

Appello del 6 luglio 2010: testo e soluzione

1. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + (1 + \alpha)x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3\alpha x_2(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

dove α è un parametro reale.

1.1 Determinare per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile.

La matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 + \alpha \\ 1 & 3\alpha \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \alpha)(\lambda - 3\alpha) - (1 + \alpha) = \lambda^2 - 4\alpha\lambda + 3\alpha^2 - \alpha - 1$$

Condizione necessaria e sufficiente perché le radici di questo polinomio siano a parte reale strettamente negativa è che

$$\begin{cases} -4\alpha > 0 \\ 3\alpha^2 - \alpha - 1 > 0 \end{cases}$$

cioè

$$\alpha < \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

1.2 Posto $\alpha = -1$, determinare la funzione di trasferimento del sistema. Calcolare la trasformata di Laplace $Y(s)$ del movimento forzato dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 1, t \geq 0$. Calcolare valore iniziale $y(0)$ e valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ mediante i teoremi del valore iniziale e finale.

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni di stato con $x_1(0) = x_2(0) = 0$ si ottiene

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}X_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}U(s).$$

Dalla trasformazione di uscita segue che

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}U(s).$$

Quindi la funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}.$$

La trasformata di Laplace $Y(s)$ del movimento forzato dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 1, t \geq 0$ è data da

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}.$$

Ad essa sono applicabili entrambi i teoremi del valore iniziale e finale:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+1)(s+3)} = 0$$

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{3}.$$

1.3 Posto $\alpha = -1$, determinare l'espressione analitica $y_f(t)$ del movimento forzato dell'uscita del sistema associato all'ingresso $u(t) = 1, t \geq 0$.

La trasformata di Laplace $Y(s)$ del movimento forzato dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 1, t \geq 0$ è data da

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}.$$

Essa può essere sviluppata in fratti semplici

$$Y(s) = \frac{1/3}{s} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s+3}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}, t \geq 0.$$

1.4 Posto $\alpha = -1$, determinare l'espressione analitica $y_l(t)$ del movimento libero dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

La soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

associata a $u(t) = 0, t \geq 0$, e $x_1(0) = 1$, è $x_2(t) = e^{-t}, t \geq 0$.

Sostituiamo questa espressione nella seconda equazione di stato e otteniamo:

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + e^{-t}$$

la cui soluzione associata a $x_2(0) = 0$ è

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-3\tau} e^{-(t-\tau)} = e^{-t} \int_0^t e^{-2\tau} = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}), t \geq 0.$$

Il movimento dell'uscita è

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}), t \geq 0.$$

2. Si consideri il sistema dinamico non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_1 + 3x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= -x_2^2 + x_1 \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1}$$

2.1 Verificare che $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ è stato di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad esso.

Basta verificare che

$$\begin{aligned}-\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - 1 &= 0 \\ -\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1 &= 0\end{aligned}$$

Le equazioni del sistema linearizzato attorno a tale equilibrio sono:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= -4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 - \Delta u \\ \Delta \dot{x}_2 &= \Delta x_1 - 2\Delta x_2 \\ \Delta y &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{2}$$

2.2 Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio specificato al punto precedente.

La matrice dinamica del sistema linearizzato

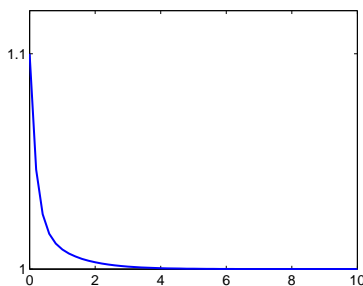
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è

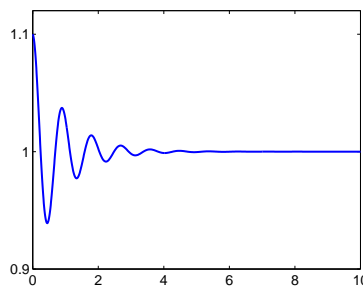
$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 4)(\lambda + 2) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 5$$

e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$. Essi sono entrambi a parte reale strettamente negativa. Questa è condizione sufficiente per concludere che lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

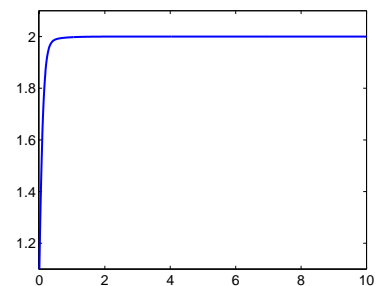
2.3 Dire, motivando la risposta, quale dei grafici (a), (b), e (c) sotto riportati rappresenta il movimento dell'uscita y del sistema non lineare (2) associato all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e alla condizione iniziale $x_1(0) = \bar{x}_1 + 0.1 = 1.1$ e $x_2(0) = \bar{x}_2 = 1$.



(a)



(b)

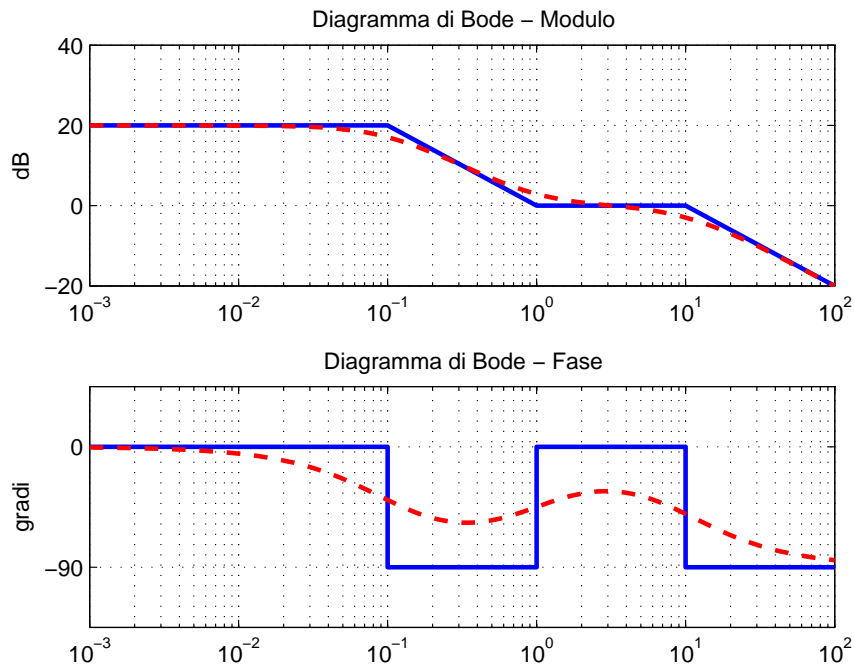


(c)

Dato che lo stato di equilibrio $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ associato all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$, è asintoticamente stabile, il movimento ottenuto perturbando la condizione iniziale $x_1(0) = \bar{x}_1 + 0.1 = 1.1$

e $x_2(0) = \bar{x}_2 = 1$ rispetto all'equilibrio tenderà a $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$. Di conseguenza l'uscita tenderà al valore di equilibrio $\bar{y} = \bar{x}_2 = 1$ a partire da $y(0) = x_2(0) = 1.1$. Questo permette di escludere il grafico (c). L'andamento non presenterà oscillazioni ripetute perchè gli autovalori del sistema linearizzato sono reali. Questo permette di escludere il grafico (b). Il grafico corretto è quindi (a).

3. In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode (approssimati ed esatti) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare di ordine 2.



3.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è asintoticamente stabile.

Vero. $G(s)$ presenta due poli reali negativi ($p_1 = -0.1$ e $p_2 = -10$ e il sistema ha ordine 2.

b) la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$, tende a 10.

Vero. La risposta del sistema tende al guadagno ed esso vale 10.

c) i segnali sinusoidali con pulsazione $\omega \leq 0.01$ sono amplificati di un fattore maggiore o uguale a 20.

Falso. Sono amplificati di un fattore pari circa a 10.

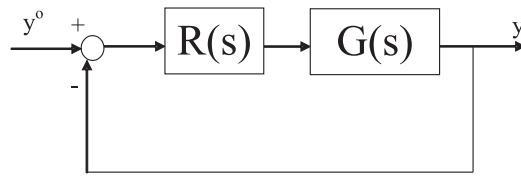
d) la risposta del sistema allo scalino presenta una sovraelongazione.

Falso. Si tratta di un sistema a 2 poli reali ed 1 solo zero tutti negativi. Lo zero ha costante di tempo compresa tra quella dei due poli.

3.2 Determinare l'espressione analitica della risposta di regime $y_\infty(t)$ del sistema quando $u(t) = \text{sen}(0.001t) + 2\text{sen}(100t)$.

$$y_\infty(t) = 10\text{sen}(0.001t) + 0.2\text{sen}(100t - \pi/2)$$

3.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato secondo lo schema classico di controllo in figura.



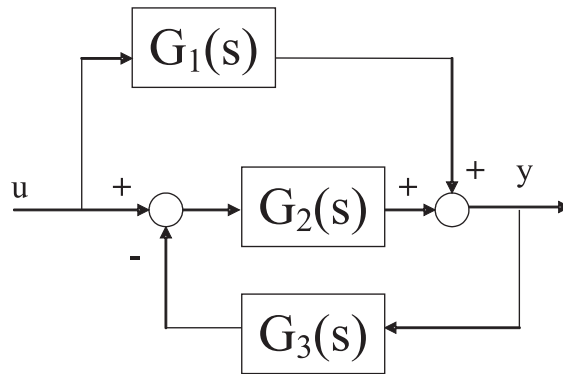
Determinare i valori dei parametri k e T della funzione di trasferimento

$$R(s) = k \frac{1 + sT}{s}$$

del controllore in modo che la pulsazione critica ω_c delle funzione di trasferimento di anello $L(s) = R(s)G(s)$ sia $\omega_c \simeq 0.1$, ed il margine di fase ϕ_m soddisfi la condizione $\phi_m \geq 45^\circ$.

Una possibile soluzione è $k = \frac{\sqrt{2}}{100}$ e $T = 0$.

4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1° ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



4.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) Se $G_2(s) = \frac{1}{s-10}$, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.
 Falso. Il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ è retroazionato ed i suoi autovalori non sono in generale autovalori del sistema complessivo.
- b) Se $G_1(s) = \frac{1}{s-10}$, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.
 Vero. Il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ non è retroazionato ed i suoi autovalori (tra cui $\lambda = 10$) sono autovalori del sistema complessivo.

4.2 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

$$H(s) = G_1(s) \frac{1}{1 + G_2(s)G_3(s)} + \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

5. Enunciare il criterio degli autovalori.

Si veda il libro di testo.