1	x	x				x	x							
1	P3							x	x	x	x	x	x	x	
1	P4		x				x		x		x			x	
0	P5							x	x		x	x			
0	P6	x	x												
1	P7					x	x								x
1	P8				x	x									x
0	P9			x	x										
0	P10								x				x	x	

dominanza di colonna

Soluzione parziale
f1: {P5}
f2: {P6}
f3: {P9; P10}

- 25 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (c)

C		f1				f2				f3
		5	8	13	15	2	6	14	15	13
1	P0			x	x					
1	P1	x		x	x					
1	P3					x	x	x	x	
1	P4			x				x		
0	P5					x				
0	P6	x								
1	P7			x	x					x
1	P8			x	x					x
0	P9		x							
0	P10					x	x	x		

righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale
f1: {P5, P9}
f2: {P6}
f3: {P9; P10}

- 26 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (d)

C		f1			f2			f3
		5	13	15	2	6	14	15
1	P1	x	x	x				
1	P3				x	x	x	x
1	P4			x				x
0	P5				x			
0	P6	x						
1	P7		x	x				x
0	P10				x	x	x	

dominanza di colonna

Soluzione parziale

f1: {P5, P9}

f2: {P6}

f3: {P9; P10}

- 27 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (e)

C		f1			f2		f3
		5	13	15	2	6	13
1	P1	x	x	x			
1	P3				x	x	
1	P4			x			
0	P5				x		
0	P6	x					
0	P7		x	x			x
0	P10				x		

Righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale

f1: {P5, P9}

f2: {P6}

f3: {P9, P10, P7}

- 28 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (f)

C		f1			f2	
		5	13	15	2	6
1	P1	x	x	x		
1	P3				x	x
0	P5				x	
0	P6	x				
0	P7		x	x		
0	P10					x

dominanza di colonna

Soluzione parziale
f1: {P5, P9}
f2: {P6}
f3: {P9, P10, P7}

- 29 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ (g)

C		f1		f2	
		5	13	2	6
1	P1	x	x		
1	P3			x	x
0	P5			x	
0	P6	x			
0	P7		x		
0	P10				x

Le espressioni Booleane sono

$$f1 = P5 + P9 + P6 + P7$$

$$f2 = P6 + P5 + P10$$

$$f3 = P9 + P10 + P7$$

$$P5 = \dots$$

$$P9 = \dots$$

$$P6 = \dots$$

$$P7 = \dots$$

$$P10 = \dots$$

Tabella ciclica

scelta dei rimanenti implicanti per completare la copertura

f1: per coprire 5 e 13 posso scegliere P1 (costo 1) oppure P6 e P7 (costo 0).

Si sceglie **P6 e P7**

f2: per coprire 2 e 6 posso scegliere P3 (costo 1) oppure P5 e P10 (costo 0).

Si sceglie **P5 e P10**

Soluzione finale

$$f1: \{P5, P9, P6, P7\}$$

$$f2: \{P6, P5, P10\}$$

$$f3: \{P9, P10, P7\}$$

Cardinalità della copertura = 5

- 30 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Osservazioni:

Tablelle Cicliche

- É possibile applicare le tecniche viste per il caso di singola funzione con alcuni accorgimenti.
 - *B&B* viene applicato considerando le singole funzioni separatamente cioè non viene imposto che un implicante copra mintermini di funzioni differenti. L'aumento della complessità è notevole a causa dell'aumento dei gradi di libertà
 - » L'uso di un implicante per una funzione può essere applicato anche ad un'altra; come conseguenza lo stesso implicante può comparire più volte nell'albero di copertura.

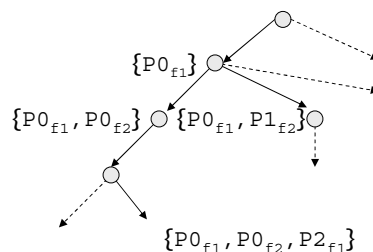
- 31 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Esempio

	f1					f2				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
P0	x	x					x	x		
P1		x	x	x				x	x	
P2			x	x		x		x	x	
P3	x		x	x			x			x
P4	x	x	x	x		x	x			



- 32 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Osservazioni:

2. Cardinalità e costo

- L'identificazione della copertura ottima si può considerare, oltre alla cardinalità della copertura, anche il costo di ogni implicante.
 - Il costo, ad esempio, potrebbe essere utilizzato come fattore discriminante nella dominanza di riga quando le righe sono uguali.
- L'aggiunta del costo di ogni implicante potrebbe aumentare il livello di precisione nella ricerca della soluzione. Comunque, oltre ad aumentare la complessità algoritmica, tale livello di precisione potrebbe essere assolutamente inutile se si considera che il collegamento alla libreria tecnologica (*library binding*) cambia la struttura del circuito e, come conseguenza, il costo della realizzazione.
 - In media, due soluzioni che differiscono nel costo stimato del 10%-20% sono da considerarsi equivalenti.

- 33 -

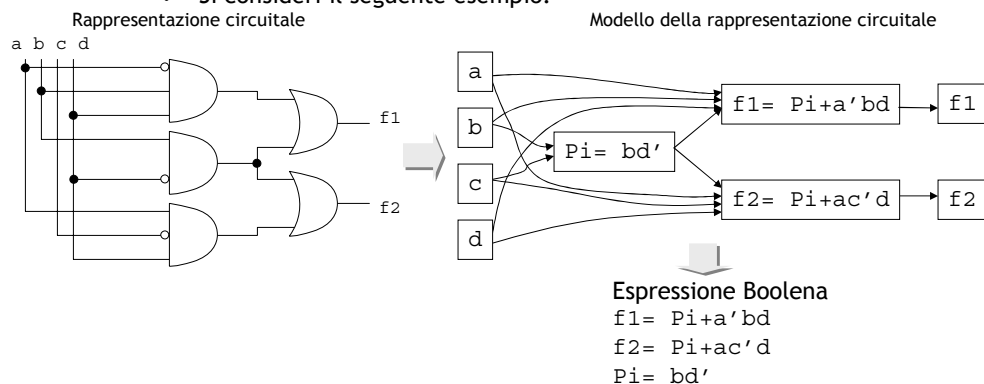


Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Osservazioni: *calcolo del costo in letterali*

3. Implicanti di più funzioni e espressione algebrica

- Si consideri il seguente esempio:



- 34 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: *Multi-Uscita*

□ Osservazioni: **calcolo del costo in letterali**

1. per rappresentare la condivisione nelle espressioni algebriche ogni **implicante comune** a più funzioni viene descritto da una **specificazione espressione algebrica** (nell'esempio riportato, P0, P1, P5 e P8).
2. Il **descrittore** della funzione algebrica di ogni implicante comune a più funzioni viene **utilizzato come letterale** e compare nelle espressioni booleane delle funzioni che ne fanno uso.

Soluzione

F1: { P0, P3, P5, P8 }
F2: { P1, P5, P8 }
F3: { P1, P8 }
F4: { P0, P6, P8 }



Espressioni Booleane

F1=P0+a'bd'+P5+P8;
F2=P1+P5+P8;
F3=P1+P8;
F4=c'd'+P0+P8;
P0=a'b'd;
P1=a'b'c;
P5=b'c';
P8=abcd;

Il costo è di 27 letterali

- 35 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Espresso-Exact

□ Espresso-Exact

- Algoritmo implementato in *Espresso* per la minimizzazione esatta.
- I principi su cui si basa sono gli stessi della procedura di Quine-Mc Cluskey (algoritmi utilizzati sono un po' diversi).
- In Espresso-exact gli implicanti sono partizionati in tre insiemi:
 - Essenziali.
 - Totalmente ridondanti: sono quelli coperti da implicanti essenziali e dal DC-set.
 - Parzialmente ridondanti: i rimanenti. Questo ultimo insieme è l'unico ad essere coinvolto nella fase di copertura.
- Una tabella di copertura ridotta è ottenuta ponendo come indici di riga i soli implicanti parzialmente ridondanti. Gli indici di colonna sono in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei mintermini.
- La tabella è più compatta rispetto a quella ottenuta con Quine-Mc Cluskey e non ha colonne essenziali.

- 36 -