

The image displays three distinct waveforms. The top waveform is orange and shows a complex periodic signal with multiple peaks of varying heights. The middle waveform is blue and shows a high-frequency, irregular signal with several sharp peaks. The bottom waveform is yellow and shows a complex periodic signal similar to the orange one but with a different phase and amplitude distribution.

LA TRASFORMATA DI FOURIER,
PROPRIETA' ED ESEMPI

Trasformata di Fourier

L'operatore che consente di ottenere la risposta in frequenza $H(f)$ a partire dalla risposta all'impulso del sistema $h(t)$, viene detto trasformata di Fourier.

La trasformata di Fourier puo' essere calcolata per un generico segnale $x(t)$, non solo per la risposta all'impulso di un sistema LTI:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt$$

L'operatore che consente di riottenere il segnale $x(t)$ a partire dalla sua trasformata di Fourier $X(f)$ viene detto trasformata inversa di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi ft\} df$$

Si noti che la trasformata di Fourier e la sua inversa sono uguali, a parte il segno dell'esponente.

Trasformata di Fourier: notazioni

trasformata di Fourier

$$X(f) = \begin{cases} \mathfrak{S}[x(t)] \\ TDF[x(t)] \\ FT[x(t)] \end{cases}$$

trasformata inversa di Fourier

$$x(t) = \begin{cases} \mathfrak{S}^{-1}[X(f)] \\ TDFI[X(f)] \\ IFT[X(f)] \end{cases}$$

Si dice anche che $x(t)$ e $X(f)$ sono una coppia per la **trasformata di Fourier** :

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(f)$$

Proprietà' della TDF (1)

- 1 **LINEARITA'**: la TDF della combinazione lineare (somma pesata) di due segnali e' uguale alla combinazione lineare delle TDF dei due segnali.

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

TDF

$$a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

- 2 **SIMMETRIA:**

$$x(-t)$$

TDF

$$X(-f)$$

$$x^*(t)$$

TDF

$$X^*(-f)$$

conseguenze: la TDF di una segnale reale gode di simmetria complessa coniugata. La parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (sono "pari"), la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine (sono "dispari").

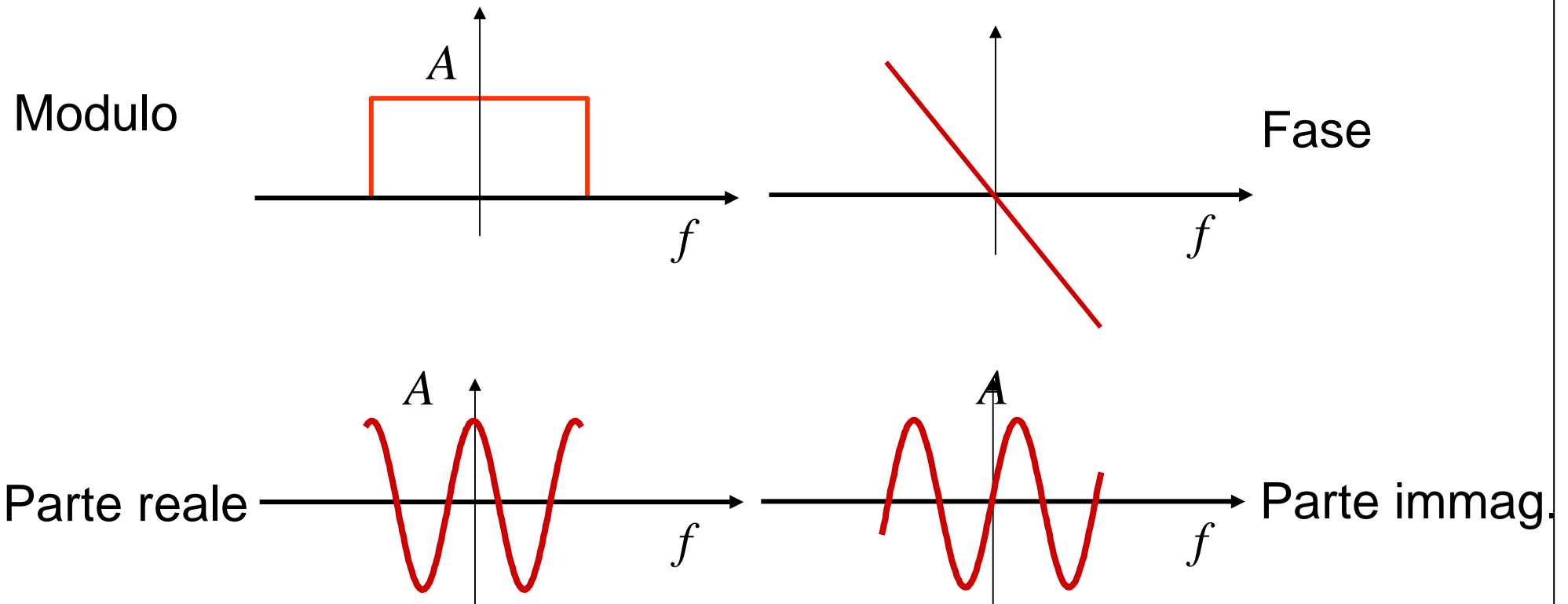
$$x(t) \text{ reale}$$

TDF

$$X(-f) = X^*(f)$$

Proprieta' della TDF (2)

TDF di una segnale reale



Casi particolari

$x(t)$ reale pari
 $x(t)$ reale dispari

TDF

$X(f)$ reale pari
 $X(f)$ immaginario dispari

Proprietà' della TDF (3)

- 3 **Valori nell'origine**: la TDF in $f=0$ e' uguale all'integrale del segnale nei tempi.
Il segnale in $t=0$ e' uguale all'integrale della TDF nelle frequenze.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt; \quad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df;$$

- 4 **Dualita'**: dato il segnale $x(t)$ e la sua TDF $X(f)$, vale la seguente relazione duale:

$$X(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} x(f)$$

- 5 **Scalatura**:

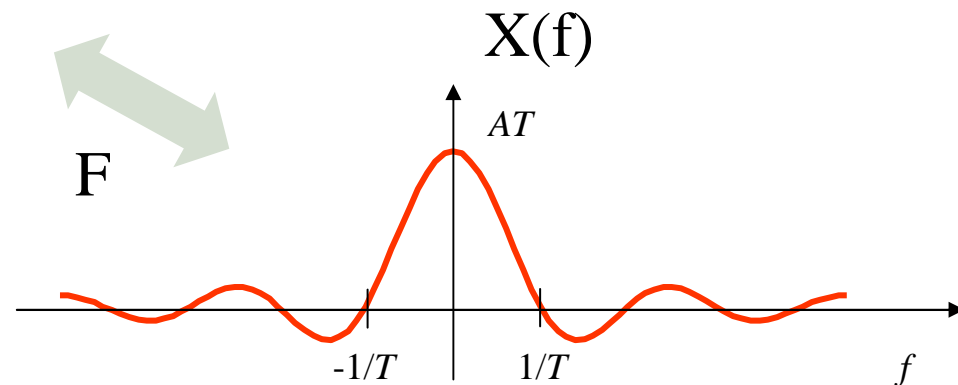
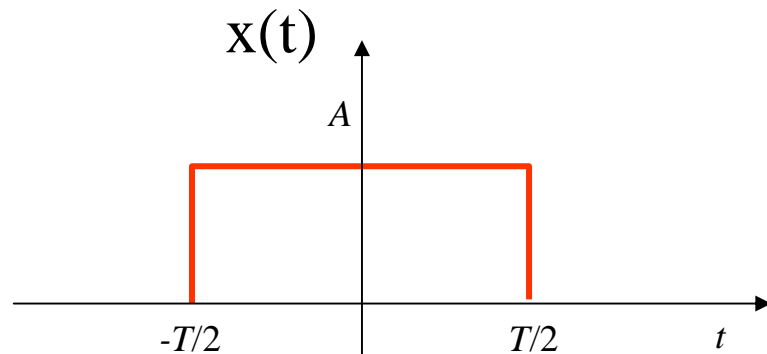
$$x(at) \xrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Caso particolare, $a=-1$:

$$x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$$

Esempi di trasformata di Fourier (il rettangolo)

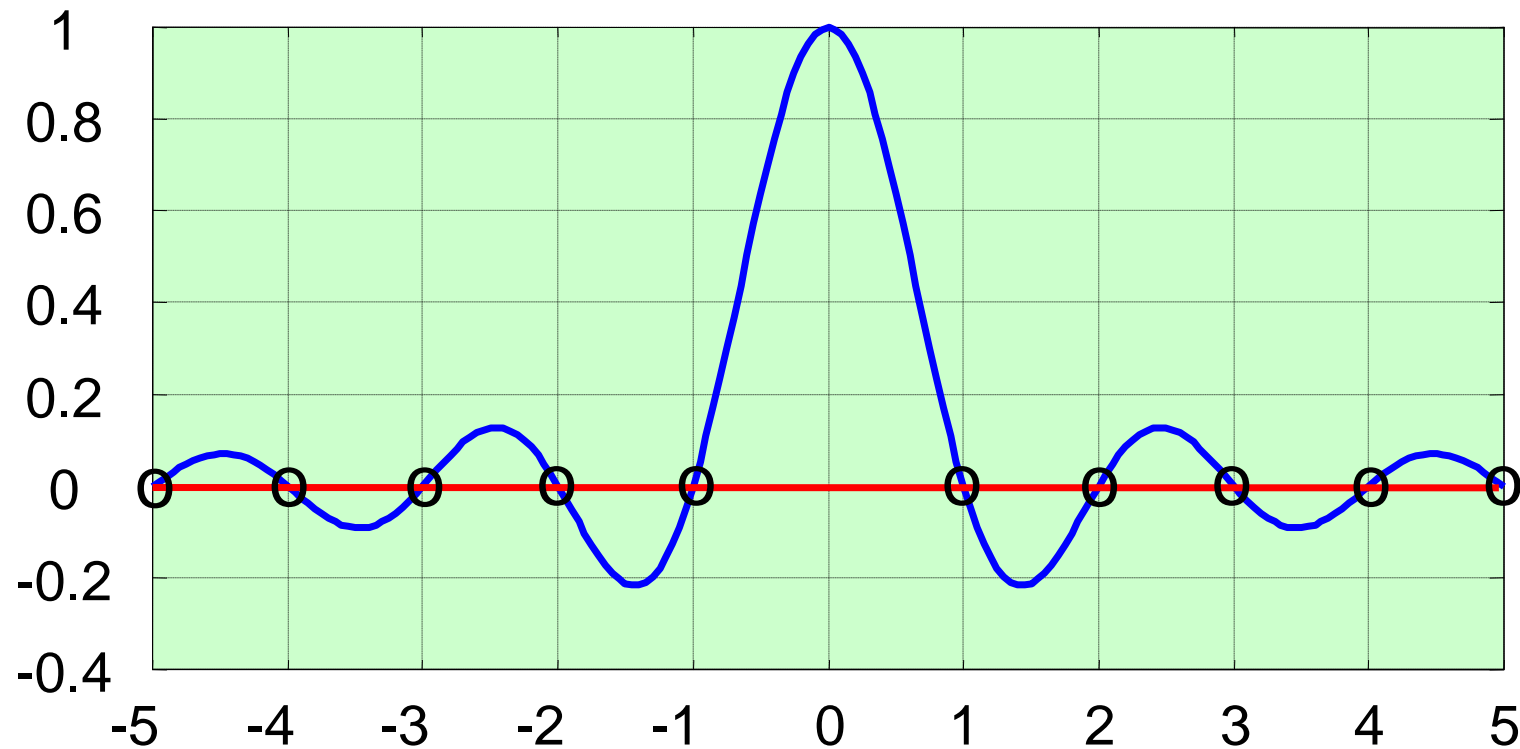
$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = A \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\pi ft) dt = AT \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = AT \operatorname{sinc}(Tf)$$



Seno cardinale

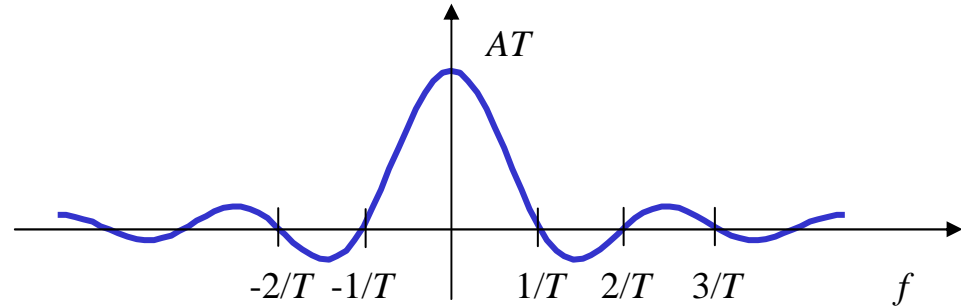
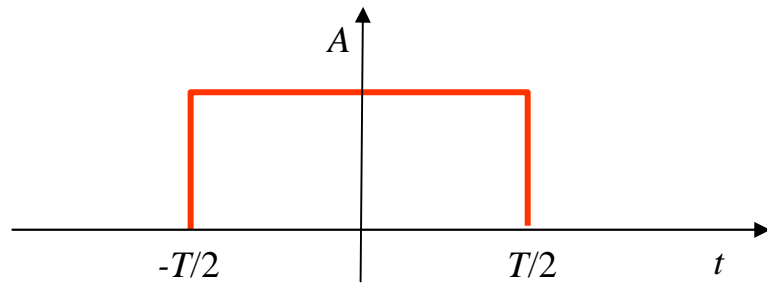
$$\text{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Si annulla per tutti i valori interi di f tranne nell'origine, dove ha valore unitario

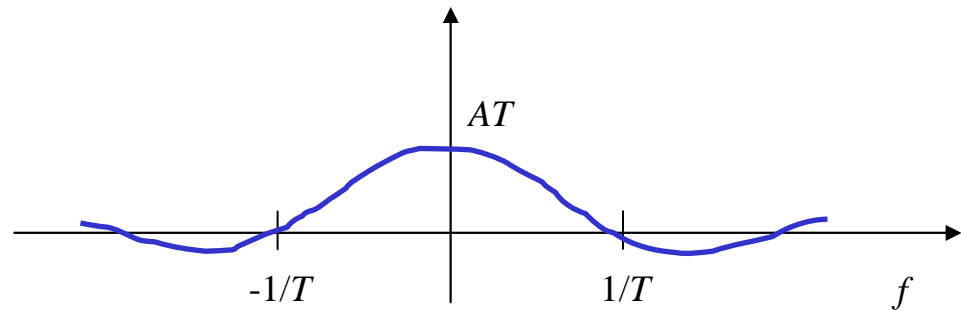
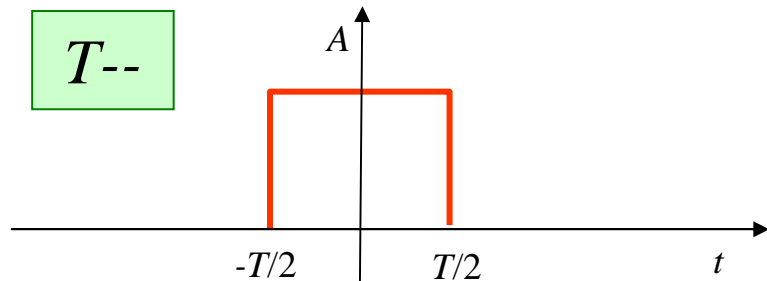


Scalatura del rettangolo

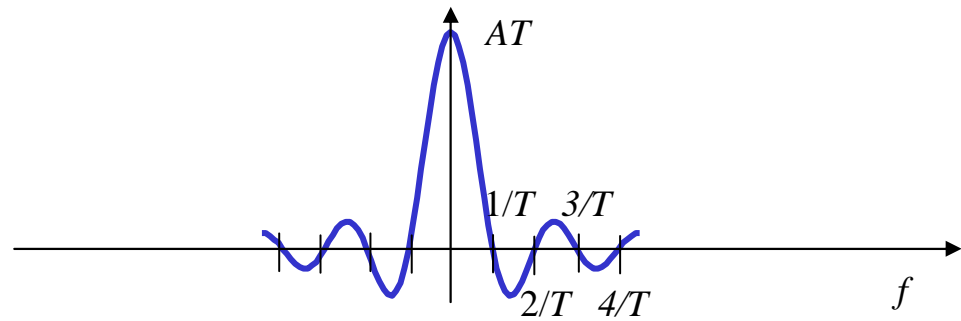
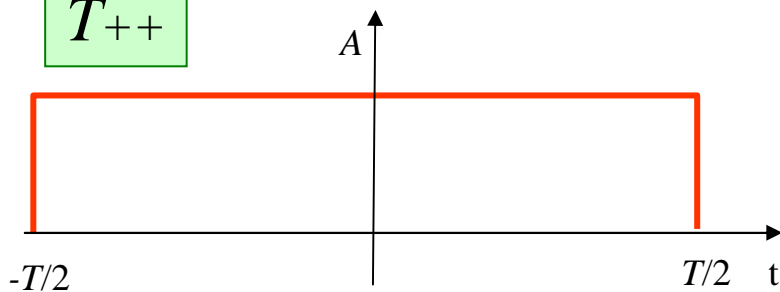
$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(Tf)$$



$T--$

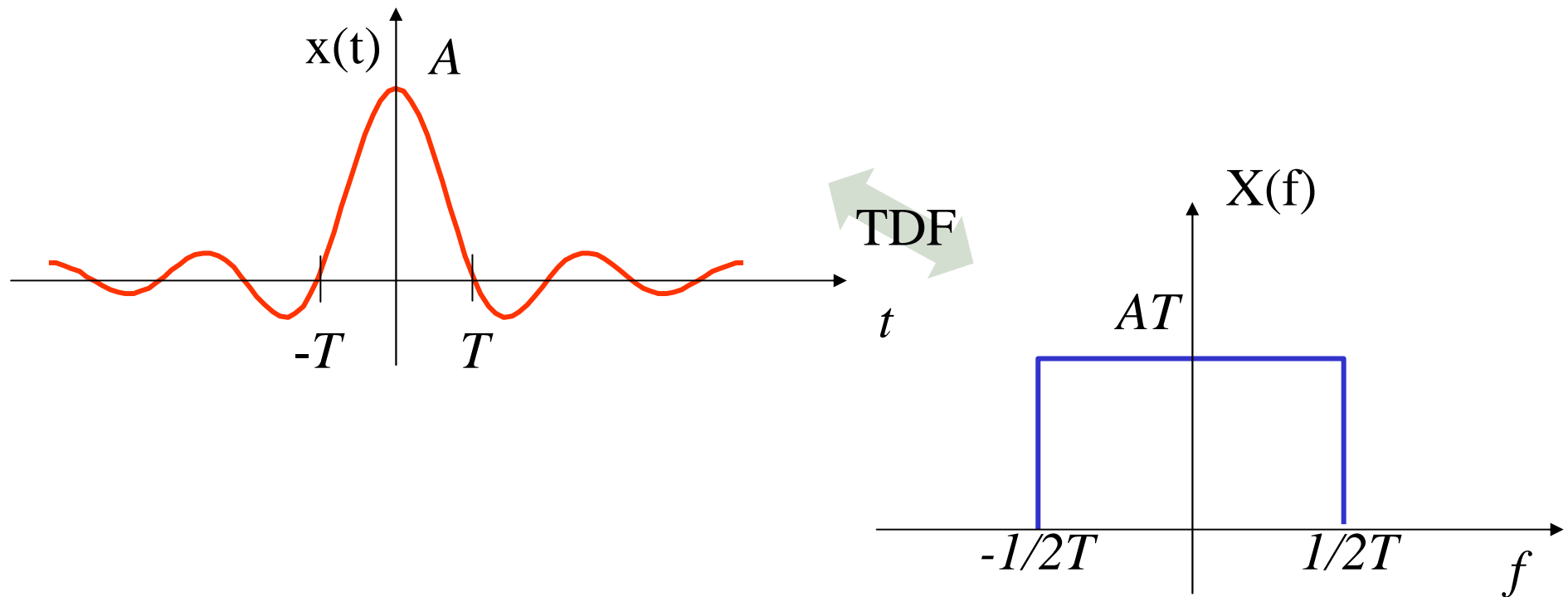


$T++$



Esempi di trasformata di Fourier (il sinc)

$$x(t) = A \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT \operatorname{rect}(fT)$$



Proprieta' della TDF (4)

- 6 **Traslazione nei tempi**: la TDF del segnale ritardato e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

- 7 **Traslazione nelle frequenze**: traslare in frequenza la TDF del segnale equivale a moltiplicare il segnale nei tempi per un esponenziale complesso

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} X(f-f_0)$$

- 8 **Derivazione nei tempi**: la TDF del segnale derivato nel tempo e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TDF}} j2\pi f X(f)$$