

Fondamenti di segnali e trasmissioni - prof. Monti Guarnieri

Esame del 14 Febbraio 2008 - Totale punti 40

Campionatore approssimato (14 punti) Foglio Azzurro

Un convertitore analogico digitale per segnali audio ($f < 20$ kHz), impiega un campionario approssimato, che utilizza il seguente treno di *impulsi gaussiani*:

$$c(t) = \sum_n g(t - nT) = \sum_n \exp\left(-\left(\frac{t - nT}{\tau}\right)^2\right)$$

Sia T il periodo di campionamento e τ una costante ($\tau \ll T$).

[3 punti] Si scelga una opportuna frequenza di campionamento, $f_c = 1/T$. Si rappresenti lo schema del convertitore, inserendo, nella sequenza corretta, i seguenti blocchi funzionali: (a) campionario; (b) quantizzatore, (c) misura aree (convertitore segnale-sequenza), (d) filtro anti-alias, (e) codificatore PCM.

[4 punti] Determinare la trasformata di Fourier del segnale campionato, $x_c(t) = x(t)c(t)$, in funzione di quella del segnale da campionare, e graficarne il modulo (si suggerisce di rappresentare $c(t)$ come convoluzione tra ...).

[4 punti] Si supponga di campionare il segnale $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = f_c/2$. Si calcoli il segnale che risulterebbe applicando a $x_c(t)$ un *filtro di ricostruzione ideale* (lo si definisca). Si ripeta l'esercizio per $f_0 = 2f_c$.

[3 punti] Si indichi come compensare l'errore dovuto al campionamento approssimato operando sul segnale discreto $x(n)$.

Mouse ottico (14 punti) Foglio Giallo

Un mouse ottico determina il proprio spostamento ΔR confrontando il segnale ricevuto dal sensore laser, con quello ricevuto in precedenza. Siano: $x(t) = s(t)$ e $y(t) = s(t - 2\Delta R/c)$ i due segnali registrati rispettivamente prima e dopo lo spostamento, dove c è la velocità della luce, 3×10^8 m/s. Si assuma $s(t) = w(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ con $w(t)$ processo gaussiano con valor medio nullo e varianza σ^2 , bianco per $|f| < B/2$. φ è una variabile casuale distribuita uniformemente in un angolo giro. Si scelga $B = 10$ GHz, $f_0 = 200$ THz ($= 2 \times 10^{14}$ Hz).

[4 punti] Valutare e graficare autocorrelazione e densità spettrale di potenza dei processi $x(t)$, $y(t)$.

[3 punti] Valutare e graficare la crosscorrelazione tra i due segnali, $r_{xy}(t)$, e rappresentarne la trasformata (modulo e fase).

[3 punti] Determinarne il legame tra $r_{xy}(0)$ e lo spostamento ΔR . Trovare il valore limite di ΔR per il quale si annulla la cross-correlazione: $r_{xy}(0) = 0$.

[2 punti] Ripetere l'esercizio, a valle di un demodulatore di ampiezza, ovvero valutare per quale ΔR si ottiene il primo zero del segnale $z(t) = \{r_{xy}(t) \times \cos(2\pi f_0 t)\} * h(t)$ (filtro passabasso). Commentare il risultato.

[2 punti] Valutare la potenza del segnale differenza $e(t) = x(t) - y(t)$ al variare di ΔR . Per quale ΔR è minima?

Connessione USB (12 punti) Foglio Verde

Un PC riceve dati da un disco esterno mediante un collegamento USB 2.0. Tale collegamento impiega due canali indipendenti in parallelo, ciascuno con frequenza di simbolo $f_s = 240$ Mbit/s. Si assuma di trasmettere impulsi rettangolari, unipodali, di ampiezza 0 e V_r , e si assuma impedenza del cavo 100Ω , fattore di rumore degli amplificatori $F = 15$ dB. Si supponga che l'attenuazione del cavo sia al peggio 20 dB.

[4 punti] Si rappresenti lo schema a blocchi funzionali del sistema di comunicazione, includendo, nell'ordine opportuno (a) filtro adattato, (b) formatore di impulsi, (c) decisore, (d) mezzo trasmissivo, (e) amplificatore a basso rumore, (f) campionario, (g) amplificatore di potenza, (h) multiplex, (i) demultiplex.

Graficare il segnale all'uscita dei vari blocchi.

[4 punti] Si valuti la minima ampiezza del segnale da trasmettere, in V , per fornire un errore inferiore ad un bit per ogni ora. Si trascuri l'interferenza intersimbolica.

[4 punti] Si supponga che, a causa della distorsione del mezzo trasmissivo, si introduca una interferenza intersimbolica. Si assuma tale distorsione come un ritardo di 1 bit: $h(t) = 1 + a \cdot \delta(t - T_b)$. Si valuti il massimo valore di a in modo che tale distorsione non cambi apprezzabilmente la probabilità di errore.

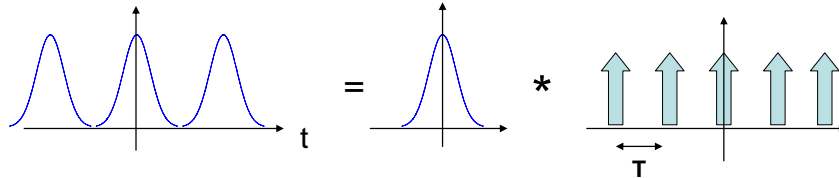
SOLUZIONI

Campionatore approssimato

La frequenza di campionamento deve essere $f_c > 40$ kHz. Si può ad esempio scegliere 50 kHz.

La sequenza corretta è: filtro anti-alias, campionatore, quantizzatore, misura aree (convertitore segnale-sequenza), codificatore PCM.

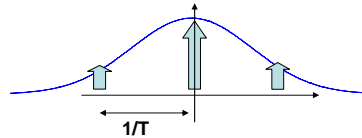
Il treno di impulsi gaussiani $c(t)$ si scrive come convoluzione tra un treno di impulsi ideali ed una gaussiana, come in figura.



$$c(t) = \sum_n g(t - nT) = \int g(\tau) \sum_n \delta(t - nT - \tau) d\tau = g(t) * \sum_n \delta(t - nT)$$

La trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate. Ricordando che un treno di impulsi si trasforma in un treno di impulsi:

$$C(f) = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \cdot G(f)$$



Il prodotto $x(t) c(t)$ nei tempi diventa una convoluzione:

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right) \cdot G(f)$$

Per valutare $G(f)$ si parte dalla formula:

$$\exp(-\pi^2) \Leftrightarrow \exp(-\pi f^2)$$

e si applica la proprietà della scalatura degli assi:

$$\exp\left(-\left(\frac{t}{\sqrt{\pi\tau}}\right)^2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi\tau} \exp(-\pi^2 \tau^2 f^2)$$

L'effetto del campionamento approssimato è dunque un passabasso sul segnale campionato.

Il filtro di ricostruzione ideale ha trasformata

$$H(f) = T \text{rect}(fT)$$

Il segnale ricostruito è

$$x_r(t) = |G(f_r)| \cos(2\pi f_r t + \arg(G(f_r)))$$

dove f_0 è la replica in banda base, ovvero f_0 nel primo caso e $f_c - f_0$ nel secondo.

Per valutare il segnale campionato, si consideri che la misura aree + conversione segnale sequenza può essere schematizzata come:

$$x_d(nT) = x_c(t) * \text{rect}(t/T) \Big|_{t=nT}$$

Ossia il campionamento del segnale x_c convoluto con un filtro a media mobile. Il sistema complessivo si comporta dunque come un campionatore ideale, con l'inserzione di un filtro passabasso sul segnale, con funzione di trasferimento:

$$H(f) = T \text{sinc}((f - k/T)T) \cdot G(f - k/T) \quad |f| < f_c/2, \text{ periodicizzata.}$$

Per compensarla, occorre progettare un filtro numerico con trasformata di Fourier $H^{-1}(f)$.

Mouse ottico

La densità spettrale di potenza di $x(t)$

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{\sigma^2}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right)$$

Il processo $y(t)$ è generato ritardando il processo $x(t)$:

$$y(t) = x(t - \Delta t) = x(t) * \delta(t - \Delta t) \quad \text{dove} \quad \Delta t = \frac{2\Delta R}{c}$$

La densità spettrale di potenza non cambia (il ritardatore ha modulo unitario).

Le autocorrelazioni sono ottenute antitrasformando

$$r_x = \sigma^2 \text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

Per valutare il cross spettro, si consideri la proprietà dei processi filtrati:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[X_T(f)Y_T^*(f)] = S_x(f)H^*(f)$$

con

$$H^*(f) = \exp(j2\pi f \Delta t)$$

Sostituendo l'espressione della densità spettrale di potenza

$$S_{xy}(f) = \left\{ \frac{\sigma^2}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{\sigma^2}{2B} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) \right\} \cdot \exp(j2\pi f \Delta t)$$

Antitrasformando si ha la cross-correlazione

$$r_{xy}(t) = \sigma^2 \text{sinc}(B(t - \Delta t)) \cos(2\pi f_0 t)$$

che si annulla per $t = \Delta t + N/B$ e $t = N/f_0$, con N intero. Il primo zero è per $\Delta t = 1/f_0$ ($\Delta R = 3 \mu$).

Demodulando il segnale $r_{xy}(t)$ si ottiene la versione in banda base:

$$r_{xy}(t) = \sigma^2 \text{sinc}(B(t - \Delta t))$$

Il primo zero si ottiene ora per $\Delta t = 1/B$, che differisce di ordini di grandezza rispetto al precedente.

La potenza della differenza è

$$\begin{aligned} E[e(t)e^*(t)] &= E[(x(t) - y(t))^2] = E[x^2(t)] + E[y^2(t)] - E[x(t)y(t)] \\ &= P_x + P_y - 2r_{xy}(0) \\ &= 2\sigma^2 - 2\sigma^2 \text{sinc}(B\Delta t) \end{aligned}$$

La differenza è minima quando la cross-correlazione è massima, ovvero per $\Delta t = 0$.

Connessione USB (12 punti)

Il sistema è rappresentato dai seguenti blocchi:

multiplicatore, formatore di impulsi, amplificatore di potenza, mezzo trasmissivo, amplificatore a basso rumore, filtro adattato, decisore, campionatore, demultiplicatore.

Si trasmettono due canali in parallelo, ciascuno con un bitrate dimezzato rispetto al totale. La probabilità totale di errore è la somma delle due, ma ciascun canale riceve la metà dei bit, dunque è la stessa che sul singolo canale.

Supponendo che l'ampiezza di picco a ciascun ricevitore sia V_p , e tenendo conto del caso unipodale, la probabilità di errore è:

$$P_e = Q\left(\frac{V_p / 2}{\sigma_{nc}}\right)$$

dove σ_{nc}^2 è la potenza di rumore al campionatore. Nel caso di filtro adattato:

$$SNR_c = \frac{V_p^2}{\sigma_{nc}^2} = \frac{2E_b}{N_0} = \frac{V_p^2}{f_b} \frac{1}{FKT_0}$$

dove f_b è il bitrate di ciascun canale. Supponendo di sbagliare 1 bit/ora, la probabilità di errore risulta:

$$P_e = \frac{1}{3600 \cdot (480 \cdot 1024^2)} = 0.5 \times 10^{-12}$$

che corrisponde a $Q(x)$ con $x \approx 17$ dB. Scrivendo l'espressione di SNR_c in dB:

$$(SNR_c)_{dB} = (V_p^2)_{dB} - (f_b)_{dB} - FKT_0$$
$$17 = (V_p^2)_{dB} - 84 - (+15 - 204)$$

L'ampiezza del segnale ricevuto risulta $V_{dB} = -189 + 84 + 17 = -88$ dB. Considerando attenuazione massima del cavo pari a 20 dB, otteniamo una potenza di picco di -68 dB, dunque una tensione minima pari a:

$$v = 10^{-3.4} \cdot Z = 40 \text{ mV}$$

Le specifiche dello standard prevedono un valore di 400 mV, lasciando un ottimo margine.

Nel caso di interferenza intersimbolica questa deve essere inferiore rispetto al rapporto segnale rumore, ovvero 17 dB. Dunque $a \ll 1/7$.