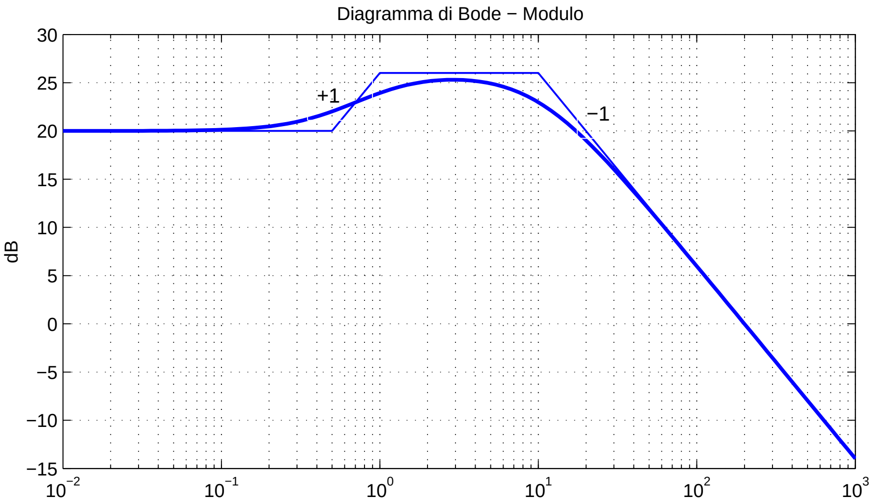
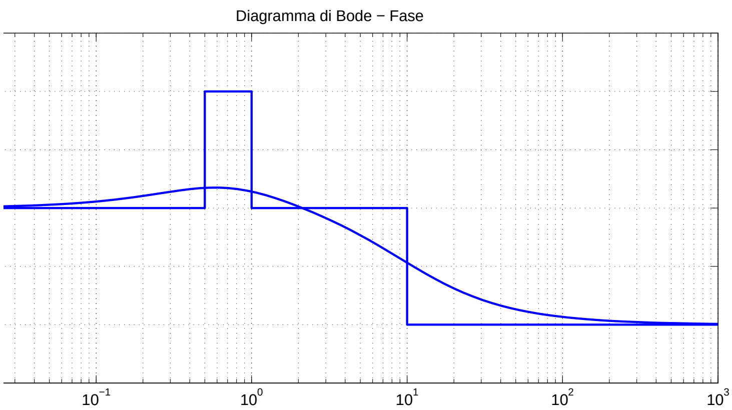
Fondamenti di Automatica (TLC) **Prof. Maria Prandini**

II prova in itinere del 12 febbraio 2009: testo e soluzione

1. Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile e a fase minima con funzione di trasferimento $G(s)$ con guadagno positivo. In figura è rappresentato il diagramma di Bode del modulo asintotico e reale della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



1.1 Tracciare il diagramma di Bode asintotico e reale (approssimato) della fase della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



1.2 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Segnali sinusoidali con pulsazione $\omega < 10$ sono amplificati di un fattore inferiore a 30.
Vero. Per il teorema della risposta in frequenza la sinusoide di pulsazione ω è riscalata di un fattore pari al modulo di $G(i\omega)$ ed il diagramma di Bode del modulo di $G(i\omega)$ per pulsazioni $\omega < 10$ è compreso tra 20 e 26 dB, cioè tra 10 e circa 20.

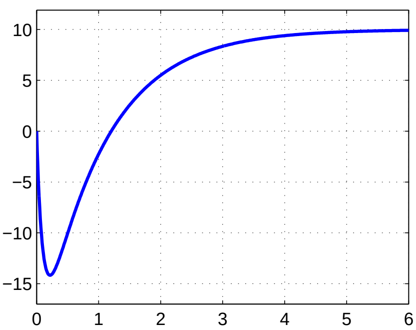
b) La risposta del sistema al segnale di ingresso $u(t) = sen(60t)$ tende asintoticamente ad una sinusoide con ampiezza uguale circa a 10.
Falso. Per il teorema della risposta in frequenza la sinusoide di pulsazione $\omega = 60$ è riscalata di

un fattore pari al modulo di $G(i60)$ e dal diagramma di Bode del modulo sopra riportato si vede che $|G(i60)|$ è parti a 10 dB cioè a $\sqrt{10}$.

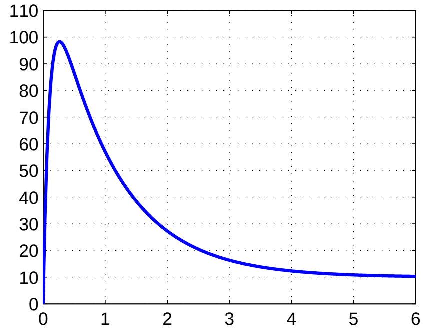
c) La risposta del sistema all'impulso tende a 10.
Falso. Il sistema è asintoticamente stabile. La risposta all'impulso tende quindi a zero.

d) Il sistema è strettamente proprio.
Vero. La pendenza del diagramma di Bode del modulo per $\omega \to +\infty$ è negativa, quindi $G(s)$ presenta più poli che zeri.

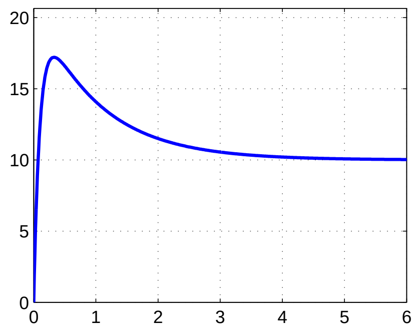
1.3 Dire, motivando la risposta, quale fra gli andamenti sotto riportati rappresenta la risposta forzata del sistema allo scalino di ampiezza unitaria.



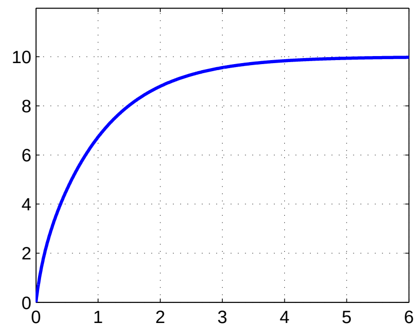
(a)



(b)



(c)

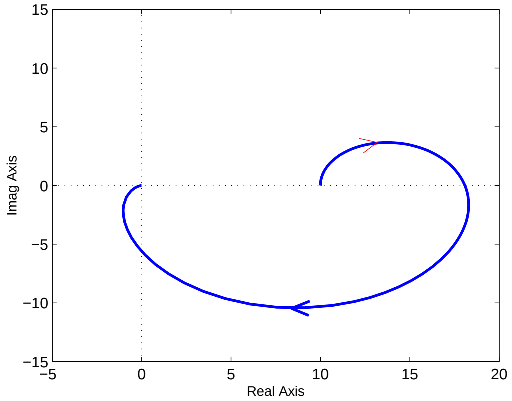


(d)

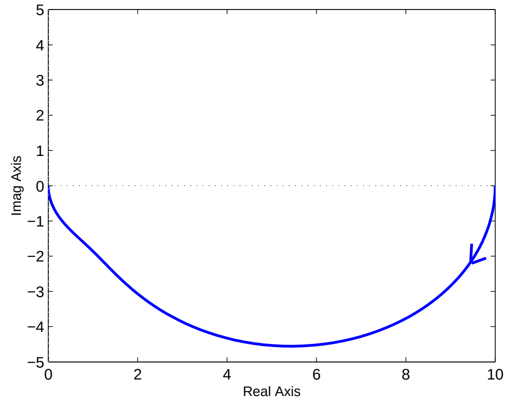
Si tratta dell'andamento riportato in figura (c) perchè il sistema è a fase minima (condizione incompatibile con la figura (a)), $G(s)$ presenta uno zero ($z = -0.5$) con costante di tempo maggiore dei 2 poli ($p_1 = -1$ e $p_2 = -10$) e quindi la risposta allo scalino ha una sovraelongazione (condizione incompatibile con la figura (d)). Il diagramma in figura (b) non è accettabile perchè la sovraelongazione raggiunge il valore 100, mentre si vede dal diagramma di Bode del modulo di $G(i\omega)$ che l'amplificazione massima delle componenti sinusoidali del segnale di ingresso è inferiore a 20.

1.4 Dire, motivando la risposta, quale fra i diagrammi riportati sotto rappresenta il diagramma polare della funzione di trasferimento del sistema.

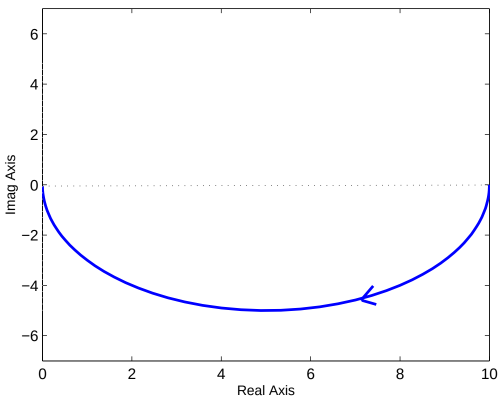
Si tratta del diagramma in figura (d) che parte dal valore 10 del guadagno $G(0)$ sull'asse reale, presenta un incremento del modulo e della fase (questa condizione è incompatibile con le figure (b) e (c)) e arriva nell'origine del piano complesso con tangente verticale (condizione incompatibile con la figura (a)).



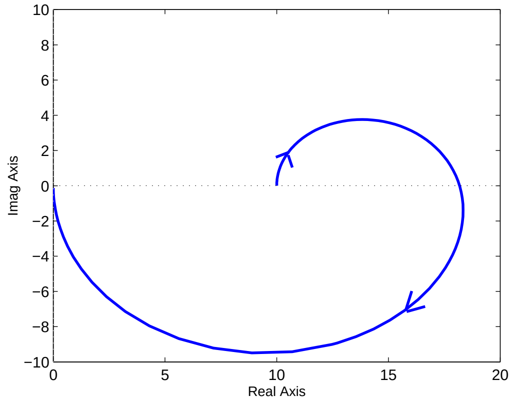
(a)



(b)

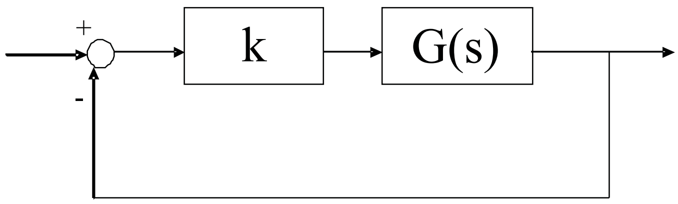


(c)



(d)

1.5 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura dove k è un parametro reale. Dire, motivando la risposta, se esiste un valore di $k > 0$ tale che il sistema retroazionato è instabile.

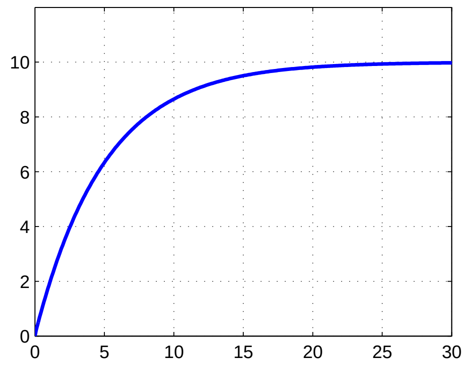


Dato che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato in figura è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di $kG(s)$ non abbraccia nè passa per il punto -1 sull'asse reale negativo. L'effetto di $k > 0$ è quello di riscalare il modulo di $G(i\omega)$ lasciandone invariata la fase. Essendo la fase di $G(i\omega)$ compresa tra $-90°$ e $+90°$, il diagramma di Nyquist di $kG(s)$ con $k > 0$ rimane confinato nel semipiano reale positivo e quindi non esiste nessun valore di $k > 0$ tale che il sistema retroazionato sia instabile.

2. Si consideri il sistema del 2^o ordine con funzione di trasferimento

$$G(s) = 3\frac{(s+20)}{(s+0.2)(s+30)}.$$

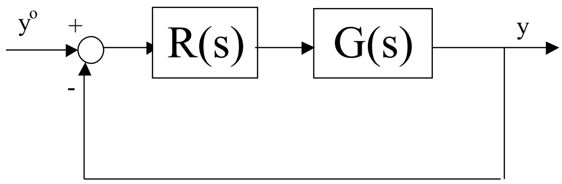
2.1 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria.



2.2 Si supponga di retroazionare il sistema secondo lo schema in figura, dove

$$R(s) = \mu\frac{1+sT}{s}$$

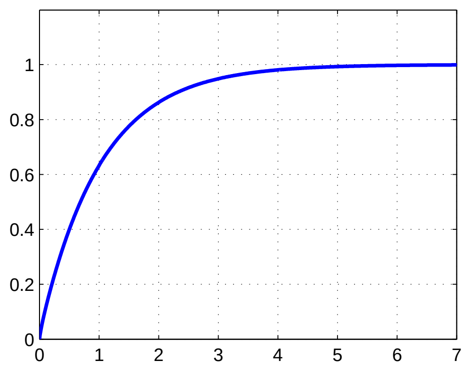
è la funzione di trasferimento del regolatore.



Determinare i parametri μ e T del regolatore in modo da soddisfare i seguenti requisiti:
i) quando $y^o(t) = Asca(t)$, $y(t)$ si assesta al valore A.
ii) la pulsazione critica è $\omega_c \simeq 1$ ed il margine di fase $\phi_m \simeq \pi/2$.

$\mu = 0.1$ e $T = 5$.

2.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata all'ingresso a scalino $y^o(t) = sca(t)$ del sistema di controllo progettato al punto 2.2.



2.4 Dire se e come varia la risposta la punto precedente nel caso in cui:
(a) $G(s) = 0.3\dfrac{(s+20)}{(s+0.2)(s+30)}$, e (b) $G(s) = 3\dfrac{(s+20)}{(s+0.2)(s+30)(1+s/100)}$.

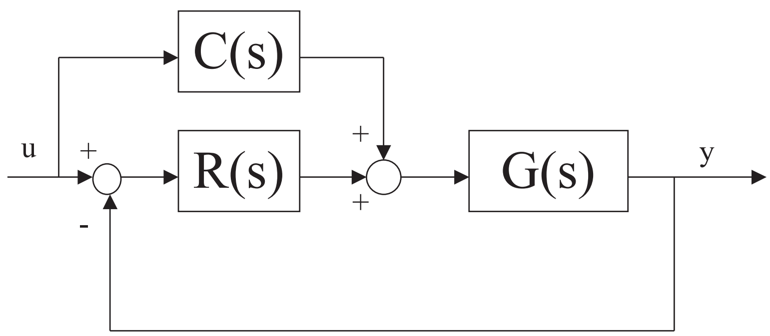
Nel caso (a) il guadagno è ridotto di un fattore 10. Il diagramma di Bode del modulo di $L(s) = G(s)R(s)$ viene traslado in basso di 20 dB e la pulsazione critica si sposta di una decade diventando $\omega_c = 0.1$, mentre il margine di fase rimane inalterato. Cambia solo il tempo di assestamento della risposta allo scalino che diventa 50 unità di tempo invece di 5.

Nel caso (b) è presente un ulteriore polo in -100. Esso ha modulo superiore di un fattore 100 rispetto alla pulsazione critica $\omega_c = 1$, di conseguenza la risposta allo scalino rimane inalterata.

2.5 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime $y_\infty(t)$ del sistema di controllo progettato al punto 2.2 al segnale di ingresso $y^o(t) = sen(0.01t)$.

$y_\infty(t) \simeq sen(0.01t)$ perchè il segnale è nella banda passante $[0, \omega_c]$ del sistema di controllo progettato.

3. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari con funzione di trasferimento $C(s)$, $R(s)$, e $G(s)$.



3.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $F(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $C(s)$, $R(s)$, e $G(s)$.

$F(s) = (C(s) + R(s))\frac{G(s)}{1+R(s)G(s)}$

3.2 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema con ingresso u ed uscita y è asintoticamente stabile se e solo se i sistemi con funzione di trasferimento $C(s)$, $R(s)$, e $G(s)$ sono tutti asintoticamente stabili.

Falso, perchè i sistemi con funzione di trasferimento $R(s)$ e $G(s)$ sono retreoazionati e quindi i loro autovalori non sono in generale autovalori del sistema con ingresso u ed uscita y.

b) se il sistema con funzione di trasferimento $C(s)$ è instabile, allora il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

Vero, perchè il sistema con funzione di trasferimento $C(s)$ non è retreoazionato e quindi i suoi autovalori sono autovalori del sistema con ingresso u ed uscita y.

4. Enunciare con precisione il criterio di Bode.

Si veda il testo di riferimento.