

## Appello del 8 luglio 2009: testo e soluzione

1. Si consideri il sistema con ingresso  $u$  ed uscita  $y$  descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)\text{sen}(\pi x_2(t)) - 3x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$

1.1 Determinare il movimento dell'uscita associato alla condizione iniziale  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$ , e all'ingresso  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$ .

La seconda equazione di stato è indipendente dalla prima e lineare:

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

E' possibile quindi determinare il movimento di  $x_2(t)$  associato a  $x_2(0) = 2$  e  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$ . Esso risulta essere

$$x_2(t) = 2, t \geq 0.$$

Sostituisco questa espressione nella prima equazione di stato e ottengo:

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t)$$

E' possibile quindi determinare il movimento di  $x_1(t)$  associato a  $x_1(0) = 1$  e  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$ . Esso risulta essere

$$x_1(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

Dalla trasformazione di uscita segue che

$$y(t) = e^{-6t} + 2, t \geq 0.$$

1.2 Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio ( $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  e  $\bar{y}$ ) associati all'ingresso costante  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$ .

I valori  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  degli stati di equilibrio si ottengono uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato e ponendo  $x_1(t) = \bar{x}_1$ ,  $x_2(t) = \bar{x}_2$  e  $u(t) = \bar{u} = 2$ ,  $\forall t$ . L'uscita di equilibrio corrispondente si ottiene dalla trasformazione di uscita.

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1\text{sen}(\pi\bar{x}_2) - 3\bar{x}_1 = 0 \\ -\bar{x}_2 + 2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 2 \\ \bar{y} = 2 \end{cases}$$

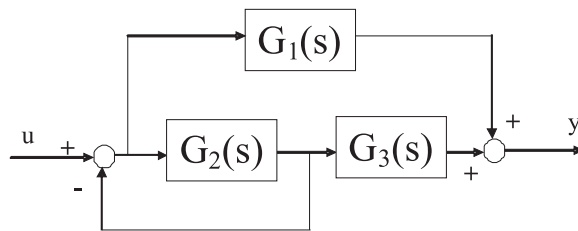
1.3 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio determinato al punto 1.2.

La matrice dinamica del sistema linearizzato attorno al movimento di equilibrio calcolato al punto 1.2 è

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Da ciò segue che il movimento di equilibrio del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

2. Si consideri il sistema con ingresso  $u$  ed uscita  $y$  in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1° ordine con funzione di trasferimento  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , e  $G_3(s)$ .



2.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento  $H(s)$  del sistema con ingresso  $u$  ed uscita  $y$  in funzione di  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , e  $G_3(s)$ .

$$H(s) = G_3(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)} + G_1(s) \frac{1}{1 + G_2(s)}$$

2.2 Posto  $G_1(s) = -\frac{1}{s+2}$ ,  $G_2(s) = \frac{1}{s+2}$ ,  $G_3(s) = \frac{s+3}{s+1}$  nell'espressione calcolata al punto precedente:

(a) verificare che  $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$ ;

$$H(s) = \frac{s+3}{s+1} \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+2}} - \frac{1}{s+2} \frac{1}{1 + \frac{1}{s+2}} = \frac{s+3}{s+1} \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2} \frac{s+2}{s+3} = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

(b) verificare che il sistema con ingresso  $u$  ed uscita  $y$  è asintoticamente stabile.

Il sistema è di ordine 3, la funzione di trasferimento  $H(s)$  ha 2 poli ( $p_1 = -1$  e  $p_2 = -3$ ), quindi c'è un autovalore nascosto. Essendo i due poli a parte reale strettamente negativa, basta verificare che lo sia anche l'autovalore nascosto.

Il sistema con ingresso  $u$  e uscita  $y$  è dato dall'interconnessione di 3 sistemi di cui quelli con funzione di trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_3(s)$  non sono retroazionati. I loro autovalori  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_3 = -1$  sono anche autovalori del sistema interconnesso. Da questo segue che l'autovalore nascosto cercato è  $\lambda_1 = -2$ , e quindi il sistema con ingresso  $u$  e uscita  $y$  è asintoticamente stabile.

2.3 Determinare la trasformata di Laplace del movimento forzato dell'uscita  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , del sistema con funzione di trasferimento  $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$  all'ingresso  $u(t) = e^{-10t}$ ,  $t \geq 0$ . Calcolare, se possibile, il valore iniziale  $y(0)$  e quello finale  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  con i teoremi del valore iniziale e finale.

La trasformata di Laplace del movimento forzato di interesse è  $Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)(s+10)}$ . Essa è razionale fratta strettamente propria con radici del denominatore reali negative. Sono quindi applicabili entrambi i teoremi del valore iniziale e finale.

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2}{(s+1)(s+3)(s+10)} = 0$$

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{(s+1)(s+3)(s+10)} = 0$$

2.4 Determinare la risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento  $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$  quando  $u(t) = e^{-10t} + 1 + \text{sen}(0.01t)$ ,  $t \geq 0$ . Quanto tempo ci impiega l'uscita  $y(t)$  ad assumere l'andamento di regime calcolato?

Per il calcolo della risposta di regime, consideriamo separatamente il contributo di  $u_1(t) = e^{-10t}$ ,  $u_2(t) = 1$ , e  $u_3(t) = \text{sen}(0.01t)$  alla risposta di regime  $y_\infty(t)$ .

I primi due contributi si calcolano applicando il teorema del valore finale:

$$y_{1,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{(s+1)(s+3)(s+10)} = 0$$

$$y_{2,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{(s+1)(s+3)s} = \frac{2}{3}$$

Per quanto riguarda il terzo, esso è dato dal teorema della risposta in frequenza

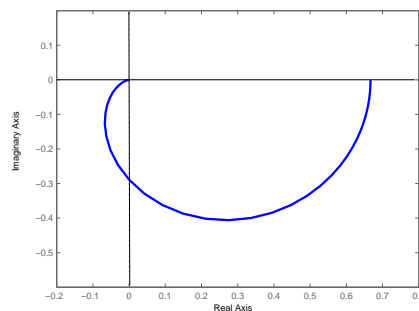
$$y_{3,\infty}(t) = |H(0.01i)| \text{sen}(0.01t + \arg H(0.01i)) \simeq \frac{2}{3} \text{sen}(0.01t)$$

Si ha quindi che

$$y_\infty(t) \simeq \frac{2}{3} [1 + \text{sen}(0.01t)]$$

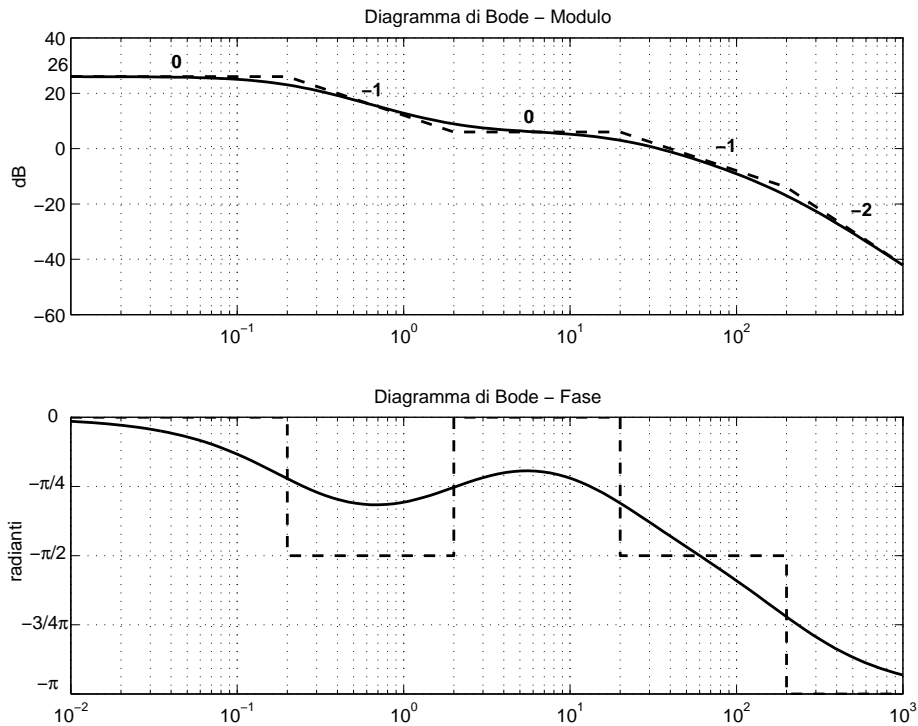
Il contributo alla risposta del sistema dovuto ai poli va a zero in  $5\tau_d$  unità di tempo, ove  $\tau_d$  è la costante di tempo dominante del sistema con funzione di trasferimento  $H(s)$ . Dato che l'esponenziale  $e^{-10t}$  in ingresso va a zero in 0.5 unità di tempo e  $\tau_d = 1$ , l'uscita  $y(t)$  assume l'andamento di regime calcolato in 5 unità di tempo.

2.5 Tracciare il diagramma polare della funzione di trasferimento  $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$ .



3. Si consideri un sistema dinamico lineare di ordine 3 con funzione di trasferimento  $G(s)$ .

3.1 In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode (approssimati ed esatti) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$ .



Dire, giustificandola risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è asintoticamente stabile.

Vero. Sono presenti 3 poli reali negativi (quando la pendenza del diagramma di Bode approssimato del modulo diminuisce, diminuisce anche la fase) e l'ordine del sistema è 3.

b) il sistema è strettamente proprio.

Vero. La funzione di trasferimento  $G(s)$  ha 3 poli ed 1 solo zero.

c) la risposta allo scalino si assesta ad un valore pari a circa  $20/21$ .

Falso. Si assesta al guadagno  $G(0) \simeq 20$ .

d) i segnali sinusoidali a pulsazione inferiore a 0.1 vengono amplificati di un fattore pari a circa 20.

Vero. Il diagramma di Bode del modulo vale circa 20 per  $\omega < 0.1$ .

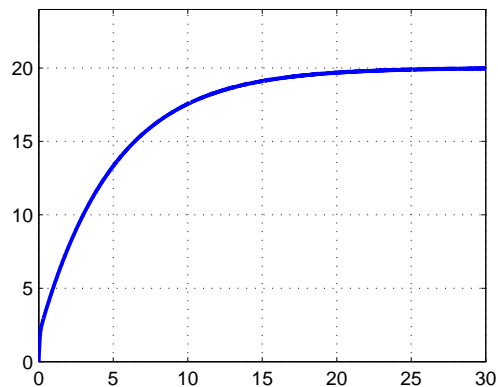
e) la risposta allo scalino si assesta al valore di regime in circa 25 unità di tempo.

Vero. Il polo dominante è  $p_d = -0,2$ , e quindi la costante di tempo dominante è  $\tau_d = 5$ .

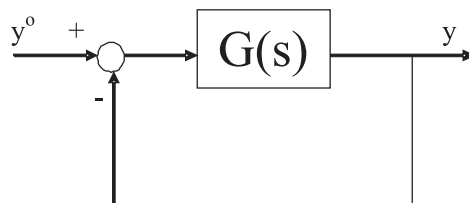
3.2 Determinare la funzione di trasferimento  $F(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$  dell'approssimazione a polo dominante del sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  sopra descritto ( $\mu$  è il guadagno di  $G(s)$ , mentre  $\tau$  è la costante di tempo dominante).

$$F(s) = \frac{20}{1+5s}$$

3.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , allo scalino del sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$ .



4. Il sistema dinamico lineare di ordine 3 con funzione di trasferimento  $G(s)$  dell'esercizio 3 viene retroazionato secondo lo schema in figura.



4.1 Dire, giustificandola risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Vero. Per il criterio di Bode.

b) il sistema retroazionato è strettamente proprio.

Vero. Il sistema retroazionato ha funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

ed il sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  è strettamente proprio.

c) la risposta allo scalino del sistema retroazionato si assesta ad un valore pari a circa 20/21.

Vero. Il guadagno della funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

del sistema retroazionato è

$$F(0) = \frac{G(0)}{1+G(0)} = \frac{20}{21}$$

d) il sistema retroazionato amplifica i segnali sinusoidali a pulsazione inferiore a 0.1 di un fattore pari a circa 20.

Falso. La sinusoide a pulsazione  $\omega$  è riscalata in ampiezza di un fattore pari a

$$|F(i\omega)| = \frac{|G(i\omega)|}{|1 + G(i\omega)|}$$

che è circa pari ad 1 per pulsazioni inferiori alla pulsazione critica  $\omega_c = 30$ .

e) la risposta allo scalino del sistema retroazionato si assesta al valore di regime in circa 25 unità di tempo.

Falso. Essendo il margine di fase  $\phi_m = \pi - |\arg G(i\omega_c)| > \frac{\pi}{3}$ , la la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è approssimabile con

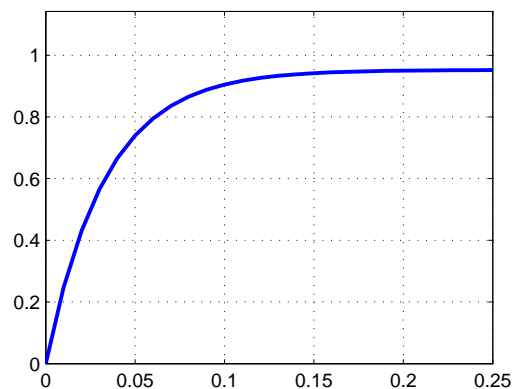
$$F(s) \simeq \frac{F(0)}{1 + s/\omega_c}$$

e quindi il tempo di assestamento è circa  $5/\omega_c \simeq 0.167$  unità di tempo.

4.2 Determinare la funzione di trasferimento dell'approssimazione a polo dominante del sistema retroazionato.

$$F(s) \simeq \frac{20/21}{1 + s/30}$$

4.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , allo scalino del sistema retroazionato.



5. Enunciare in modo chiaro e preciso il criterio di Bode.

Si veda la dispensa del corso.