Fondamenti di Automatica (TLC) **Prof. Maria Prandini**

I prova in itinere del 20 novembre 2008: testo e soluzione

1. Si consideri il sistema lineare $\mathcal{S}$ con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1.1 Calcolare l'espressione analitica del movimento libero dell'uscita associato alla condizione iniziale $x_0 = [x_{0,1}\, x_{0,2}]^T$.

La matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Essa ha autovalori reali distinti $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. I modi del sistema sono quindi e^{2t} e e^{-3t}, e quindi il movimento libero dell'uscita è:

$$y(t) = \gamma_1 e^{2t} + \gamma_2 e^{-3t},\ t \geq 0.$$

I coefficienti γ_1 e γ_2 possono essere calcolati imponendo che $y(0) = x_1(0) = x_{0,1}$ e $\dot{y}(0) = \dot{x}_1(0) = 2x_1(0) - x_2(0) = 2x_{0,1} - x_{0,2}$:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = x_{0,1} \\ 2\gamma_1 - 3\gamma_2 = 2x_{0,1} - x_{0,2} \end{cases}$$

da cui si ottiene $\gamma_1 = x_{0,1} - \frac{1}{5}x_{0,2}$ e $\gamma_2 = \frac{1}{5}x_{0,2}$.

Si ha dunque che il movimento libero dell'uscita cercato è

$$y(t) = (x_{0,1} - \frac{1}{5}x_{0,2})e^{2t} + \frac{1}{5}x_{0,2}e^{-3t},\ t \geq 0.$$

1.2 Valutare se esistono condizioni iniziali non nulle ($x_0 \neq [0\,0]^T$) tali che il movimento libero dell'uscita tende a zero asintoticamente.

Affinchè il movimento libero dell'uscita tenda a zero asintoticamente, il modo divergente e^{2t} non deve apparire nella sua espressione.

Sulla base dell'espressione calcolata al punto precedente si può concludere che sono tutte e sole le condizioni iniziali $x_0 = [x_{0,1}\, x_{0,2}]^T$ con $x_{0,1} = \frac{1}{5}x_{0,2}$. In tal caso, infatti il movimento libero dell'uscita è dato da:

$$y(t) = \frac{1}{5}x_{0,2}\, e^{-3t},\ t \geq 0.$$

1.3 Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio (($\bar{x} = [\bar{x}_1\, \bar{x}_2]^T$ e $\bar{y}$) associati all'ingresso costante $u(t) = 3$, $t \geq 0$.

Il valore degli stati di equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato calcolati ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 3$, $\forall t$.

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0 \\ -3\bar{x}_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

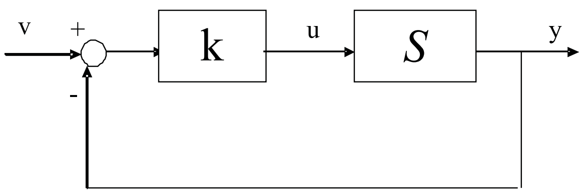
da cui si ottiene

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0.5 \\ \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = 0.5 \end{cases}$$

1.4 Verificare che l'equilibrio calcolato al punto precedente è instabile.

Dato che il sistema è lineare, basta valutare gli autovalori della matrice dinamica A del sistema. Essi sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Dato che λ_1 è reale positivo, si può concludere che l'equilibrio calcolato al punto precedente è instabile.

1.5 Si consideri il sistema con ingresso v ed uscita y ottenuto retroazionando il sistema $\mathcal{S}$ descritto sopra secondo lo schema in figura, dove k è un parametro reale.



(a) Scrivere le equazioni del sistema retroazionato con ingresso v ed uscita y.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -kx_1(t) - 3x_2(t) + kv(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

(b) Determinare se esistono dei valori del parametro k tali che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

La matrice dinamica del sistema retroazionato è

$$A_R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -k & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A_R è:

$$det(\lambda I - A_R) = (\lambda - 2)(\lambda + 3) - k = \lambda^2 + \lambda - k - 6$$

Esso ha radici a parte reale strettamente negativa se e solo se $-k - 6 > 0$ cioè $k < -6$.

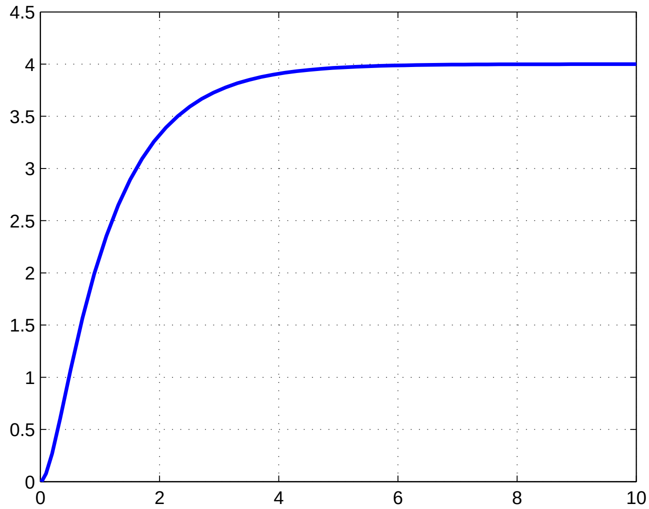
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per tutti i valori di k che soddisfano $k < -6$.

2. Si considerino i seguenti sistemi dinamici lineari:

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + 2u(t) \end{cases} \qquad \mathcal{S}_b : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 10x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -10x_1(t) + 100x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -50x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 20x_1(t) \end{cases} \qquad \mathcal{S}_d : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 11x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

2.1 Dire, giustificando la risposta, quale dei sistemi $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$, e $\mathcal{S}_d$ ammette come risposta forzata allo scalino $u(t) = sca(t)$ l'andamento tracciato in figura.



La risposta forzata allo scalino parte da 0. Si può quindi escludere il sistema $\mathcal{S}_a$ perchè non è strettamente proprio e per esso $y(0) = x_1(0) + 2u(0) = 2 \neq 0$.

La risposta forzata allo scalino si assesta al valore di regime in circa 5 unità di tempo. Si può quindi escludere il sistema $\mathcal{S}_c$ perchè gli autovalori della sua matrice dinamica

$$A_c = \begin{bmatrix} -10 & 100 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$$

sono $\lambda_1 = -10$ e $\lambda_2 = -50$ ed il tempo di assestamento è inferiore a 5 unità di tempo

La risposta forzata allo scalino si assesta al valore di regime senza oscillazioni. Si può quindi escludere il sistema $\mathcal{S}_d$ perchè gli autovalori della sua matrice dinamica

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$$

sono le radici di $(\lambda + 1)^2 + 11$ e sono quindi complessi coniugati ($\lambda_1 = -1 + i\sqrt{11}$ e $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{11}$).

Per esclusione, il sistema che ammette come risposta forzata allo scalino $u(t) = sca(t)$ l'andamento tracciato in figura è $\mathcal{S}_b$.

2.2 Determinare la trasformata di Laplace della risposta forzata $y(t)$ del sistema $\mathcal{S}_c$ all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Calcolare $y(0)$ e $y_\infty = \lim_{t \to +\infty} y(t)$ mediante i teoremi del valore iniziale e finale. In quanto tempo $y(t)$ si assesta al valore asintotico y_∞?

E' necessario calcolare prima la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema $\mathcal{S}_c$:

$$Y(s) = 20X_1(s) = 20\frac{100}{s+10}X_2(s) = \frac{2000}{(s+10)(s+50)}U(s)$$

da cui segue che

$$G(s) = \frac{2000}{(s+10)(s+50)}$$

La trasformata di Laplace della risposta forzata $y(t)$ del sistema $\mathcal{S}_c$ all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, è quindi data da

$$Y(s) = \frac{2000}{(s+10)(s+50)(s+1)}$$

Essa è razionale fratta strettamente propria con le radici a denominatore tutte a parte reale strettamente negativa. Entrambi i teoremi del valore iniziale e finale sono quindi applicabili.

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{2000s}{(s+10)(s+50)(s+1)} = 0$$

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{2000s}{(s+10)(s+50)(s+1)} = 0$$

La risposta forzata $y(t)$ del sistema $\mathcal{S}_c$ all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, si assesta al valore di regime y_∞ in 5 unità di tempo dato che le radici del denominatore della sua trasformata di Laplace sono -10, -50, e -1 e danno come contributi tre esponenziali che tendono a zero con costante di tempo 0.1, 0.02, e 1, rispettivamente.

3. Si consideri un sistema dinamico lineare di ordine 2 con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(1+0.5s)}{(1+10s)(1+0.2s)}$$

3.1 Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è asintoticamente stabile.

VERO. $G(s)$ ha due poli $p_1 = -0.1$ e $p_2 = -5$. Dato che l'ordine del sistema è 2 essi sono tutti e soli gli autovalori del sistema. Per il criterio degli autovalori il sistema è asintoticamente stabile.

b) il sistema è strettamente proprio.

VERO. Il numero di poli di $G(s)$ è maggiore del numero degli zeri.

c) la risposta allo scalino di ampiezza 0.5 tende a $y_\infty = 10$ asintoticamente.

FALSO. Il guadagno del sistema è $G(0) = 10$, quindi la risposta allo scalino di ampiezza 0.5 tende a $y_\infty = 0.5G(0) = 5$ asintoticamente.

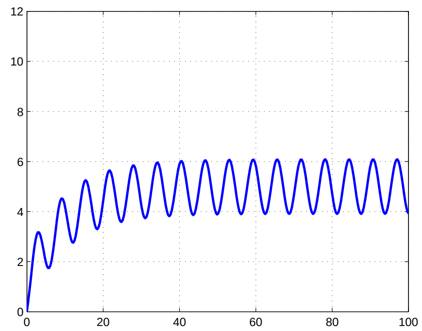
d) la risposta allo scalino si assesta al valore di regime in circa 50 unità di tempo.

VERO. La costante di tempo dominante del sistema è $\tau_d = 10$.

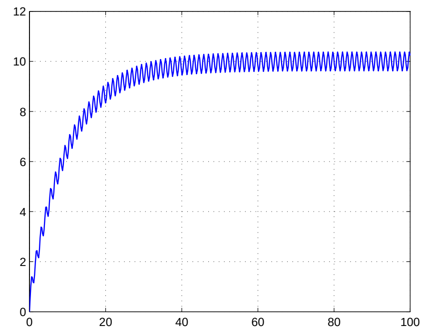
e) la risposta del sistema non diverge, qualunque sia l'ingresso applicato.

FALSO. Se si applica un ingresso divergente, per esempio $u(t) = e^t$, $t \geq 0$, la risposta $y(t)$ presenterà un termine divergente αe^t.

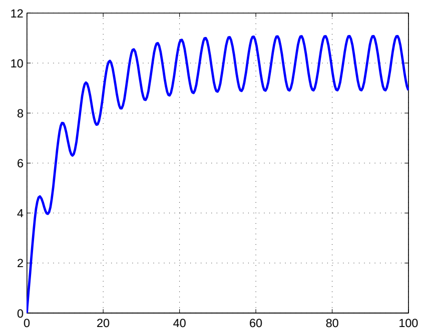
3.2 Dire, motivando la risposta, quale fra gli andamenti (a), (b), (c), e (d) sotto riportati rappresenta la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1 + sen(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.



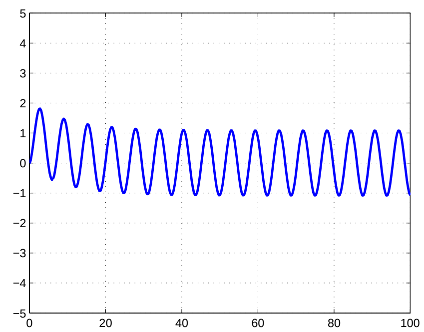
(a)



(b)



(c)



(d)

La risposta a $u_1(t) = 1$, $t \geq 0$, tende a $G(0) = 10$ con andamento esponenziale ($G(s)$ ha poli reali) in circa 50 unità di tempo. La risposta a $u_2(t) = sen(t)$, $t \geq 0$, presenta un contributo oscillatorio sinusoidale della forma $\alpha sen(t) + \beta cos(t)$ oltre ai contributi esponenziali tendenti a zero dei due poli reali di $G(s)$.

La risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1 + sen(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è quindi quella di figura (c), perchè a regime presenta un andamento sinusoidale con periodo $T = 2\pi$ attorno al valore 10.

4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1^3(t) + u(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1^2(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_2^2(t) \end{aligned}$$

4.1 Determinare $\bar{u}$ in modo che $\bar{x}_1 = 1$ e $\bar{x}_2 = 2$ sia stato di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$.

Il valore degli stati di equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato calcolati ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1 = 1$, $x_2(t) = \bar{x}_2 = 2$ e $u(t) = \bar{u}$, $\forall t$.

$$\begin{cases} -1 + 2\bar{u} = 0 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $\bar{u} = 0.5$.

4.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno all'equilibrio descritto al punto 4.1.

Le equazioni del sistema linearizzato sono:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= -3\Delta x_1 + 0.5\Delta x_2 + 2\Delta u \\ \Delta\dot{x}_2 &= 4\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \Delta y &= 4\Delta x_2 \end{aligned}$$

4.3 Valutare le proprietà di stabilità dell'equilibrio descritto al punto 4.1. La matrice dinamica del sistema linearizzato calcolato al punto precedente è

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4\lambda + 1$. Esse sono tutte a parte reale negativa. Questa è condizione sufficiente per concludere che l'equilibrio è asintoticamente stabile.