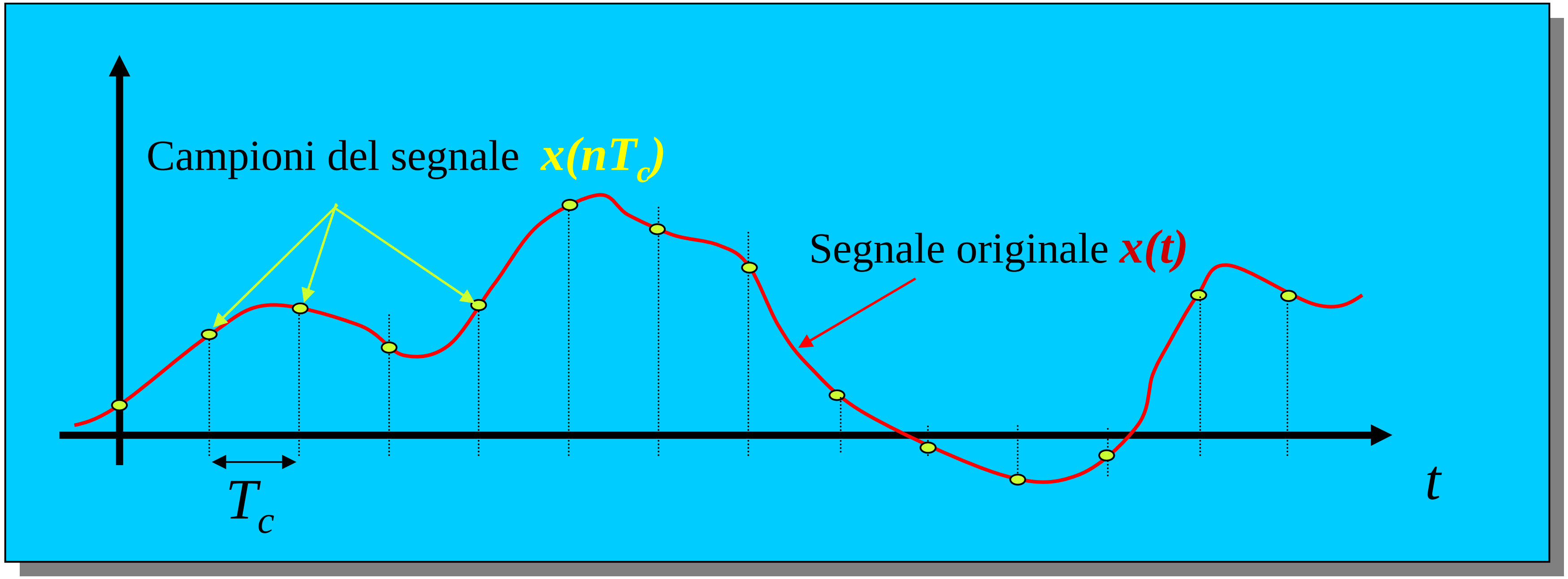
QUANTIZZAZIONE E CONVERSIONE IN FORMA NUMERICA

Campionamento e quantizzazione di un segnale analogico

Si consideri il segnale *x(t)* campionato con passo T_c.



Ogni campione del segnale campionato $x(nT_c)$ è un numero reale che può assumere con continuità qualsiasi valore compreso tra un minimo e un massimo.

Se si vuole rappresentare ogni campione $x(nT_c)$ in forma numerica (ad esempio per memorizzarlo in forma binaria su un PC) è necessario approssimare il numero reale con un numero finito M_Q di livelli compresi tra il minimo e il massimo.
Questa operazione viene detta quantizzazione.

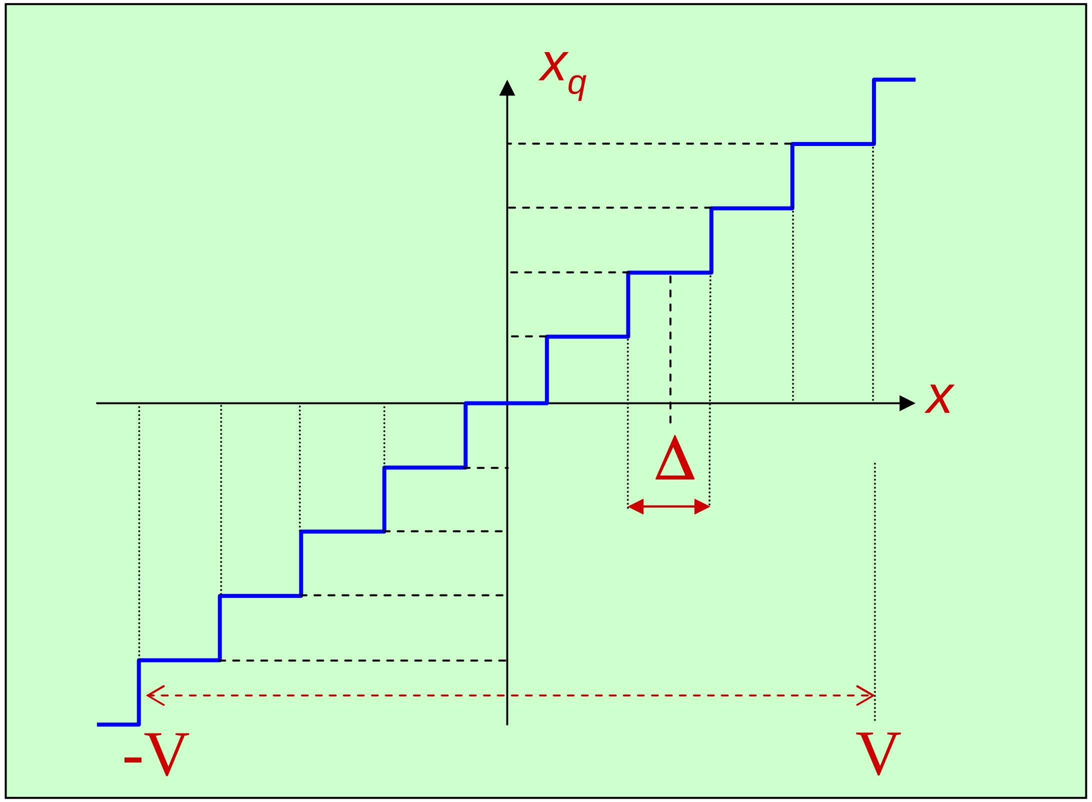
Quantizzazione

Il quantizzatore è un dispositivo che trasforma il campione reale $x(nT_c)$ nel campione quantizzato con un numero M_Q di livelli $x_q(nT_c)$.

Ad esempio se il minimo e il massimo valore che può assumere il campione $x(nT_c)$ sono $-V$ e V, la relazione tra il valore continuo $x(nT_c)$ e quello quantizzato $x_q(nT_c)$ è rappresentata da una scalinata con M_Q livelli: $x_q(nT_c)$ sarà il valore centrale dell'intervallo in cui cade il campione $x(nT_c)$

L'intervallo di quantizzazione Δ è (nel caso di intervalli di ugual ampiezza):

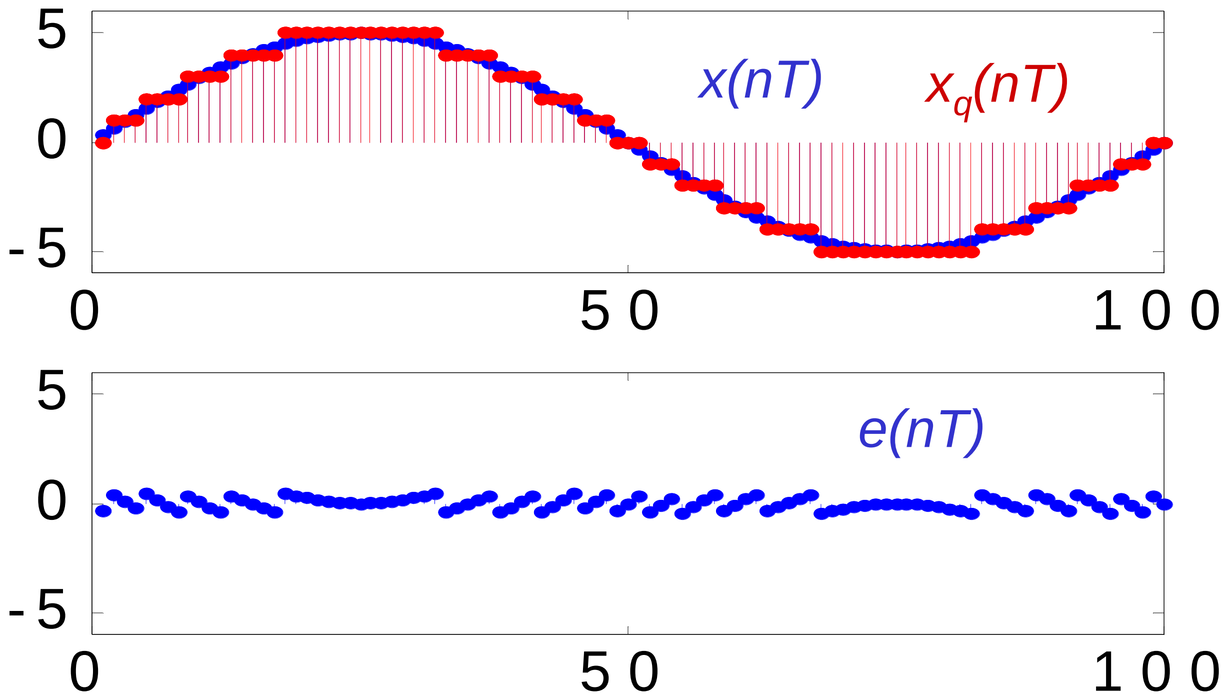
$$\boxed{\Delta = \frac{2V}{M_Q}}$$



Errore di quantizzazione

Quantizzando si commette un errore tanto più piccolo quanto più elevato è il numero M_Q di livelli. L'errore di quantizzazione è :

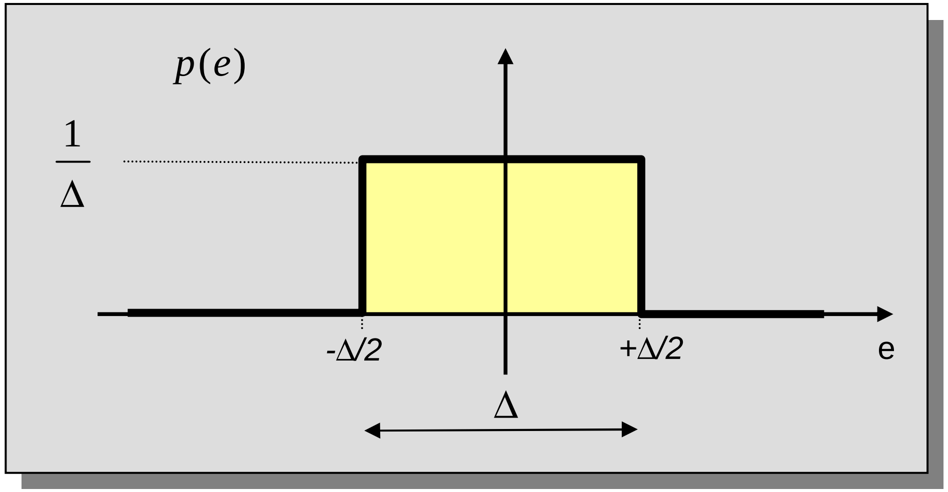
$$e(nT_c) = x_q(nT_c) - x(nT_c)$$



Se il numero M_Q di livelli è elevato, e quindi gli intervalli di quantizzazione sono piccoli, il modello più sensato per l'errore di quantizzazione di un campione, è una variabile casuale con valor medio nullo e densità di probabilità uniforme tra $-\Delta/2$ e $+\Delta/2$.

Ddp dell'errore di quantizzazione

Si dice che una variabile casuale é distribuita uniformemente se la sua ddp é costante (uniforme) entro un dato intervallo di ampiezza Δ:



$$p_e(e) = \frac{1}{\Delta} rect\left(\frac{e}{\Delta}\right)$$

Valor medio e varianza dell'errore *e* valgono:

$$E[e] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e \, \frac{1}{\Delta} \, de = \left[\frac{e^2}{2\Delta}\right]_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = 0$$

$$\sigma_e^2 = E[e^2] = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^2 \, \frac{1}{\Delta} \, de = \left[\frac{e^3}{3\Delta}\right]_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

La varianza di *e* aumenta all'aumentare dell'ampiezza Δ dell'intervallo di quantizzazione (distribuzione meno raccolta intorno al valor medio)

Varianza dell'errore di quantizzazione

Dunque l'errore di quantizzazione è una variabile casuale con valor medio nullo e con varianza uguale a:

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{2V}{M_Q}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{V^2}{3M_Q^2} = P_Q$$

ed é pari alla potenza del rumore di quantizzazione P_Q, in quanto il valor medio di $e(nT_c)$ é nullo. Se si utilizzano N_Q cifre binarie per rappresentare i campioni si ha:

$$M_Q = 2^{N_Q} \quad \Rightarrow \quad \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3}\frac{1}{2^{2N_Q}} = \frac{V^2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{N_Q}$$

Per ogni cifra binaria aggiunta la varianza dell'errore di quantizzazione si riduce di 4 volte (cioè si riduce di 6 dB).

Rapporto Segnale - Rumore di quantizzazione

Il rapporto segnale - rumore di quantizzazione, solitamente espresso in dB è

$$SNR_Q = 10\,log_{10}\left(\frac{P_s}{P_Q}\right)$$

Dove P_s é la potenza del segnale x(t) che, ignoto a priori, é un processo a sua volta.

Esempio:

Se anche per x(t) assumiamo una ddp uniforme (tra -V e V), il suo valor medio é nullo, e quindi la sua potenza coincide con la sua varianza:

$$P_s = E\left[x(t)^2\right] = \sigma_x^2 = \frac{(2V)^2}{12} = \frac{V^2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$SNR_Q = 10\log_{10}\left(2^{2N_Q}\right) = 6N_Q \quad [dB]$$

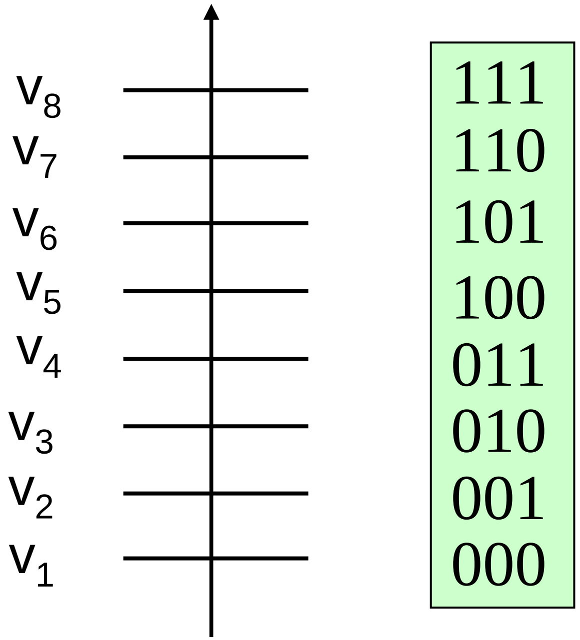
Codifica dei campioni quantizzati

Con N_Q cifre binarie (*bit*) si ottengono $M_Q = 2^{N_Q}$ livelli di quantizzazione.
Ad ogni livello si può dunque associare un codice di N_Q bit.

Ad esempio se $N_Q=3$ sono disponibili $M_Q = 8$ livelli di quantizzazione V_m codificabili (in vario modo) con **3** bit.

In pratica un unico dispositivo, detto convertitore analogico-digitale, campiona il segnale, individua l'intervallo in cui cade il campione e ne dà la codifica binaria:

codifica naturale:



Ritmo di trasmissione richiesto

La cadenza in bit al secondo di un segnale numerico viene chiamata ritmo di trasmissione (*bit rate*).
Ad esempio per un segnale tempo continuo $x(t)$ con frequenza massima di 3.6 kHz (segnale vocale di qualità telefonica) il teorema del campionamento richiede una frequenza di campionamento f_c maggiore di 7.2 kHz. Si utilizza la frequenza di campionamento $f_c = 8$ kHz (8000 campioni al secondo).

Se si quantizza il segnale con $M_Q=256$ livelli occorrono $N_Q=8$ bit per campione.
Il segnale telefonico in forma numerica richiede quindi un ritmo di trasmissione:

$$N_Q f_c = 8 \cdot 8000 = 64 \text{ kb/s}$$

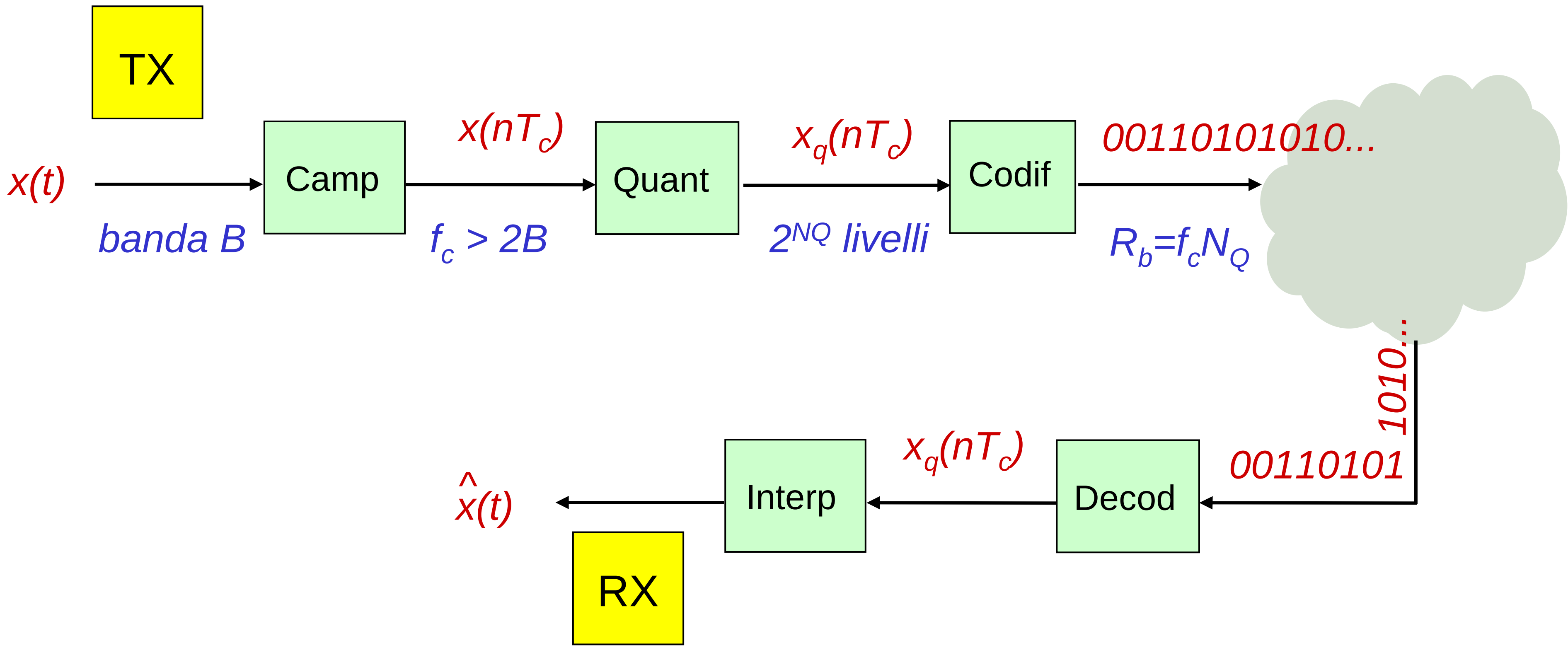
Nello standard CD audio, il singolo canale (mono) ha $f_c=44.1$ *kHz,* e i campioni sono codificati su $N_Q=16$ bit per campione:

$$N_Q f_c = 16 \cdot 44.1 \cong 705 \text{ kb/s}$$

Trasmissione del segnale numerico (1)

Un segnale numerico ottenuto a seguito di campionamento e quantizzazione è una sequenza di bit con un certo ritmo (il *bit rate*):

......1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 .....



Trasmissione del segnale numerico (2)

A questo punto si può dimenticare il segnale originale ed anche il fatto che i bit debbano essere letti a gruppi di N_Q, con un opportuno sincronismo di trama, per risalire ai campioni del segnale quantizzato $x_q(nT)$. Alla sequenza numerica si aggiungeranno (in piccola quantità) opportuni segnali di sincronismo.

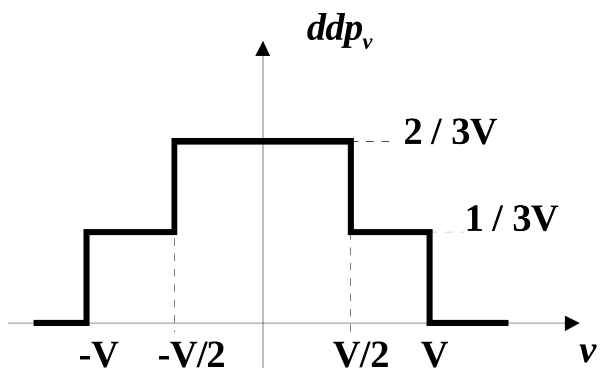
Si deve poi trasmettere la sequenza, alla sua *cadenza,* attraverso un canale di trasmissione (*satellite, ponte radio, cavo coassiale, fibra ottica,* …). Il canale lascia passare solo segnali $y(t)$ che hanno frequenze comprese in una banda B_c a partire da frequenza nulla (canale passa basso) oppure centrata attorno ad una frequenza f_o (canale passa banda). Si dovranno associare ai bit opportune sequenze di forme d'onda, che occupino la banda consentita dal canale.

I bit possono essere inviati sul canale uno per volta (trasmissione binaria) oppure a blocchi (trasmissione multilivello; in questo caso ogni forma d'onda trasporta più di un bit).

Esercizi

1) Un segnale di banda 8 kHz, con distribuzione uniforme tra -5 V e 5 V è campionato a 20 kHz e convertito in formato numerico. Determinare il numero di bit per campione necessari a garantire un rapporto segnale-rumore di quantizzazione di 30 dB, ed il conseguente *bit rate* da inviare sul canale.

2) E' dato un segnale analogico v(t) con distribuzione dell'ampiezza $ddp_V(v)$ rappresentata in figura. Il segnale viene campionato, quantizzato su intervalli uniformi e convertito in formato numerico.



Con 8 bit/campione quanto risulta essere il rapporto segnale/rumore di quantizzazione (assumendo rumore uniforme in ogni intervallo) SNR_Q? Quale sarebbe se il segnale fosse distribuito uniformemente nello stesso intervallo (–V,+V)?