Testo con soluzione
Appello di Fondamenti di Automatica (TLC) - 05/02/2008
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)^2 - 2x_1(t)u(t) + u(t)^2\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) - u(t)\\ y(t) &= x_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

1.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema è lineare o non lineare, statico o dinamico, strettamente proprio o proprio.

Il sistema è non lineare perchè il secondo membro della prima equazione di stato e della trasformazione di uscita non sono combinazioni lineari delle variabili di stato e dell'ingresso; dinamico perchè per determinare il valore dell'uscita al generico istante t non basta conoscere il valore dell'ingresso allo stesso istante; strettamente proprio perchè non compare l'ingresso nella trasformazione di uscita.

1.2 Verificare che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$ è stato di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = 1, \forall t$, e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad esso.

I valori $\overline{x}_1 = 1$ e $\overline{x}_2 = 1$ dello stato di equilibrio e il valore $\bar{u} = 1$ dell'ingresso corrispondente devono annullare il secondo membro di entrambe le equazioni di stato quando si pone $x_1(t) = \overline{x}_1$, $x_2(t) = \overline{x}_2$ e $u(t) = \overline{u}$, $\forall t$, ed in effetti si ha:

$$\begin{cases} 1^2 - 2 + 1^2 = 0\\ 1 - 1 = 0\end{cases}$$

Le equazioni del sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{u}) = (1, 1, 1)$ sono:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}_1 &= 0\\ \dot{\Delta x}_2 &= \Delta x_2 - \Delta u\\ \Delta y &= \Delta x_1 + \Delta x_2\end{aligned}$$

1.3 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio descritto al punto 1.2.

La matrice dinamica del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio descritto al punto 1.2 è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

con autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. La presenza di un autovalore reale positivo è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio è instabile.

1.4 Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato e dell'uscita del sistema associati alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$ e all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$ (suggerimento: si osservi che le due equazioni di stato sono disaccoppiate e che la seconda è lineare).

Il secondo membro della prima equazione di stato si annulla quando si pone $x_1(t) = 1$ e $u(t) = 1$, $\forall t$, quindi la soluzione della prima equazione di stato associata a $x_1(0) = 1$ e $u(t) = 1$, $t \geq 0$, è: $x_1(t) = 1$, $t \geq 0$.

Per quanto riguarda la soluzione della seconda equazione di stato associata a $x_2(0) = 2$ e $u(t) = 1$, $t \geq 0$, è:

$$x_2(t) = e^t x_2(0) + \int_0^t e^{t-\tau}(-1)d\tau = 2e^t + e^t \int_0^t -e^{-\tau} d\tau = 2e^t + e^t[e^{-t} - 1] = 1 + e^t,\ t \geq 0.$$

Il movimento dell'uscita si ottiene dalla trasformazione di uscita:

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) = 1 + e^t,\ t \geq 0.$$

2. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -20x_1(t) - x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 20u(t) \\
y(t) &= 2x_1(t)
\end{aligned}$$

2.1 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y. Specificarne poli, zeri, guadagno e tipo.

Applicando la trasformata di Laplace alla seconda equazione di stato (sotto l'ipotesi di considerare nulle le condizioni iniziali), si ottiene

$$sX_2(s) = -2X_2(s) + 20U(s).$$

Da cui

$$X_2(s) = \frac{20}{s+2}U(s).$$

Applicando la trasformata di Laplace alla prima equazione di stato (sotto l'ipotesi di considerare nulle le condizioni iniziali) e sostituendo l'espressione appena determinata di $X_2(s)$, si ottiene

$$sX_1(s) = -20X_1(s) - X_2(s) = -20X_1(s) - \frac{20}{s+2}U(s).$$

Da cui

$$X_1(s) = -\frac{20}{(s+2)(s+20)}U(s).$$

Dalla trasformazione di uscita si ha:

$$Y(s) = 2X_1(s) = -\frac{40}{(s+2)(s+20)}U(s)$$

e quindi

$$G(s) = -\frac{40}{(s+2)(s+20)}.$$

Il tipo di $G(s)$ è $g = 0$, il guadagno è $\mu = G(0) = -1$, $G(s)$ non presenta zeri e ha 2 poli $p_1 = -2$ e $p_2 = -20$.

2.2 Si consideri il movimento forzato dell'uscita del sistema associato all'ingresso $u(t) = 3e^{-t}$, $t \geq 0$. Determinarne il valore iniziale $y(0)$ e quello finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ mediante i teoremi del valore iniziale e del valore finale, dopo avere valutato se sono applicabili.

La trasformata di Laplace del movimento forzato dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 3e^{-t}$, $t \geq 0$, è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = -\frac{120}{(s+2)(s+20)(s+1)}$$

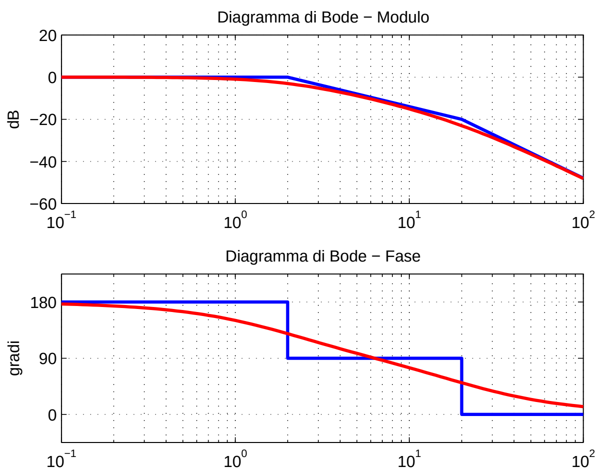
Il teorema del valore iniziale è applicabile perchè $Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0.$$

Il teorema del valore finale è applicabile perchè $Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria e le radici del denominatore di $Y(s)$ sono tutte a parte reale strettamente negativa:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = 0.$$

2.3 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici ed esatti della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ determinata al punto 2.1.



2.4 Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema all'ingresso $u(t) = 2sca(t) + sen(0.1t)$. Valutare il tempo necessario affinchè la risposta del sistema si assesti a quella di regime calcolata.

Dato che il sistema è asintoticamente stabile (la matrice dinamica A ha autovalori uguali a -20 e -2), ha senso parlare di risposta di regime.

La trasformata di Laplace della risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2sca(t) + sen(0.1t)$ è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}[2sca(t) + sen(0.1t)] = G(s)\mathcal{L}[2sca(t)] + G(s)\mathcal{L}[sen(0.1t)].$$

Basta quindi calcolare quindi separatamente i contributi alla risposta di regime di $u_1(t) = 2sca(t)$ e $u_2(t) = sen(0.1t)$ e poi sommarli.

Per calcolare $y_{1,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema del valore finale:

$$y_{1,\infty}(t) = \lim_{s\to 0} sY_1(s) = \lim_{s\to 0} s\,G(s)2\frac{1}{s} = 2G(0) = -2$$

Per calcolare $y_{2,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema della risposta in frequenza:

$$y_{2,\infty}(t) = |G(i0.1)|sen(0.1t + \arg G(i0.1)) \simeq sen(0.1t + \pi).$$

La risposta di regime richiesta è quindi

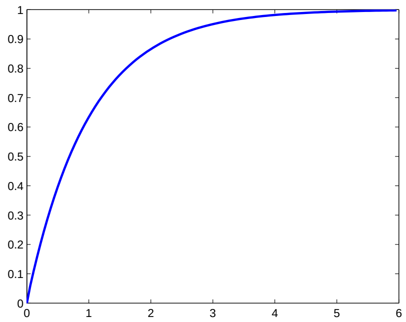
$$y_\infty(t) = -2 - sen(0.1t).$$

Dato che gli autovalori del sistema sono uguali a -20 e -2, il tempo necessario perchè la risposta del sistema si assesti a quella di regime è $T_a \simeq 5\frac{1}{2} = 2.5$ unità di tempo.

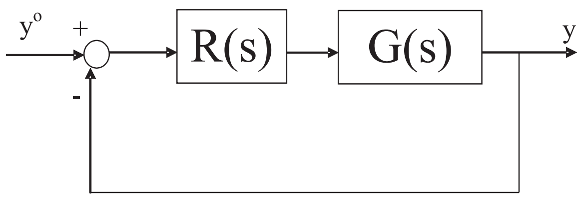
3. Si consideri un sistema dinamico lineare completamente raggiungibile e osservabile con ingresso u ed uscita y e funzione di trasferimento

$$G(s) = 2\frac{(s+100)}{(s+1)(s+200)}$$

3.1 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ (specificare nel grafico valore iniziale, valore asintotico, e tempo di assestamento).



3.2 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.



Scegliere i parametri k e T della funzione di trasferimento $R(s) = k\frac{1+sT}{s}$ del regolatore in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) il margine di fase ϕ_m è maggiore o uguale a $\frac{\pi}{2}$;

ii) la pulsazione critica ω_c è circa uguale a 10.

Se $T = 1$ e $k = 10$ allora sono rispettate tutte le specifiche.

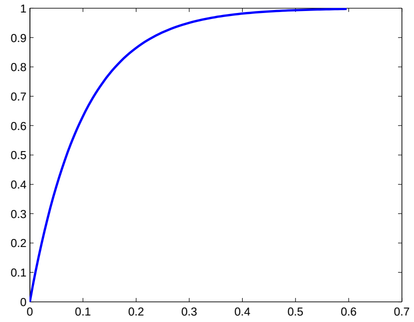
3.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema retroazionato progettato al punto 3.2 quando $y^\circ(t) = sca(t)$ (specificare nel grafico valore iniziale, valore asintotico, e tempo di assestamento).

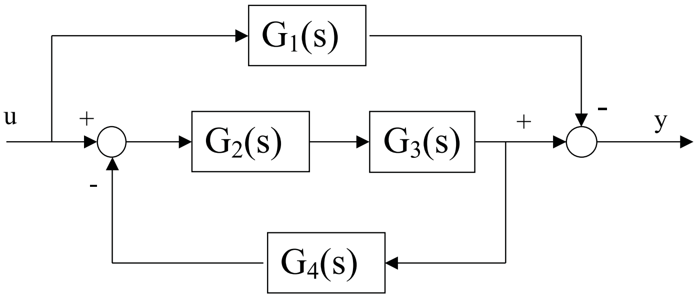
Dato che $\phi_m > \pi/3$, ai fini della valutazione della risposta allo scalino, la funzione di trasferimento tra y° e y può essere approssimata con

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

dove $\mu_F = 1$ perchè c'è un integratore nella funzione di trasferimento d'anello e $\omega_c = 10$.

4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di quattro sistemi lineari del 1^o ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, e $G_4(s)$.





4.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) se la funzione di trasferimento $G_1(s)$ presenta un polo pari a 3, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.
Vero. Il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ ha un autovalore pari a 3 e non è retroazionato. Quindi i suoi autovalori sono anche autovalori del sistema con ingresso u ed uscita y. La presenza di un autovalore con parte reale positiva è sufficiente per concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

b) se la funzione di trasferimento $G_2(s)$ presenta un polo pari a 3, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.
Falso. Il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ fa parte di un sistema retroazionato e gli autovalori di un sistema retroazionato sono in generale diversi dagli autovalori dei sistemi componenti.

4.2 Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, e $G_4(s)$.

La funzione $H(s)$ del sistema complessivo è:

$$H(s) = -G_1(s) + \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)}.$$