POLITECNICO DI MILANO

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Telecomunicazioni)
Prof. Maria Prandini

Anno Accademico 2009/10

Appello del 1 febbraio 2011

COGNOME...

NOME ....

MATRICOLA ....

FIRMA ....

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

1. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1.1 Determinare l'espressione analitica del movimento libero dell'uscita associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = 1$.

$$x_1(t) = 0,\ t \geq 0 \longrightarrow \dot{x}_2 = -2x_2,\ x_2(0) = 1$$

$$\hookrightarrow x_2(t) = e^{-2t},\ t \geq 0$$

$$\dot{x}_3 = e^{-2t},\ x_3(0) = 1$$

$$\hookrightarrow x_3(t) = 1 + \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = 1 + \left[-\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right]_0^t$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t},\ t \geq 0$$

$$y(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t},\ t \geq 0$$

1.2 Dire, motivando la risposta. se il sistema è asintoticamente stabile.

Se movimento libero dell'uscita associato alla c.i. $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = x_3(0) = 1$ soddisfa

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{3}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ il sistema non è A.S.

Allo stesso risultato si perviene analizzando gli autovalori della matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 0$$

$\exists$ un autovalore con parte reale nulla

$\Rightarrow$ per il criterio degli autovalori il sistema non è a.s.

1.3 Determinare la funzione di trasferimento $F(s)$ del sistema.

$$Y(s) = X_3(s) = \frac{1}{s} X_2(s)$$

$$s X_2(s) = X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$

$$\hookrightarrow \quad X_2(s) = \frac{1}{s+2}\left[X_1(s) + U(s)\right]$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \longrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} U(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

1.4 Determinare l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

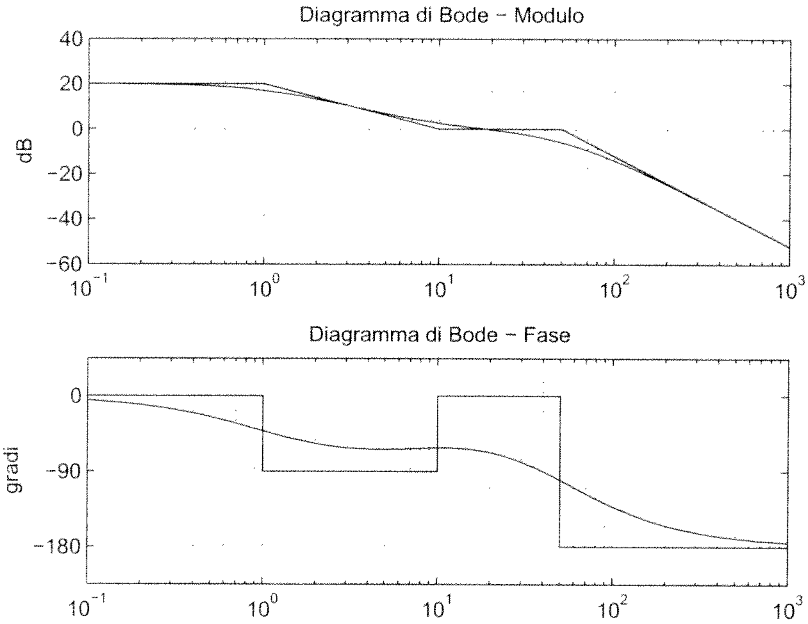
$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

$$= \frac{A(s^2+s) + B(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)}$$

$$\begin{cases} B = 1 \\ A + B = 0 \\ A + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1 \\ A = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$y(t) = -1 + t + e^{-t}, \; t \geq 0$

2. In figura sono riportati i diagrammi di Bode (esatti e approssimati) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare di ordine 3.

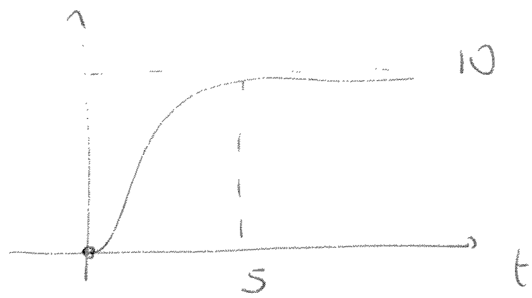


2.1 Verificare che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile.

$p_1 = -1 \qquad p_2 = p_3 = -50$ POLI DI $G(s)$

SISTEMA DI ORDINE 3 → SONO TUTTI E SOLI GLI AUTOVALORI → PER IL CRITERIO DEGLI AUTOVALORI IL SISTEMA È A.S.

2.2 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario del sistema (specificare nel grafico il valore di regime e il tempo di assestamento).



2.3 Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ all'ingresso $u(t) = 2sca(t) + sen(t)$.

$$y_\infty(t) = \underbrace{y_{\infty,1}(t)}_{u_1(t) = 2sca(t)} + \underbrace{y_{\infty,2}(t)}_{u_2(t) = sen(t)}$$

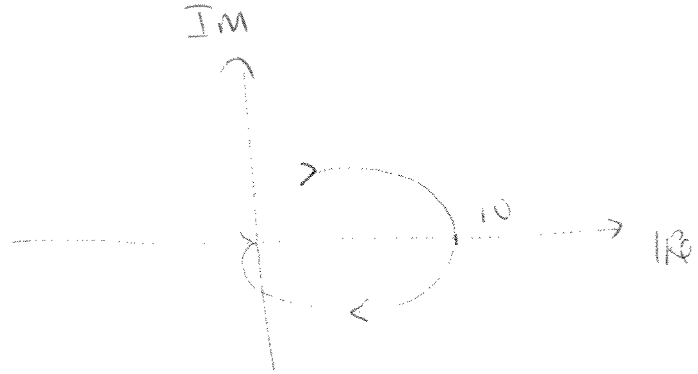
$$y_{\infty,1}(t) = 2 \cdot G(0) = 20$$

$$y_{\infty,2}(t) = |G(i)| \, sen\left(t + \angle G(i)\right)$$

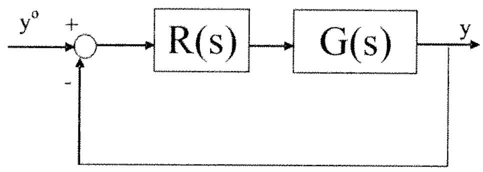
$$\simeq \frac{10\sqrt{2}}{2} \, sen\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_\infty(t) = 20 + \frac{10\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

2.4 Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s)$.

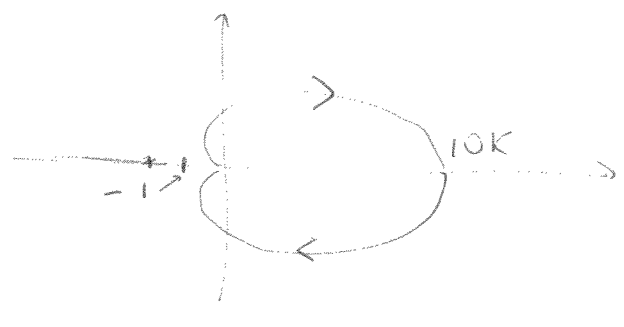


2.5 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene inserito nello schema di controllo in figura, dove $R(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore.



(a) Posto $R(s) = k$, dire, motivando la risposta, se esiste un valore di $k \geq 1$ tale che il sistema retroazionato è instabile.

$L(s) = K \cdot G(s)$ CON $K \geq 1$ HA DIAGRAMMA DI NYQUIST OTTENUTO RISCALANDO DI $K \geq 1$ QUELLO DI $G(s)$ CIOÈ



IL DIAGRAMMA NON ABBRACCIA IL PUNTO -1

$\nexists$ AUTOVALORI NASCOSTI $\Longrightarrow$ POSSO APPLICARE IL CRITERIO DI NYQUIST

$\nexists$ POLI CON $\mathrm{Re} > 0$ DI $L(s) = R(s) \cdot G(s)$

$\Longrightarrow$ PER IL CRITERIO DI NYQUIST IL SISTEMA DI CONTROLLO È A.S. $\forall K \geq 1$

(b) Posto $R(s) = \frac{1}{s}$, dire, motivando la risposta, se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

LE CONDIZIONI DI APPLICABILITÀ DEL CRITERIO DI BODE SONO SODDISFATTE PERCHÉ:

i) $\nexists$ AUTOVALORI NASCOSTI DEL SISTEMA IN ANELLO APERTO CON F.D.T. $L(s) = R(s) \cdot G(s)$

2) $L(s)$ NON HA POLI CON $\mathrm{Re} > 0$

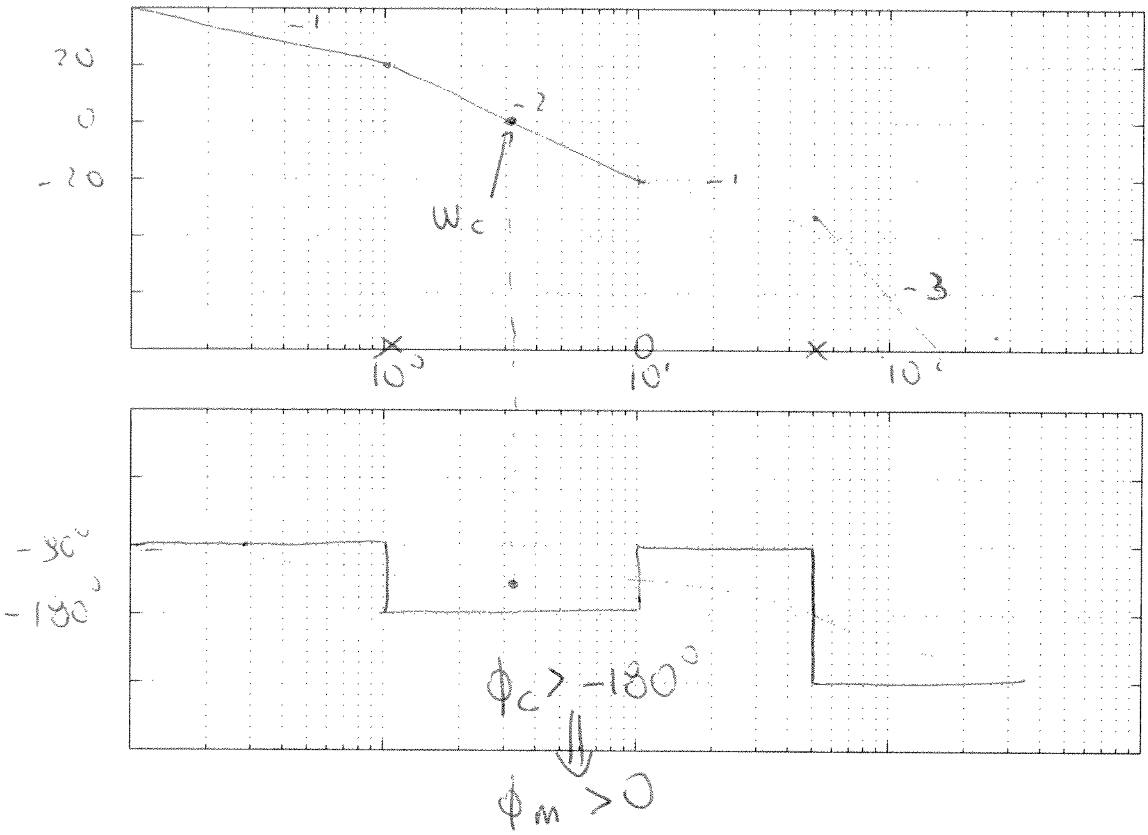
3) LA PULSAZIONE CRITICA È BEN DEFINITA (SI VEDANO I DIAGRAMMI RIPORTATI NELLA PAGINA SEGUENTE)

DATO CHE

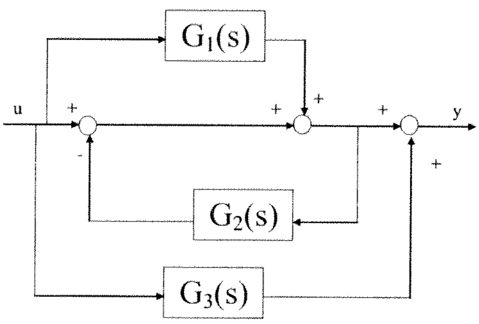
i) $\mu_L = \mu_G = 10 > 0$

2) $\phi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - |\measuredangle L(i\omega_c)| > 0$
(SI VEDA IL DIAGRAMMA DELLA FASE DI $L(i\omega)$)

$\Longrightarrow$ IL SISTEMA RETROAZIONATO È A.S. PER IL CRITERIO DI BODE



3. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari di ordine 1 con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



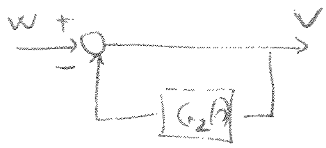
3.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento H(s) del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = G_3(s) + \frac{1}{1+G_2(s)} + \frac{G_1(s)}{1+G_2(s)}$$

3.2 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Se $G_2(s) = \frac{1}{s-2}$, allora il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

VERO, IL SISTEMA RETROAZIONATO



HA FDT $\dfrac{1}{1+G_2(s)} = \dfrac{s-2}{s-1}$

ED È QUINDI INSTABILE $\rightarrow$ È INSTABILE ANCHE IL SISTEMA CON INGRESSO u ED USCITA y

b) Il sistema con ingresso u ed uscita y è asintoticamente stabile se e solo se tutti e tre i sistemi con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono asintoticamente stabili.

FALSO. LA STABILITÀ DI $G_2(s)$ NON È COND. NECESSARIA NÉ SUFFICIENTE, DATO CHE $G_2(s)$ È RETROAZIONATO.

4. Con riferimento ad un sistema dinamico non lineare di ordine 1 descritto dalle equazioni:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = x(t)$$

(a) Definire in modo preciso e sintetico che cosa si intende per stato di equilibrio asintoticamente stabile associato all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$.

$\bar{x}$ è stato di equilibrio associato a $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$ se il movimento dello stato associato a $x(0) = \bar{x}$ e $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$ è $x(t) = \bar{x}$, $t \geq 0$.

$\bar{x}$ è asintoticamente stabile se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall \tilde{x}_0$ con $|\tilde{x}_0 - \bar{x}| \leq \delta$ si ha

$$|x_{\tilde{x}_0}(t) - \bar{x}| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0$$

movimento ass. a $x(0) = \tilde{x}_0$, $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$

e $\lim_{t \to \infty} |x_{\tilde{x}_0}(t) - \bar{x}| = 0$

(b) Dare un esempio di sistema che ammette $\bar{x} = 1$ come stato di equilibrio asintoticamente stabile associato all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

$$-\bar{x}^3 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = 1$$

$f(x,1) = -x^3 + 1$