IL PROBLEMA DELLA STABILITA'

Il problema della stabilità può essere affrontato in vari modi. Quella adottata qui, per la sua riconosciuta generalità ed efficacia, è l'impostazione classica dovuta a M. A. Liapunov, costruita sul concetto di stabilità del movimento.

1. *Stabilità del movimento*

Consideriamo un sistema dinamico tempo-invariante descritto da:

$$S: \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Poiché il sistema è tempo-invariante, possiamo (senza ledere la generalità) far coincidere l'origine dell'asse dei tempi con l'inizio delle nostre osservazioni (t_0=0).

Il ***movimento dello stato*** di S, a partire dallo stato iniziale $x(0)$ e sotto l'azione di un ingresso $u(\cdot)$ è dato dalla soluzione dell'equazione di stato:

$$x(t) = \varphi(t; x(0), u_{[0,\, t)}(\cdot)) \, .$$

Seguendo l'impostazione di Liapunov, supponiamo che *lo stato iniziale* (*non* l'ingresso!) subisca una perturbazione $\delta x(0)$ e consideriamo il ***movimento perturbato*** che ne consegue:

$$x_p(t) = \varphi(t; x(0) + \delta x(0), u_{[0,\, t)}(\cdot)) \, .$$

Il movimento $x(\cdot)$ si dice *stabile* se, qualunque sia la "direzione" di $\delta x(0)$, è possibile, riducendone quanto basta l'"intensità", far sì che la differenza fra il movimento perturbato e il movimento originario risulti piccola a piacere. Altrimenti, è *instabile*.

Il movimento $x(\cdot)$ si dice *asintoticamente stabile* se è stabile e se, qualunque sia $\delta x(0)$, purché d'intensità sufficientemente piccola, la differenza fra il movimento perturbato e quello originario svanisce al tendere di t all'infinito.

La definizione precisa di stabilità del movimento $x(\cdot)$ riecheggia, per così dire, quella di continuità di una funzione. Per darne una formulazione rigorosa e compatta, poniamo:

$$\delta x(t) := x_p(t) - x(t)$$

e indichiamo con $\|z\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ la norma euclidea di $z \in \mathbf{C}^n$.

Definizione (*Stabilità del movimento*)

Il movimento $x(\cdot)$ del sistema S è ***stabile*** se, dato $\varepsilon > 0$ (da pensarsi arbitrariamente piccolo), è possibile determinare $\delta>0$ tale che:

$$\|\delta x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad (\|\delta x(t)\| < \varepsilon \quad , \quad \forall t \geq 0) \; ;$$

se, cioè, la distanza del movimento perturbato da quello originario (o nominale) risulta permanentemente minore di ε purché la perturbazione dello stato iniziale abbia norma minore di δ.

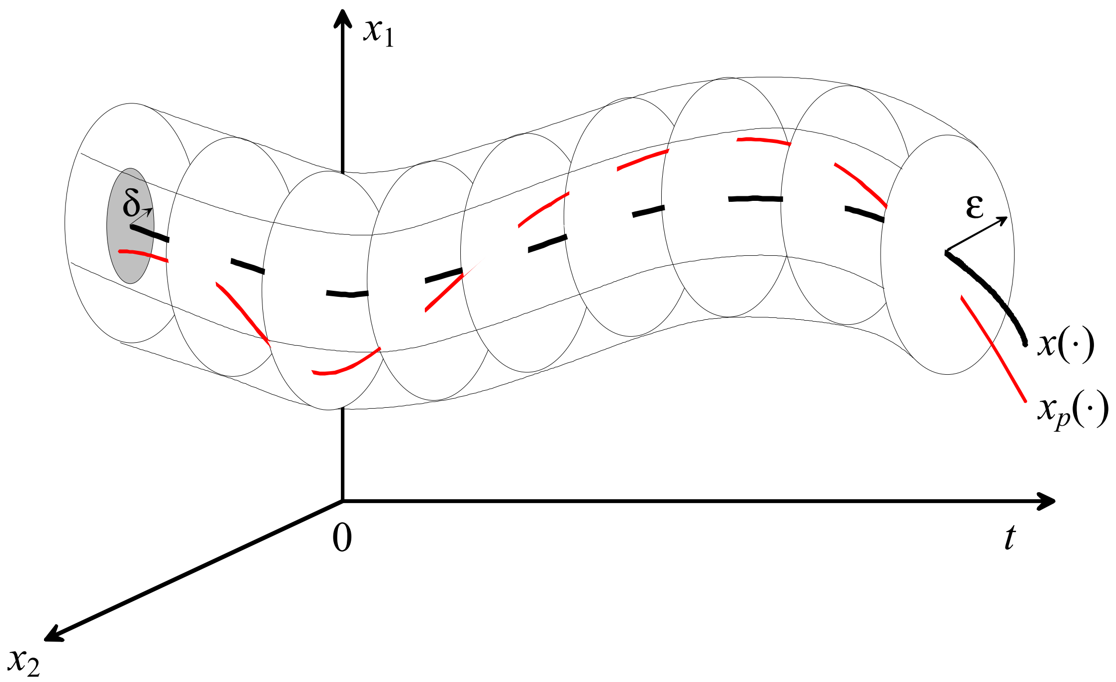
Se non è stabile, il movimento $x(\cdot)$ si dice ***instabile***.

Infine, $x(\cdot)$ è ***asintoticamente stabile*** se è stabile e se:

$$\lim_{t \to \infty} \delta x(t) = 0 \quad , \quad \forall \delta x(0) : \|\delta x(0)\| < \delta \; ;$$

cioè se la differenza fra moto perturbato e moto originario si annulla all'infinito, qualunque sia stata la perturbazione dello stato iniziale, purché sufficientemente piccola.

La figura che segue illustra la definizione nel caso n=2.



La definizione appena data potrebbe essere ulteriormente approfondita e articolata notando che, se $x(\cdot)$ è un movimento *asintoticamente stabile* di S, si chiama *bacino di attrazione* di $x(\cdot)$ l'insieme di punti dello spazio di stato che, presi come stato iniziale, producono un movimento perturbato la cui distanza da $x(\cdot)$ tende asintoticamente a zero. Se il bacino di attrazione coincide con l'intero spazio di stato, il movimento $x(\cdot)$ si dice *globalmente stabile*.

Più interessanti sono le due osservazioni che seguono.

Osservazione* 1.** Fra i possibili movimenti dello stato di un sistema, sono particolarmente interessanti i movimenti *costanti* (stati di ***equilibrio) corrispondenti a un ingresso costante $\bar{u}$. Questa osservazione suggerisce immediatamente come dalle definizioni generali di stabilità del movimento ne discendano di più particolari (ma concettualmente identiche) riguardanti la ***stabilità dell'equilibrio***.

***Osservazione* 2.** Nel medesimo sistema possono coesistere movimenti stabili (asintoticamente) e movimenti instabili. Ad esempio, un pendolo (ad asta rigida) ha due (insiemi di) stati di equilibrio: uno stabile (asintoticamente, se non si trascura l'attrito) e uno instabile. Se in un sistema coesistono movimenti stabili e instabili, non ha senso parlare di stabilità (o instabilità) *del sistema*.

Un ***sistema*** può dirsi ***stabile*** (***asintoticamente***) solo se *tutti* i suoi possibili movimenti sono stabili (asintoticamente).

2. *Sistemi lineari: analisi della stabilità*

Consideriamo, per semplicità, un sistema S tempo-invariante, la cui equazione di stato sia quindi:

$$S: \qquad \dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)\ .$$

In questo caso, sappiamo che il movimento forzato da $u(\cdot)$ a partire da $x(0)$ è dato da:

$$x(t) = e^{A\,t}\, x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

mentre, per ogni perturbazione $\delta x(0)$ dello stato iniziale,

$$x_p(t) = e^{A\,t}\, (x(0) + \delta x(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau\ ;$$

quindi, la differenza fra movimento perturbato e movimento nominale è data da:

$$\delta x(t) := x_p(t) - x(t) = e^{A\,t}\,\delta x(0)\ .$$

Come si vede, *tale differenza* non dipende né da $x(0)$ né da $u(\cdot)$; *non dipende*, cioè, *dal particolare movimento considerato*.

***Conseguenza* 1**

In un *sistema lineare*, se un movimento è (asintoticamente) stabile, tutti i movimenti sono (asintoticamente) stabili; se un movimento è instabile, tutti i movimenti sono instabili. Pertanto ha senso, nel caso di sistemi lineari, parlare di *stabilità (asintotica)* o di *instabilità **del sistema***.

***Conseguenza* 2**

Se il sistema S è asintoticamente stabile e $x(\cdot)$ è un suo movimento, lo stato $x(0) + \delta x(0)$ appartiene al bacino di attrazione di $x(\cdot)$ se e solo se $\delta x(t)$ tende a zero per t che tende all'infinito. Ma se questo accade per un certo $\delta x(0)$, ovviamente accade per ogni $\alpha\ \delta x(0)$, con $\alpha > 0$. Quindi, il bacino di attrazione di ogni movimento di un sistema S asintoticamente stabile è l'intero spazio di stato. In altre parole, *nei sistemi lineari la stabilità asintotica è sempre globale*.

***Conseguenza* 3**

La stabilità o meno di un sistema lineare S dipende solo dalla matrice A, detta anche "matrice dinamica" di S. La stabilità, quindi, nel senso di Lyapunov, non solo non ha nulla a che vedere con l'equazione d'uscita (cioè con la scelta delle uscite, e con il modo in cui le uscite dipendono dallo stato e dagli ingressi) ma, se il sistema è lineare, non ha nulla a che vedere neppure con la matrice B "d'ingresso" (cioè con la scelta degli ingressi e con il modo in cui gli ingressi influenzano l'evoluzione dello stato).

Teorema 3.1 Stabilità del sistema S e autovalori della matrice A

Il sistema S, lineare e tempo-invariante, è *asintoticamente stabile* se e solo se *tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa*.

Se la parte reale di almeno un autovalore di A è positiva, il sistema è *instabile*.

Se la parte reale di almeno un autovalore di A è nulla e quella di tutti gli altri è negativa, il sistema può essere tanto *instabile* quanto *stabile* (ma non asintoticamente stabile).

Commento. Il Teorema 3.1 sottolinea esplicitamente come l'analisi degli autovalori di A non consenta di discriminare completamente fra instabilità e stabilità non asintotica di S. Va tuttavia sottolineato che, nell'ingegneria del controllo, sistemi stabili ma non asintoticamente stabili hanno un interesse tecnico trascurabile. Vedremo anzi nel seguito come la stessa stabilità asintotica non sia sufficiente, da sola, a conferire al progetto di un sistema di controllo (lineare e tempo-invariante) un'adeguata validità; occorrerà infatti garantire che il sistema sia, in un senso opportuno, *sufficientemente* asintoticamente stabile. La stabilità asintotica del sistema è comunque un requisito irrinunciabile e, da questo punto di vista, il Teorema 3.1 fornisce un criterio senzaltro adeguato ai nostri scopi.

Domanda: E' possibile verificare se tutti gli autovalori di un'assegnata matrice A stanno nel semipiano sinistro aperto (hanno parte reale negativa), *senza calcolarli*; cioè *senza risolvere* l'equazione caratteristica: $det(\lambda I - A) = 0$?

La risposta è affermativa grazie al seguente risultato.

Criterio di Routh

Dato un polinomio di grado n:

$$P(s) = p_0\,\lambda^n + q_0\,\lambda^{n-1} + p_1\,\lambda^{n-2} + q_1\,\lambda^{n-3} + p_2\,\lambda^{n-4} + q_2\,\lambda^{n-5} + \ldots$$

si costruisca la ***Tabella di Routh*** nel modo seguente:

$$n + 1 \ \text{righe} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ r_0 & r_1 & r_2 & \cdots \\ s_0 & s_1 & \cdots & \end{array} \right.$$

$$r_0 = \frac{q_0\,p_1 - p_0\,q_1}{q_0} \quad , \quad r_1 = \frac{q_0\,p_2 - p_0\,q_2}{q_0} \quad , \quad \text{etc.}$$

$$s_0 = \frac{r_0\,q_1 - q_0\,r_1}{r_0} \quad , \quad \text{etc.}$$

Il ***Criterio di Routh*** afferma che condizione necessaria e sufficiente perché tutte le radici di $P(\lambda)$ (tutte le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = 0$) abbiano parte reale negativa è che gli elementi della prima colonna della Tabella di Routh siano diversi da zero e di segno concorde. Se sono diversi da zero, ma di segno discorde, almeno una radice di $P(\lambda)$ ha parte reale positiva.

Osservazione

Il Criterio di Routh applicato al polinomio caratteristico della matrice (dinamica) A di un sistema S a tempo continuo, lineare e invariante nel tempo, fornisce immediatamente un *criterio di asintotica stabilità di* S, e una condizione sufficiente di instabilità.

Condizione necessaria

Se le radici di $P(\lambda)$ hanno parte reale negativa, allora i coefficienti di $P(\lambda)$ sono diversi da zero e di segno concorde (nel caso $n \leq 2$, questa condizione è anche sufficiente). Se le radici di $P(\lambda)$ hanno parte reale negativa o nulla, i coefficienti non nulli di $P(\lambda)$ sono di segno concorde.

***Esempio* 1**

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3.5368\times10^{-5} \\ 0 & -0.0122 & 3.1831\times10^{-4} \\ 17.3180 & -17.3180 & -0.6148 \end{vmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 0.6270\,\lambda^2 + 0.0136\,\lambda + 0.7468\times10^{-5}$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{ll} 1 & 0.0136 \\ 0.6270 & 0.7468\times10^{-5} \\ 0.0136 & 0 \\ 0.7468\times10^{-5} & \end{array}$$

Poiché tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, tutti gli zeri di $\chi(s)$ (cioè tutti gli autovalori di A) hanno parte reale negativa. E' infatti facile verificare che:

$$\chi(\lambda) = (\lambda + 0.6045)\,(\lambda + 0.0219)\,(\lambda + 0.5628\times10^{-3})$$

cioè che -0.6045, -0.0219 e -0.5628×10^{-3} sono gli autovalori di A.

***Esempio* 2.** $\chi(\lambda) = \lambda^5 + 0.5384\,\lambda^4 + 0.0021\,\lambda^3 + 0.810\,\lambda + 0.\,6874$

Poiché il coefficiente di λ^2 è nullo, è violata la condizione necessaria; quindi si può concludere che non tutte le radici (gli zeri) di $\chi(\lambda)$ hanno parte reale negativa. Se $\chi(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica di un sistema lineare a tempo continuo, il sistema in questione *non è* asintoticamente stabile.

***Esempio* 3.** $\chi(\lambda) = -\lambda^2 - 3\,\lambda - 2$

Poiché è soddisfatta la condizione necessaria e il grado del polinomio è uguale a due, si può concludere che tutte le radici di $\chi(\lambda)$ hanno parte reale negativa.

***Esempio* 4.** $\chi(\lambda) = k\,\lambda^3 + 3\,k\,\lambda^2 + (k^2 - 1)\,\lambda + 3\,k\,(k - 27)$

Si chiede di determinare l'insieme dei valori di k in corrispondenza dei quali tutte le radici del polinomio χ hanno parte reale negativa.

k	$k^2 - 1$	
$3\,k$	$3\,k\,(k - 27)$	
$a(k)$	0	$a(k) := \dfrac{3\,k\,(k^2 - 1) - 3\,k^2\,(k - 27)}{3\,k} = 27\,k - 1$
$3\,k\,(k - 27)$		

Le radici di χ hanno parte reale negativa se e solo se

$(k > 0 \quad , \quad 27\,k - 1 > 0 \quad , \quad 3\,k\,(k - 27) > 0) \quad \Leftrightarrow \quad k > 27$

oppure

$(k < 0 \quad , \quad 27\,k - 1 < 0 \quad , \quad 3\,k\,(k - 27) < 0) \quad \Leftrightarrow$ *impossibile* .

L'insieme dei valori di k tali che il polinomio χ abbia tutte le radici con parte reale negativa è dunque costituito dalla semiretta aperta $(27, \infty)$.

5. *Stabilità dell'equilibrio in un sistema non lineare*

Il comportamento di un sistema dinamico S non lineare in prossimità di un punto di equilibrio è descritto con buona accuratezza dal modello lineare δS tangente a S nel punto di equilibrio considerato. E' allora naturale aspettarsi che la stabilità del punto di equilibrio in S sia, almeno in parte, legata alla stabilità di δS. Tale legame è alla base del cosiddetto *metodo indiretto* di Liapunov (per l'analisi della stabilità) e può essere espresso nel modo seguente.

Proposizione

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio di un sistema dinamico S e sia A la matrice dinamica del sistema lineare δS tangente a S nel punto di equilibrio considerato.

- Se gli autovalori di A hanno paqrte reale negativa, allora $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di S.
- Se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva, allora $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio instabile di S.

Negli altri casi, $\bar{x}$ può essere uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, oppure semplicemente stabile, oppure anche instabile di S