



Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo Euristico

Introduzione

Metodo Euristico per reti a due livelli

Approfondimenti

versione del 15/10/03



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici*

- La minimizzazione esatta ha due problemi:
 - L'enorme numero di implicanti primi.
 - Può essere dimostrato che il numero degli implicanti primi di una funzione logica di n ingressi può essere maggiore di $3^n/n$.
 - L'intrattabilità del problema di copertura.
 - E' un problema *NP*-completo.
- Soluzione:
 - Miglioramento iterativo della soluzione.
 - Partendo da una **condizione iniziale** (*specifiche della funzione*) la **copertura** è modificata per **cancellazione**, **aggiunta** e **modifica di implicanti** fino a che non è raggiunta una **condizione di minimalità** (quando nessuna delle operazioni porta a successivi miglioramenti).



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici*

- I metodi euristici di minimizzazione differiscono per *qualità* della soluzione.
 - **Qualità**: Differenza in cardinalità tra la copertura minimale (euristica) e quella minima (ottenuta con metodi esatti).
- Le soluzioni prodotte da **Espresso** (standard per minimizzazione logica a 2 livelli) coincidono spesso con quelle di *Espresso-Exact*, ma in tempi più brevi.
 - Procedura di minimizzazione:
 - **Ingresso**: Lista dei mintermini/implicanti (ON-set) ed il DC-set della funzione.
 - **Condizione iniziale**: La lista degli implicanti rappresenta la copertura iniziale della funzione.
 - **Sviluppo**: La copertura iniziale viene iterativamente manipolata da alcuni operatori.
 - **Termine**: L'operazione si conclude quando nessun operatore migliora la copertura.



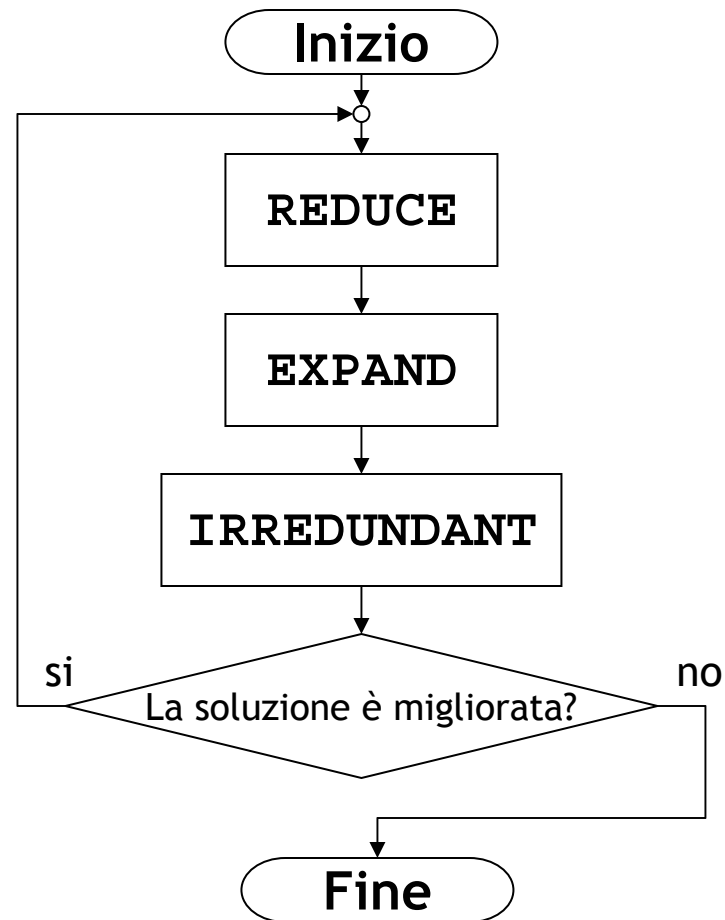
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici: operatori*

- Gli operatori utilizzati da Espresso sono:
 - **Expand**
 - espande i cubi rendendoli primi eliminando eventuali cubi coperti.
 - la copertura ottenuta risulta costituita da soli implicanti primi (*copertura prima*)
 - **Reduce**
 - riduce i cubi per consentire di uscire da minimi locali in cui si è giunti dopo l'espansione
 - la copertura ottenuta dopo una riduzione non è più costituita da soli implicanti primi ma è della **stessa cardinalità** di quella di partenza.
 - Non è aumentato il numero degli implicanti
 - **Irredundant**
 - elimina i cubi ridondanti
 - modifica la cardinalità della copertura riducendola.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici*

- Algoritmo:





Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio:

Condizione iniziale:

deriva direttamente dalle specifiche del problema

c, d \ a, b		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 4

Costo in letterali: 14

Nota: copertura non prima. Inoltre, non serve la riduzione poiché non ci sono cubi sovrapposti

Expansione

c, d \ a, b		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 3

Costo in letterali: 8

Nota: copertura prima. Inoltre, non esistono implicanti ridondanti

Mintermine eliminato poiché coperto durante l'espansione



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici*

- Esempio (cont.): la soluzione è migliorata, quindi si prosegue

		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 3

Costo: 8

Nota: copertura prima



Riduzione

		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 3

Costo: 9

Nota: copertura non prima



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici*

□ Esempio (cont.):

c, d \ a, b		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 3

Costo: 9

Nota: copertura non prima



Espansione

c, d \ a, b		a, b			
		00	01	11	10
c, d	00	0	0	1	1
	01	0	0	-	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	-	1

Cardinalità: 3

Costo: 7

Nota: copertura prima

Fine della procedura (l'applicazione di una riduzione porta alla soluzione individuata al passo precedente)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio 2:

Card.: 4
Costo: 8

		a, b			
	c, d	00	01	11	10
00		1	1	0	0
01		1	1	1	1
11		0	0	1	1
10		1	1	1	1

Riduzione

		a, b			
	c, d	00	01	11	10
00		1	1	0	0
01		1	1	1	1
11		0	0	1	1
10		1	1	1	1

Card.: 4
Costo: 10

Espansione
Card.: 4
Costo: 8

		a, b			
	c, d	00	01	11	10
00		1	1	0	0
01		1	1	1	1
11		0	0	1	1
10		1	1	1	1

Irredundant
Card.: 3
Costo: 6

		a, b			
	c, d	00	01	11	10
00		1	1	0	0
01		1	1	1	1
11		0	0	1	1
10		1	1	1	1



Sintesi Combinatoria

Sintesi di reti combinatorie a due livelli
Metodo Euristicico

Approfondimento



Sintesi di reti combinatorie a due livelli:

Metodi euristici - *Expand*

□ **Expand**

- Gli implicanti relativi alla copertura sono rielaborati uno alla volta. Ogni implicante è espanso a primo e tutti gli implicanti da esso coperti sono eliminati.
- L'operatore Expand rende la copertura prima e minimale. L'espansione di un implicante è realizzata aumentando il sotto cubo ad esso associato in una o più direzioni e verificando se l'espanso è ammissibile
- **Verifica dell'ammissibilità dell'espansione:**
 - Una espansione è ammissibile se l'implicante ottenuto non interseca l'OFF-set. (E' richiesta la conoscenza dell'OFF-set e questo può essere pesante in termini di memoria utilizzata.)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Expand*: *verifica ammissibilità*

□ Esempio:

OFF-Set: $a'c' + ab'd + a'd'$

Espansione rispetto ad a di $ac'd'$ è $c'd'$
espansione non ammissibile

Verifica ammissibilità:

$OFF\text{-Set} * (c'd') = a'c'd' \neq 0$
non ammissibile poiché l'intersezione
con l'OFF-set non è nullo

a, b

c, d

	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Implicante da espandere: $a c'd'$

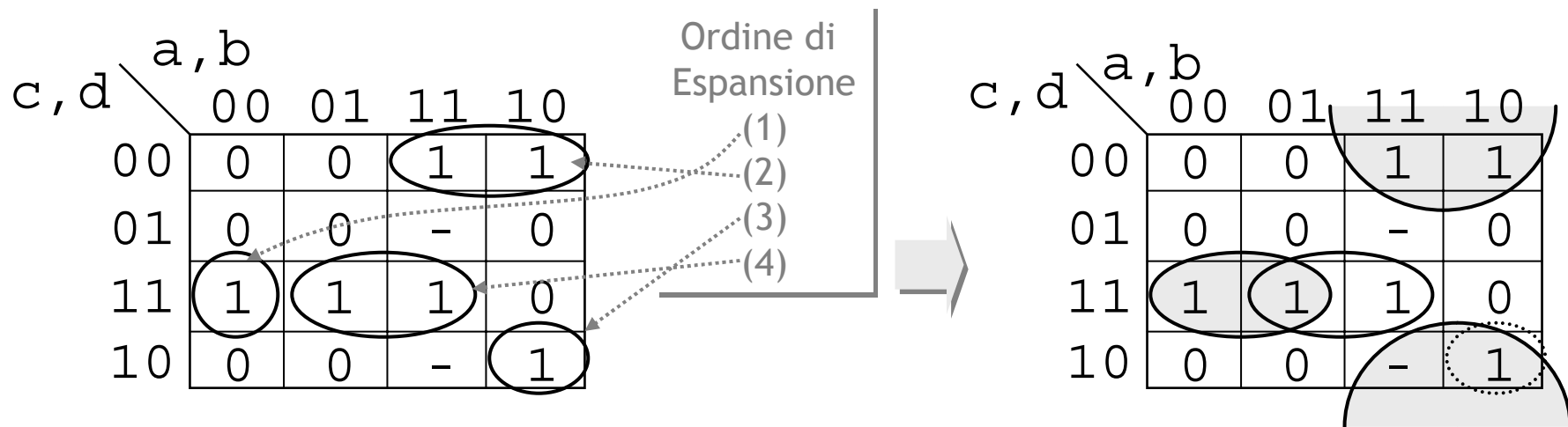
Espansione rispetto ad d di $ac'd'$ è ac'
espansione non ammissibile (intersezione = $ab'c'd$)

Espansione rispetto ad c di $ac'd'$ è ad'
espansione ammissibile (intersezione = 0)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Expand*

□ Esempio:



Copertura iniziale:

on-set: { $ac'd'$, $a'b'cd$, bcd , $ab'cd'$ }

dc-set: { $abc'd$, $abcd'$ }

Copertura finale:

on-set: { ad' , $a'cd$, bcd }

dc-set: { $abc'd$, $abcd'$ }



Sintesi di reti combinatorie a due livelli:

Metodi euristici - *Expand*: ordine di espansione degli implicanti

- La **qualità del risultato** dipende da due fattori:
 1. **Ordine di espansione del singolo implicante** (direzione): si espande in tutte le direzioni possibili seguendo un ordine predeterminato (es. lessico-grafico) e si accetta la soluzione migliore.
 2. **Ordine degli implicanti da espandere**: si utilizza una **euristica** che consente di ridurre la probabilità di effettuare delle espansioni inutili
 - Gli implicanti sono ordinati in base alla **probabilità sia di essere espansi sia di non essere coperti da altri implicanti**;
 - Ad ogni implicante è associato un peso che **misura** la sua **propensione** alla espansione e alla non-copertura da parte di altri implicanti.
 - L'implicante con peso minore è quello che ha più probabilità di essere espanso e non coperto da altri.
 - Per il calcolo del peso si utilizza, per i letterali, il codice **positional-cube notation**:
 - 0 è codificato con 10
 - 1 è codificato con 01
 - - è codificato con 11
 - 00 non è una codifica ammissibile



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Expand* - *Esempio*

	a	b	c	d		Peso	
$ac'd'$	01	11	10	10	\Rightarrow	$3+3+2+1+2=11$	(2)
$a'b'cd$	10	10	01	01	\Rightarrow	$2+3+3+2=10$	(1)
bcd	11	01	01	01	\Rightarrow	$2+3+2+3+2=12$	(4)
$ab'cd'$	01	10	01	10	\Rightarrow	$3+3+3+2=11$	(3)
conteggio per colonna:	23	32	13	22			Ordine

- Ogni **peso** è calcolato come prodotto interno del vettore conteggio per colonna con il vettore relativo all'implicante, espresso in notazione positional-cube.

• Es: $|01\ 11\ 10\ 10| * |23\ 32\ 13\ 22|^T = 11$

peso minore \Rightarrow espansione più probabile

1. più letterali (un cubo piccolo ha più probabilità di essere espanso poiché richiede pochi 1 e - adiacenti)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli:

Metodi euristici - *Reduce*

□ Reduce

- Trasforma la copertura in un'altra non prima della **stessa cardinalità**.
 - Osservazione: questa trasformazione consente di uscire da minimi locali
- Gli implicanti sono manipolati uno alla volta.
 - questa operazione può ridurre gli implicanti di dimensione.
 - La trasformazione di un implicante è attuata **riducendo** il sottocubo ad esso associato **in una o più direzioni**.
- Una **riduzione** è **ammissibile se e solo se** l'implicante ridotto forma con i rimanenti una **copertura** per la funzione **senza modificarne la cardinalità**.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Reduce*

□ Esempio:

c, d		a, b			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	
01	0	1	1	0	
11	1	1	1	0	
10	0	0	0	0	

Riduzione ammissibile

c, d		a, b			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	
01	0	1	1	0	
11	1	1	1	0	
10	0	0	0	0	

c, d		a, b			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	
01	0	1	1	0	
11	1	1	1	0	
10	0	0	0	0	

Riduzione non ammissibile
La cardinalità passa da 2 a 3

c, d		a, b			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	
01	0	1	1	0	
11	1	1	1	0	
10	0	0	0	0	



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Reduce*

- Per evitare di applicare la **reduce** a implicanti che non possono essere ridotti oppure che portano ad una riduzione non ammissibile **si applica una euristica**.
- La regola euristica di scelta:
 - Il primo implicante da ridurre è quello con peso maggiore (peso calcolato come in Expand).
- Esempio (vedi Expand):

Implicanti:	a	b	c	d	
ad'	01	11	11	10	$\Rightarrow 3+2+3+1+3+1=13$ (1)
bcd	11	01	01	01	$\Rightarrow 1+3+3+3+2=12$ (3)
$a'cd$	01	11	01	01	$\Rightarrow 3+2+3+3+2=13$ (2)
					Ordine
conteggio per colonna:	13	23	13	12	



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici - Irredundant*

Irredundant

- Rende la copertura non ridondante.
- Viene scelto un sottinsieme di implicanti *parzialmente ridondanti* tale per cui ogni implicante non è interamente coperto da un altro dello stesso sottinsieme
 - la copertura è divisa in tre insiemi
 - *relativamente essenziali*
 - *parzialmente ridondanti*
 - *totalmente ridondanti*
 - Rispetto al metodo esatto, la copertura è costituita da implicanti non tutti necessariamente primi.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici - Espresso*

- (1982) ESPRESSO II è basato sulla applicazione di iterate espansioni e riduzioni. Il risultato prodotto da ESPRESSO è una copertura non ridondante spesso di minima cardinalità.
- I passi seguiti da ESPRESSO II sono:
 1. **COMPLEMENT**: Calcola l'OFF-set.
 2. **EXPAND**: Espande a primi gli implicanti e rimuove quelli coperti.
 3. **ESSENTIAL PRIMES**: Estrae gli implicanti essenziali primi e li unisce al DC-set.
 4. **REDUCE**: Riduce ogni implicante a un implicante essenziale minimo.
 5. **EXPAND**: Espande a primi gli implicanti e rimuove quelli coperti.
 6. **IRREDUNDANT COVER**: Trova la copertura minimale non ridondante. Se la soluzione migliora vai al passo 4.
 7. **LASTGASP**: applica per un'ultima volta **REDUCE**, **EXPAND** e **IRREDUNDANT COVER** usando una differente strategia.
 8. **COST**: Se questa operazione ha successo vai al passo 4.
 9. **MAKESPARE**: Adatta la soluzione ad una PLA.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi euristici - Espresso*

```
Espresso(on_set,dc_set)
  off_set=Complement(on_set u dc_set)
  on_set=Expand(on_set, off_set) /*copertura prima ridondante*/
  on_set=Irredundant(on_set, dc_set)
  essential_set=Essentials(on_set, dc_set)
  on_set=on_set - essential_set /* toglie 1 dall'on_set */
  dc_set=dc_set u essential_set /* e li aggiunge al dc_set */
  ripeti
     $\phi 2 = \text{Cost}(\text{on\_set})$ 
    ripeti
       $\phi 1 = |\text{on\_set}|$ 
      on_set=Reduce(on_set,dc_set)
      on_set=Expand(on_set, off_set)
      on_set=Irredundant(on_set,dc_set)
    fino a che ( $|\text{on\_set}| < \phi 1$ )
      on_set=Last_gasp(on_set,dc_set,off_set)
  fino a che ( $\text{Cost}(\text{on\_set}) < \phi 2$ )
  on_set=on_set u essential_set
  dc_set=dc_set - essential_set
  on_set=Make_sparse(on_set,dc_set,off_set)
```



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Espresso*

- ❑ **Comando:**
 - espresso [parametri] [file]
- ❑ **Funzione:**
 - minimizzazione di funzioni logiche a due livelli.
- ❑ **Parametri:**
 - -d: debugging
 - -e[opzioni]: seleziona le opzioni di espresso:
 - fast, ness, nirr, nunwrap, onset, pos, strong, eat, eatdots, kiss, random
 - -o[tipo]: seleziona il formato di uscita:
 - f, fd, fr, fdr, pleasure, eqntott, kiss, cons
 - -s: fornisce un breve sommario relativo all'esecuzione;
 - -t: fornisce un ampio sommario relativo all'esecuzione;
 - -x: non visualizza la soluzione;



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Espresso*

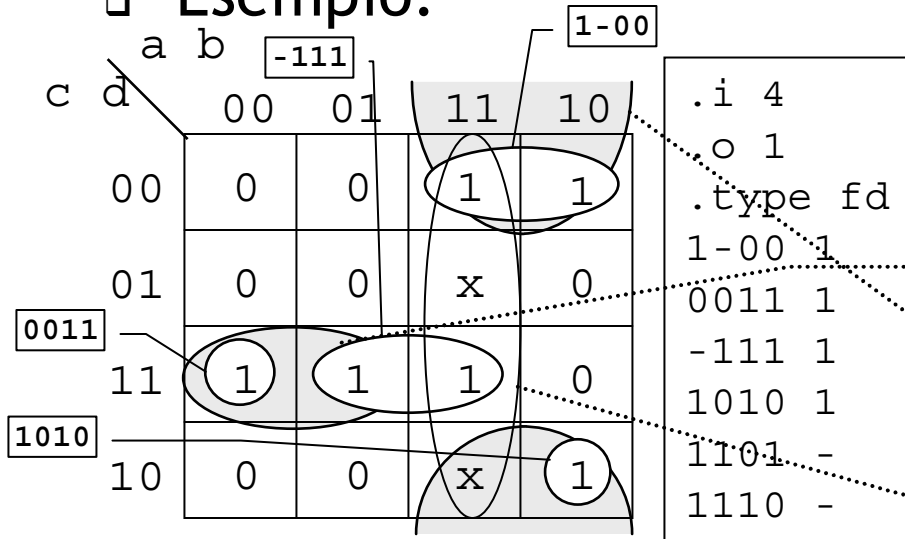
□ Parametri (continua):

- -v[tipo]: messaggi di dettaglio (-v “ ” per un accurato dettaglio)
- -D[comando]: esegue il sotto-comando:
 - ESPRESSO, many, exact, qm, single_output, so, so_both, simplify, echo, opo, opoall, pair, pairall, check, stats, verify, PLVerify, equiv, map, mapdc, fsm, contain, d1merge, d1merge_in, disjoint, dsharp, intersect, minterms, primes, separate, sharp, union, xor, essen, expand, gasp, irred, make_sparse, reduce, taut, super_gasp, lexsort, test
- -Sn: seleziona la strategia per il sotto comando (solo quelli riportati):
 - opo: bit2=esatto, bit1=ripetuto bit0=salta sparse
 - opoall: 0=minimizza, 1=esatto
 - pair: 0=algebrico, 1=strongd, 2=espresso, 3=esatto
 - pairall: 0=minimizza, 1=esatto, 2=opo
 - so_espresso: 0=minimize, 1=exact
 - so_both: 0=minimize, 1=exact



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Espresso

□ Esempio:



Cubi	Notazione positional-cube							Pesi	Ordine	
1-00	1	0	1	1	0	1	0	1	11	2
0011	0	1	0	1	1	0	1	0	10	1
-111	1	1	1	0	1	0	1	0	12	4
1010	1	0	0	1	1	0	0	1	11	3
	2	3	3	2	1	3	2	2		

```

ipeca4>espresso -v " ex3.pla
EXPAND: 0011 1 (covered 0)
EXPAND: 1-00 1 (covered 1)
EXPAND: -111 1 (covered 0)
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
ESSENTIAL 0-11 1
ESSENTIAL 1--0 1
REDUCE: -111 1 to 1111 1 0.00 sec
EXPAND: 1111 1 (covered 0)
# IRRED: F=1 E=1 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=1 Bound=0
REDUCE_GASP: 11-- 1 reduced to 1111 1
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
.i 4
.o 1
.p 3
11-- 1
0-11 1
1--0 1
.e
ipeca4>
  
```



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Espresso*

□ Esempio:

```
.i 4
.o 3
.type fr
00-1 1-1
01-- 001
1000 0--
1001 --1
1011 -1-
1100 111
1101 000
1110 -10
1111 01-
```

```
EXPAND: 1100 100 (covered 2)
EXPAND: 1011 010 (covered 3)
EXPAND: 1111 010 (covered 0)
EXPAND: 1100 001 (covered 0)
EXPAND: 01-- 001 (covered 0)
# IRRED: F=5 E=5 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=5 Bound=0
ESSENTIAL: 0--- 001
REDUCE: -0-1 111 to -0-1 101 0.00 sec
REDUCE: 1-1- 010 to 1-11 010 0.00 sec
REDUCE: 1-00 011 to 1100 001 0.00 sec
EXPAND: 1100 001 (covered 0)
EXPAND: 1-11 010 (covered 0)
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
# IRRED: F=4 E=4 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=4 Bound=0
REDUCE_GASP: 1-00 011 reduced to 1100 001
REDUCE_GASP: 1-1- 010 reduced to 1111 010
REDUCE_GASP: 11-0 110 reduced to 1100 100
REDUCE_GASP: -0-1 111 reduced to -0-1 101
EXPAND: 1100 111 (covered 0)
# IRRED: F=5 E=2 R=3 Rt=0 Rp=3 Rc=1 Final=3 Bound=0
REDUCE: -0-1 111 to -0-1 101 0.01 sec
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
... (continua)
```

... (continua)

```
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
REDUCE_GASP: 1-1- 010 reduced to 111- 010
REDUCE_GASP: 1100 111 reduced to 1100 111
REDUCE_GASP: -0-1 111 reduced to -0-1 101
# IRRED: F=2 E=2 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=2 Bound=0
# IRRED: F=3 E=2 R=1 Rt=1 Rp=0 Rc=0 Final=2 Bound=0
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
.i 4
.o 3
.p 4
1100 111
1-1- 010
-0-1 101
0--- 001
.e
```