

TESTO CON SOLUZIONE
I APPELLO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA (TLC) - 20/11/2007
PROF. MARIA PRANDINI

1. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (\beta + 1)x_1(t) - x_2(t) + \gamma u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

dove α , β , e γ sono parametri reali.

1.1 Determinare per quali valori di α , β , e γ il sistema è asintoticamente stabile.

La matrice dinamica del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta + 1 & -1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -1$. Per il criterio degli autovalori il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha < 0$, $\forall \beta$, e $\forall \gamma$.

1.2 Posto $\alpha = -2$ e $\beta = \gamma = 0$, determinare l'espressione analitica del movimento libero dello stato e dell'uscita del sistema associati alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Iniziamo a calcolare il movimento libero di x_1 risolvendo l'equazione differenziale

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 1, \quad u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$x_1(t) = e^{-2t}x_1(0) = e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Il movimento libero dell'uscita è quindi: $y(t) = x_1(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$.

Sostituiamo l'espressione calcolata per $x_1(t)$, $t \geq 0$, nella seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + e^{-2t}$$

e calcoliamo la soluzione di quest'ultima equazione quando $x_2(0) = 0$:

$$x_2(t) = e^{-t}x_2(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{-2\tau}d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{-\tau}d\tau = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

1.3 Posto $\alpha = -2$ e $\beta = \gamma = 0$, determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema. È possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi di $G(s)$?

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Applicando la trasformata di Laplace alla prima equazione di stato (sotto l'ipotesi di considerare nulle le condizioni iniziali), si ottiene

$$sX_1(s) = -2X_1(s) + 2U(s).$$

Da cui

$$X_1(s) = \frac{2}{s+2} U(s).$$

Dalla trasformazione di uscita si ha:

$$Y(s) = X_1(s) = \frac{2}{s+2} U(s)$$

e quindi

$$G(s) = \frac{2}{s+2}.$$

Dato che la funzione di trasferimento ottenuta ha un solo polo reale negativo mentre il sistema è di ordine 2, c' è un autovalore *nascosto*. Di conseguenza non è possibile concludere nulla circa le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi della sola $G(s)$.

1.4 Posto $\alpha = -2$ e $\beta = \gamma = 0$, determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ all'ingresso $u(t) = sca(t) + sen(0.2t)$.

Dato che il sistema è asintoticamente stabile (la matrice dinamica A ha autovalori uguali a -2 e -1), ha senso parlare di risposta di regime.

La trasformata di Laplace della risposta forzata all'ingresso $u(t) = sca(t) + sen(0.2t)$ è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}[sca(t) + sen(0.1t)] = G(s)\mathcal{L}[sca(t)] + G(s)\mathcal{L}[sen(0.2t)].$$

Basta quindi calcolare quindi separatamente i contributi alla risposta di regime di $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sen(0.2t)$ e poi sommarli.

Per calcolare $y_{1,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema del valore finale:

$$y_{1,\infty}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = 1$$

Per calcolare $y_{2,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema della risposta in frequenza:

$$y_{2,\infty}(t) = |G(i0.2)|sen(0.2t + \arg G(i0.2)) \simeq sen(0.2t).$$

La risposta di regime richiesta è quindi

$$y_\infty(t) = 1 + sen(0.2t).$$

2. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^3(t)u(t) + x_3(t)(x_2(t) - 1) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_3(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = 2x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

2.1 Determinare stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 2, t \geq 0$.

I valori \bar{x}_1 e \bar{x}_2 degli stati di equilibrio si ottengono uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato e ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1$ e $x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = \bar{u} = 2, \forall t$:

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1^3 + \bar{x}_3(\bar{x}_2 - 1) + 2 = 0 \\ -\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + 2 = 0 \\ 2\bar{x}_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_3 = -1 \end{cases}$$

L'uscita di equilibrio corrispondente si ottiene dalla trasformazione di uscita:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0.$$

2.2 Valutare le proprietà di stabilità degli equilibri determinati al punto 2.1.

Le equazioni del sistema linearizzato attorno al generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ sono caratterizzate da:

$$\Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta u$$

$$\Delta \dot{x}_3 = 2\Delta x_3 + \Delta u$$

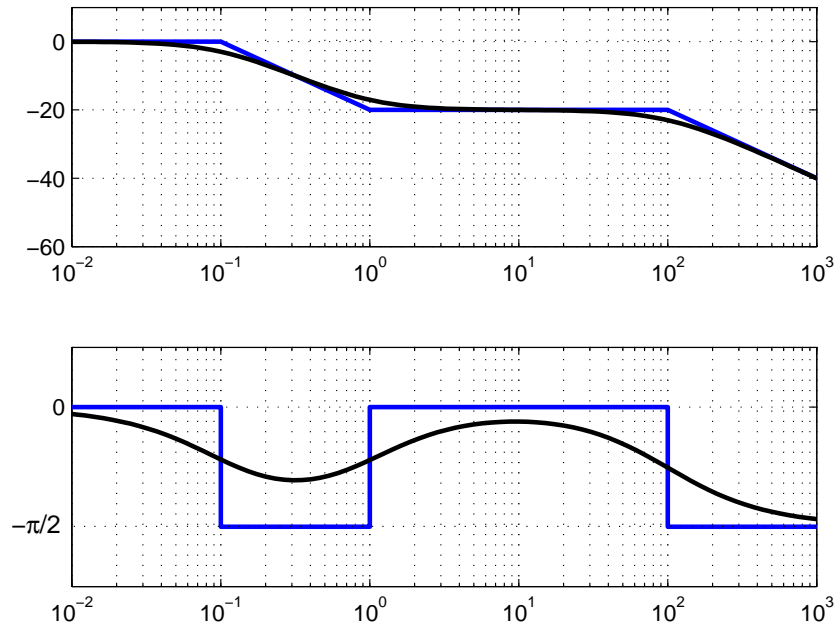
come seconda e terza equazione di stato, per cui la matrice dinamica del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto 2.1 è triangolare superiore

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con uno dei 2 autovalori uguale a 2. Possiamo quindi concludere che l'equilibrio calcolato al punto 2.1 è instabile.

3. Si consideri un sistema dinamico lineare completamente raggiungibile e osservabile con funzione di trasferimento $G(s)$.

In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode (approssimati ed esatti) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.



3.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è di ordine 3.

Falso. Il sistema è completamente raggiungibile e osservabile e dai diagrammi di Bode in figura si osserva la presenza di 2 soli poli, per cui l'ordine del sistema è 2.

b) il sistema è asintoticamente stabile.

Vero. La funzione di trasferimento $G(s)$ presenta 2 poli pari a -0.1 e -10^2 (dal diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza si osserva che si hanno 2 poli reali con modulo 0.1 e 100, dal diagramma di Bode della fase si deduce che sono entrambi negativi perchè danno un contributo di $-\pi/2$ ognuno). I poli sono tutti e soli gli autovalori, quindi per il criterio degli autovalori il sistema è asintoticamente stabile.

c) il sistema è a fase non minima.

Falso. Il sistema ha tutte le singolarità (2 poli ed uno zero) a parte reale negativa. In particolare ha 2 poli pari a -0.1 e -10^2 ed uno zero pari a -1 (dal diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza si osserva che si ha uno zero reale con modulo 1, dal diagramma di Bode della fase si deduce che è negativo perchè il suo contributo alla fase è $+\pi/2$).

d) il sistema attenua le sinusoidi di pulsazione $\omega > 10$ di un fattore pari almeno a 10.

Vero. Per il teorema della risposta in frequenza l'ampiezza di una sinusoidale di pulsazione ω è riscalata di un fattore $|G(i\omega)|$, e $|G(i\omega)| < 0.1$ per $\omega > 10$.

e) la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, tende a zero.

Vero. La trasformata di Laplace della risposta a $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, è:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s+1} = \frac{1+s}{(1+10s)(1+0.01s)} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(1+10s)(1+0.01s)}$$

Per il teorema del valore finale (applicabile a $Y(s)$):

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(1+10s)(1+0.01s)} = 0.$$

3.2 Determinare il guadagno, il tipo, le singularità (cioè i poli e gli zeri) della funzione di trasferimento $G(s)$. Scrivere l'espressione di $G(s)$.

Guadagno: $\mu = 1$.

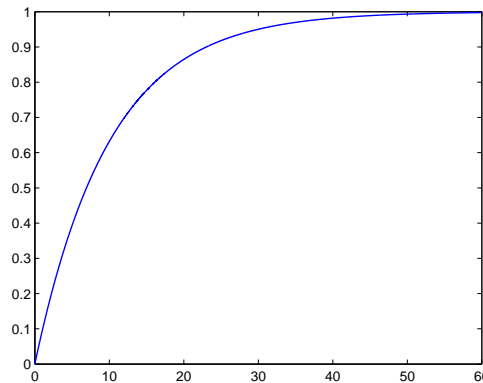
Tipo: $g = 0$.

Poli: $p_1 = -0.1$ e $p_2 = -100$.

Zeri: $z = -1$.

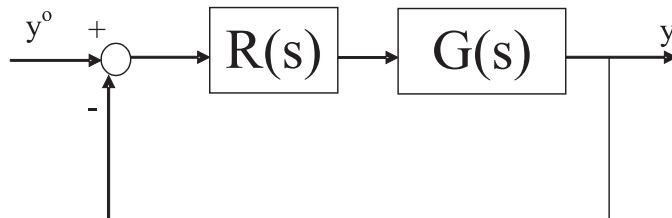
$$G(s) = \frac{1+s}{(1+10s)(1+0.01s)}$$

3.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ (specificare nel grafico valore iniziale, valore asintotico, e tempo di assestamento).



Il tempo di assestamento è $T_a \simeq 50$ unità di tempo.

3.4 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato secondo lo schema classico di controllo in figura, dove la funzione di trasferimento del controllore ha la forma: $R(s) = \frac{k}{s}$.



Determinare il valore del guadagno generalizzato k del regolatore $R(s)$ in modo da soddisfare la seguente specifica:

i) se $y^o(t) = sca(t)$, allora $y(t)$ si assesta al valore di regime in 0.5 unità di tempo senza oscillazioni ripetute.

Bisogna fare in modo che il margine di fase sia $\phi_m > \pi/3$ per evitare oscillazioni ripetute. La funzione di trasferimento tra y° e y può essere approssimata con

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

e quindi $\omega_c \simeq 1/\tau_d = 1/0.1 = 10$ perchè il tempo di assestamento sia di 0.5 unità di tempo.

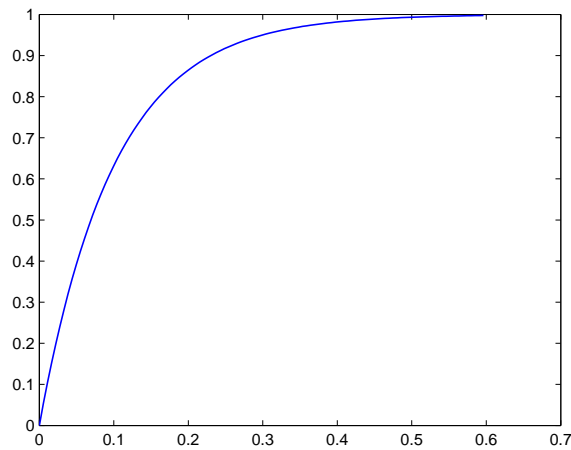
Se si sceglie $k = 100$ si riescono a soddisfare entrambi i requisiti.

3.5 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema retroazionato progettato al punto 3.4 quando $y^\circ(t) = 2sca(t)$ (specificare nel grafico valore iniziale, valore asintotico, e tempo di assestamento).

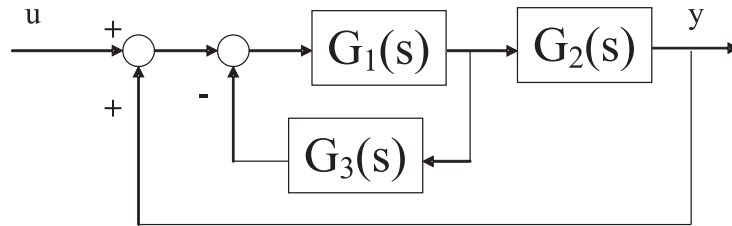
La funzione di trasferimento tra y° e y può essere approssimata con

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

dove $\omega_c = 10$ e $\mu_F = 1$ per la presenza di un integratore in $L(s) = G(s)R(s)$.



4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1° ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



4.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) se $G_2(s) = \frac{1}{s-2}$, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.
 Falso. $G_2(s)$ fa parte di un sistema retroazionato e gli autovalori di un sistema retroazionato sono in generale diversi dagli autovalori dei sistemi componenti.
- b) se la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y ha 2 soli poli $p_1 = -2$ e $p_2 = -5$, allora si può concludere che tale sistema è asintoticamente stabile.

Falso. Il sistema con ingresso u ed uscita y è di ordine 3. Non basta quindi conoscere i 2 autovalori reali negativi $p_1 = -2$ e $p_2 = -5$ per concludere che il sistema è asintoticamente stabile. Bisogna conoscere anche il terzo autovalore.

4.2 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

La funzione $H(s)$ del sistema complessivo è:

$$H(s) = \frac{G_a(s)G_2(s)}{1 - G_a(s)G_2(s)},$$

dove

$$G_a(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_3(s)}.$$