Fondamenti di segnali e trasmissione

Anno accademico 2004/2005

Esercizi - parte 2 : Trasmissione

Indice

1. Trasmissione digitale in banda base

Esercizio 1.1

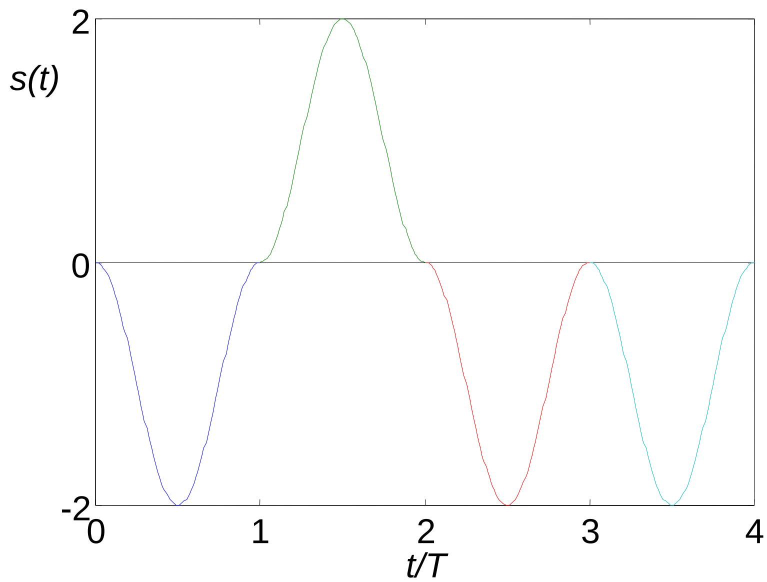
Si vuole trasmettere la sequenza binaria [0,1,0,0] con ritmo di trasmissione Rb=1 kbit/s e tramite un sistema binario PAM antipodale, utilizzando un filtro di trasmissione con risposta all'impulso $g(t)=(1-\cos 2\pi t/T)\mathrm{rect}((t-T/2)/T)$ e T=1ms.

Rappresentare graficamente l'impulso g(t).

Rappresentare il segnale s(t) che viene trasmesso sul canale.

Soluzione

Il segnale si estendera' da 0 a 4ms e ha la forma illustrata in figura:



Esercizio 1.2

Con riferimento all'esercizio precedente, se il canale di propagazione introducesse un ritardo t=T/4, determinare gli istanti ottimi di sincronizzazione all'uscita del filtro di ricezione (che ipotizziamo non modifichi la forma degli impulsi – non e' il filtro adattato), ed il valore dei campioni corrispondenti.

Se il canale introducesse anche un'attenuazione costante γ=3dB, ricalcolare il valore dei campioni a valle del campionatore.

Soluzione

Se il ritardo fosse nullo gli istanti di campionamento sarebbero centrati in t_k=T/2+kT, cioe' in [0.5, 1.5, 2.5, 3.5] ms, dove il segnale assume i valori massimi..

Poiche' e' stato intodotto il ritardo T/4 , gli istanti di campionamento saranno ritardati della stessa quantita' , cioe' saranno centrati in t_k=3T/4+kT,   [0.75, 1.75, 2.75,3.75] ms. Il valore dei campioni e' [-2,2,-2,-2].

Un'attenuazione in potenza di 3dB corrisponde ad una diminuzione di ampiezza di un fattore uguale alla radice di due.

I valori dei quattro campioni di segnale utile risulteranno [-1.41,1.41,-1.41,-1.41].

Esercizio 1.3

Data la risposta all'impulso g(t)=(1-cos 2πt/T)rect((t-T/2)/T) con T=1ms (come nell'esercizio precedente), determinare la risposta all'impulso del filtro adattato c(t).

Supponendo nota la densita' spettrale di potenza del rumore additivo bianco No/2, determinare il rapporto segnale-rumore all'uscita del filtro adattato nell'istante T.

Soluzione

La risposta all'impulso del filtro adattato vale c(t)=g(-t+T).

Data la forma dell'impulso specificata (con simmetria pari rispetto al punto centrale e durata compresa tra 0 e T), in questo caso le operazioni di ribaltamento e ritardo generano un impulso c(t)=g(t).

Il rapporto segnale rumore all'uscita del filtro adattato nell'istante T e' uguale al rapporto tra l'energia dell'impulso che entra nel filtro adattato e la densita' spettrale del rumore additivo bianco:

$$SNR = \frac{2E_g}{N_0}; \quad E_g = \int |g(t)|^2 dt = \int_0^T \left| 1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right|^2 dt = T + T/2.$$

$$SNR = \frac{3T}{N_0}.$$

Esercizio 1.4

Calcolare la formula per il calcolo del BER nel caso di trasmissione di tipo on-off, in cui al bit 0 si assegna un'ampiezza nulla e al bit 1 un'ampiezza positiva A.

a) Evidenziare la dipendenza dal parametro Eb/No, dove Eb in questo caso viene definito come l'energia media spesa per la trasmissione di un bit.

b) Se un sistema antipodale garantisce una probabilita' di errore media Pb=10^{-8} con un rapporto Eb/No=12 dB, per avere la stessa probabilita' di errore su un sistema on-off quale rapporto Eb/No e' richiesto ?

Soluzione

a) $P_b(on-off) = Q\left(\dfrac{A^2T}{2\cdot\sqrt{A^2TN_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_G}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_b}{N_0}}\right).$

b) Confrontando le formule per il calcolo della probabilita' di errore per i due sistemi antipodale e on-off

$$P_b(antipodale) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right); \quad P_b(on-off) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right),$$

per avere le stesse prestazioni basta uguagliare gli argomenti della funzione Q: si ricava cosi' che il rapporto Eb/No richiesto per la trasmissione on-off risulta quadruplicato rispetto al caso antipodale.

Se nel caso antipodale per avere $P_b=10^{-8}$ e' necessario un rapporto Eb/No=12 dB, nel caso on-off e' richiesto un Eb/No=12+3=15 dB.

Esercizio 1.5 (non facile …)

In un sistema di trasmissione in banda base sono inviati simboli binari $a_k = \pm 1$ ad un rate $R_b = 200\, kbit/s$ su un canale avente risposta in frequenza

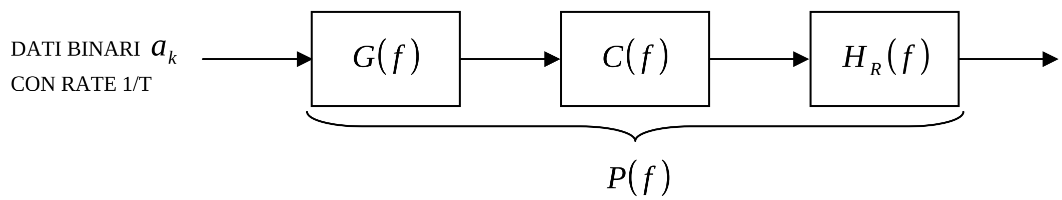
$$C(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_t}},$$

dove $f_t = 100$ kHz rappresenta la frequenza di taglio. Il filtro di ricezione $H_R(f)$ è adattato agli impulsi in uscita dal canale.

Dimensionare il filtro di trasmissione $G(f)$ in modo che la funzione di trasferimento del sistema $P(f)$ (filtro di trasmissione+canale+filtro di ricezione) soddisfi il criterio di Nyquist. La risposta in frequenza $P(f)$ sia del tipo con arrotondamento a coseno rialzato avente rolloff $\alpha = 0.5$. Determinare, inoltre, il valore dell'ampiezza del campione all'uscita del filtro di ricezione nell'istante in cui esso assume il valore massimo.

Soluzione

Lo schema del sistema di trasmissione è rappresentato in figura



La funzione di trasferimento complessiva del sistema è

$P(f) = G(f)C(f)H_R(f)$.

L'espressione analitica di $P(f)$ è la seguente

$$P(f) = \begin{cases} T & |f| \le \dfrac{1}{4T} \\ T\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi fT - \pi}{2\alpha}\right)\right) & \dfrac{1}{4T} \le |f| \le \dfrac{3}{4T} \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

Gli impulsi in uscita dal canale hanno trasformata $G(f)C(f)$. Affinché $H_R(f)$ si adattato agli impulsi in arrivo deve essere $H_R(f) = G^*(f)C^*(f)$.

Sostituendo l'espressione che dà $H_R(f)$ in funzione di $G(f)$ e $C(f)$ si ottiene

$P(f) = |G(f)C(f)|^2$.

Risolvendo rispetto a $G(f)$ si ottiene

$|G(f)| = \sqrt{P(f)} / |C(f)|$.

La caratteristica di fase può essere arbitraria, poiché essa viene poi compensata da quella del filtro adattato. Conoscendo la caratteristica di fase di $C(f)$, scegliamo $G(f) = \sqrt{P(f)} / C(f)$

$G(f) = \sqrt{P(f)}\left(1 + jf/10^5\right)$.

La trasformata di Fourier del segnale all'ingresso del filtro adattato è pari a

$$G(f)C(f) = \frac{\sqrt{P(f)}}{C(f)}C(f) = \sqrt{P(f)}$$

Il valore massimo del segnale all'uscita del filtro adattato si ottiene negli istanti multipli interi di $T = \dfrac{1}{R_b} = 5\,\mu s$. In tali istanti l'ampiezza del segnale coincide con il valore nell'origine dell'autocorrelazione del segnale ricevuto pesata dal valore del simbolo trasmesso in quell'istante, cioè $a_k R(0)$. Si ricorda che per un dato segnale il valore dell'autocorrelazione nell'origine coincide con la sua energia. Poiché la trasformata di Fourier del segnale all'ingresso del filtro adattato è pari a $\sqrt{P(f)}$, per il teorema di Parseval si ha

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)df = 2T\int_{0}^{1/4T} df + T\int_{1/4T}^{3/4T} df - T\int_{1/4T}^{3/4T} sin((2\pi fT-\pi)/(2\alpha))df = 1/2+1/2+0=1.$$

Esercizio 1.6

Si consideri la trasmissione di un solo simbolo a_0 (trasmissione *one shot*) che può assumere i valori +1 o 0 con la stessa probabilità. L'impulso trasmesso è rappresentato in figura 1.

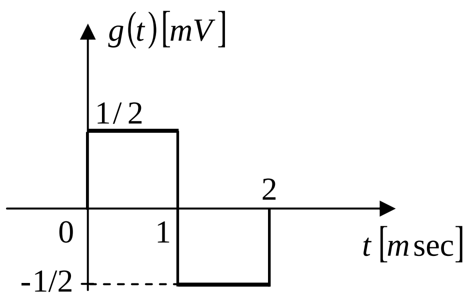


Figura 1

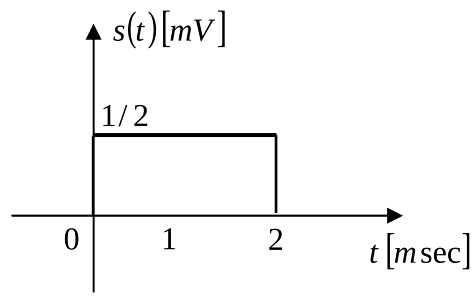


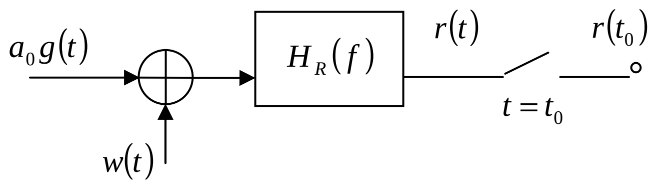
Figura 2

La trasmissione avviene su un canale ideale. Si chiede di determinare:

1. la risposta impulsiva del filtro adattato al segnale trasmesso e di disegnarne il suo andamento;
2. il valore di picco del segnale d'uscita;
3. il rapporto segnale rumore all'uscita del filtro adattato se al suo ingresso è presente un rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2 = 2\cdot 10^{-11}\ [W/Hz]$;
4. la probabilità d'errore $P(E)$;
5. come cambia il rapporto segnale rumore se al posto di usare il segnale rappresentato in figura 1 si usa quello rappresentato in figura 2.

Soluzione

Lo schema del sistema di trasmissione è rappresentato nella figura seguente



1. La risposta impulsiva del filtro adattato si ottiene ribaltando e traslando temporalmente $g(t)$

   $h_R(t) = g(t_0 - t)$.

   Supponendo di richiedere la fisica realizzabilità si pone $t_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ sec. L'espressione del filtro adattato è $h_R(t) = g(2 \cdot 10^{-3} - t)$ e il suo andamento è rappresentato in figura 3

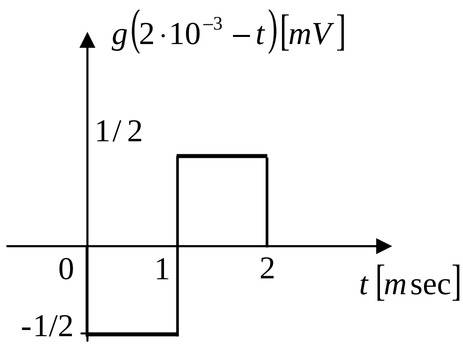


Figura 3

2. Il segnale utile all'uscita è pari a

$$u_s(t) = a_0 g(t) * g(2 \cdot 10^{-3} - t) = a_0 \int_0^{2 \cdot 10^{-3}} g(\tau) g(\tau + 2 \cdot 10^{-3} - t) d\tau .$$

   Il segnale utile nell'istante di campionamento è pari a

$$u_s(t)\big|_{t=2\cdot 10^{-3}} = a_0 \int_0^{2\cdot 10^{-3}} g^2(\tau) d\tau = a_0 \int_0^{2\cdot 10^{-3}} \frac{1}{4} 10^{-6} d\tau = a_0 5 \cdot 10^{-10} = a_0 E_g$$

   dove si è indicata con E_g l'energia di $g(t)$.

3. La potenza di rumore all'uscita del filtro adattato è pari a

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_g = 10^{-20} .$$

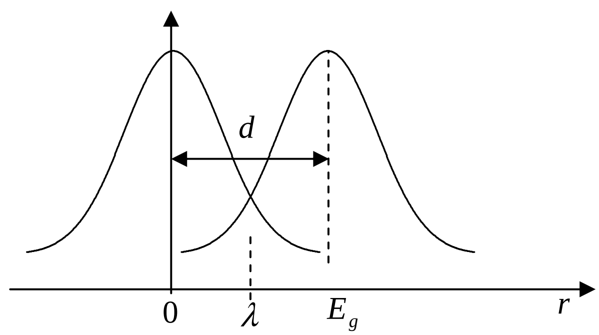
Il rapporto segnale rumore all'uscita del filtro adattato (per $a_0 = 1$) è pari a

$$SNR = \frac{\left|u_s\left(2\cdot 10^{-3}\right)\right|^2}{\sigma_n^2} = \frac{E_g^2}{\frac{N_0}{2}E_g} = 2\frac{E_g}{N_0} = \frac{25\cdot 10^{-20}}{10^{-20}} = 25\,.$$

Espresso in dB si ottiene un SNR pari a

$$SNR\big|_{dB} = 10\log_{10} 25 \approx 14$$

4. Per ottenere la probabilità d'errore si considera la distanza d tra i punti rappresentativi del segnale utile all'uscita del filtro adattato. La probabilità d'errore dipende dalla distanza dalla soglia di decisione λ che nel caso di simboli equiprobabili è il punto medio del segmento che congiunge 0 con E.



La probabilità d'errore nel caso binario è pari a

$$P(E) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{E_g}{2\sqrt{E_g N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{2N_0}}\right)$$

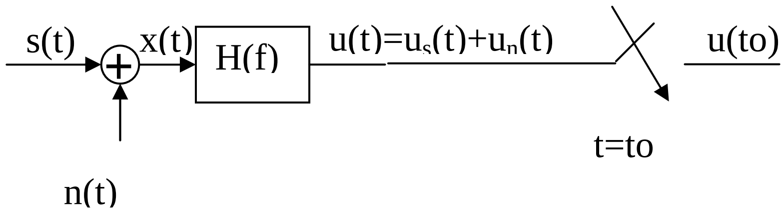
Sostituendo i valori calcolati si ottiene

$$P(E) = Q\left(\sqrt{6.25}\right) \cong 6\cdot 10^{-3}\,.$$

5. Nel caso in cui si usasse la forma d'onda rappresentata in figura 2 il rapporto segnale rumore sarebbe lo stesso poiché l'energia del segnale $s(t)$ è la stessa di quella del segnale $g(t)$. Le prestazioni in termini di probabilità d'errore sono identiche. Quello che cambia sono le caratteristiche spettrali del segnale.

Esercizio 1.7

Dato il sistema in figura,



L'ingresso del filtro e' il segnale x(t)=s(t)+n(t) , dove

- s(t)=cos(2πt) e' un segnale deterministico,
- n(t) e' un rumore casuale bianco, con valor medio nullo e densita' spettrale di potenza $S_n(f)$=0.1mW/Hz;
- H(f) e' la risposta in frequenza di un filtro ideale passabasso, con banda B=2Hz, e attenuazione (di potenza) in banda γ = 3dB.

L'uscita del filtro e' il segnale u(t)= $u_s(t)$+ $u_n(t)$, somma di una componente di segnale utile $u_s(t)$ (che corrisponde al filtraggio di s(t)) e di una componente di rumore $u_n(t)$. Si chiede di:

a) rappresentare graficamente il segnale $u_s(t)$. Il segnale s(t) e' stato distorto ?

b) calcolare la potenza di $u_s(t)$;

c) calcolare la potenza di $u_n(t)$.

d) Il segnale u(t) viene campionato nell'istante to=1s; se il processo casuale bianco n(t) e' gaussiano, determinare la densita' di probabilita' del campione u(to), e

e) determinare la probabilita' che u_n(to)>0.

Soluzione

a) $u_s(t)$=H(1) cos(2πt)=sqrt(0.5)cos(2πt);

b) Pot($u_s(t)$)=0.25;

c) Pot($u_n(t)$)=1mW*2=0.2mW;

d) u = u_n(to); f(u)=gaussiana(m=0,σ^2=0.002);

e) Prob(u_n >0)=0.5;

Esercizio 1.8

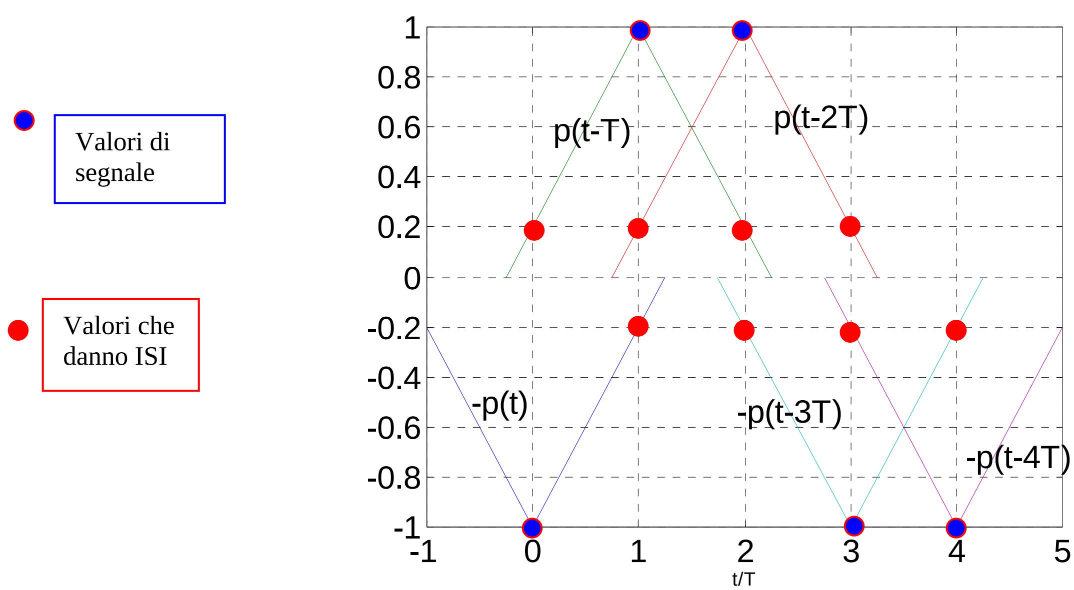
Dato l'impulso p(t) (risposta all'impulso globale di un sistema di trasmissione numerica) $p(t)=(1-|t|/\tau)\text{rect}(t/(2\tau))$ con $\tau=0.125$ s, si trasmette in formato antipodale la sequenza dei bit [0,1,1,0,0] con ritmo di trasmissione R=10 bit/s.

Determinare il contributo di interferenza intersimbolica negli istanti di campionamento.

Soluzione

Chiamiamo T=0.1s il tempo di trasmissione tra 2 simboli successivi (T=1/R).

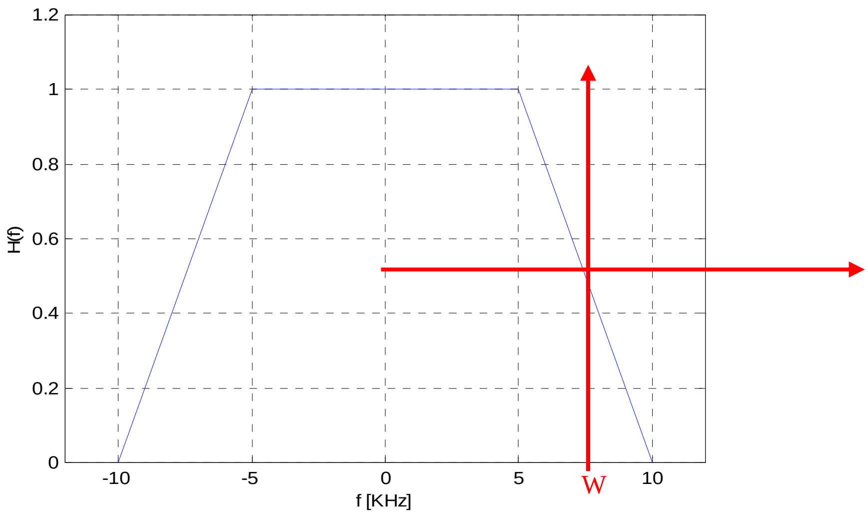
Rappresentiamo i 5 impulsi modulati in ampiezza dalla sequenza [0,1,1,0,0,0]



Dalla figura risulta che negli istanti di campionamento [0,T,2T,3T,4T] il contributo di interferenza intersimbolica vale [0.2, 0, 0, 0, -0.2].

Esercizio 1.9

La funzione H(f), riportata in figura, rappresenta la risposta in frequenza globale di un sistema di trasmissione digitale.



La trasmissione puo' avvenire con interferenza intersimbolica nulla ? Perche' ?

Se la risposta e' si', con quale velocita' di trasmissione dei simboli.

Determinare la banda in eccesso rispetto ad un canale ideale di Nyquist.

Soluzione

La risposta in frequenza globale ha simmetria dispari rispetto agli assi x e y illustrati, quindi la risposta in frequenza soddisfa il criterio di Nyquist per avere ISI nulla e il ritmo di trasmissione risulta Rs=2W=15000 baud (impulsi/s). Rispetto ad un canale di Nyquist, che richiederebbe una occupazione di banda W=Rs/2=7.5 kHz, la banda occupata sul canale (Bt=10 kHz) risulta aumentata del 33%.

Esercizio 1.10

La forma d'onda dell'impulso p(t) all'uscita di un filtro adattato ha trasformata di Fourier P(f) con forma triangolare tra le frequenze –B e B , con B=50Hz.

Determinare il ritmo di trasmissione dei dati per avere ISI nulla.

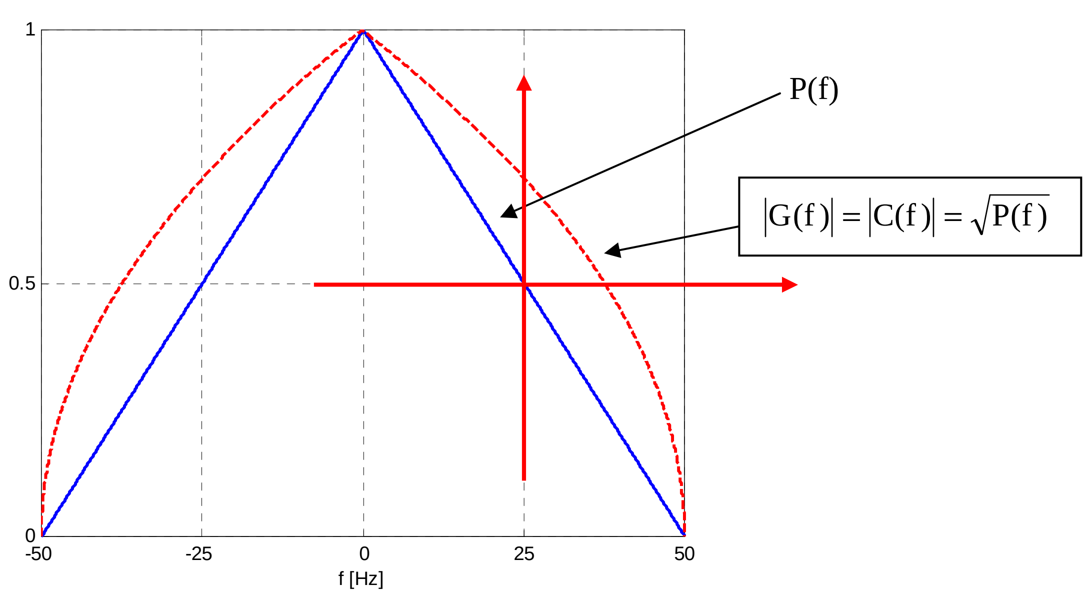
Nota la densita' spettrale di potenza del rumore additivo bianco, No/2, determinare il massimo rapporto segnale rumore all'uscita del campionatore, e specificare come deve essere suddiviso il filtraggio tra trasmissione e ricezione, per ottenere tale massimo valore di rapporto segnale-rumore.

Soluzione

La risposta in frequenza P(f) soddisfa il criterio di Nyquist, cioe'simmetria dispari rispetto all'asse verticale f=25Hz (e quello orizzontale x=P(0)/2), dunque e' possibile trasmettere un flusso di dati con ritmo di trasmissione Rs=50 baud, occupando il doppio della banda minima di Nyquist.

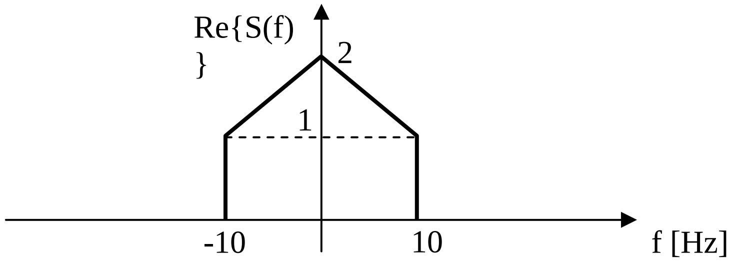
Se le risposte in frequenza del filtro di trasmissione G(f) e del filtro di ricezione C(f) sono tali che le loro risposte in ampiezza uguagliano la radice quadrata di P(f) (e le fasi si compensano tra loro), allora e' garantito anche l'adattamento del filtro di ricezione all'impulso ricevuto e il rapporto segnale rumore varra'

$$SNR = \frac{2E_g}{N_0}; \quad E_g = \int |g(t)|^2 dt = \int |G(f)|^2 df = \int P(f) df = 50; \quad SNR = \frac{100}{N_0}.$$



Esercizio 1.11 (senza soluzione)

La trasformata di Fourier del segnale *s(t)* ha solo parte reale con il seguente andamento:



a) Rappresentare graficamente lo spettro dei seguenti segnali:
   1) $s_1(t)$ ottenuto campionando *s(t)* alla frequenza di campionamento $f_c=20Hz$
   2) $s_2(t)$ ottenuto campionando *s(t)* alla frequenza di campionamento $f_c=10Hz$

b) Qualora *S(f)* rappresentasse la funzione di trasferimento di un canale di trasmissione, qual è il ritmo di trasmissione con cui si potrebbero trasmettere degli impulsi ideali su tale canale senza che in ricezione si generi interferenza intersimbolica? Giustificare la risposta.

2. Trasmissione digitale di segnali analogici (PCM)

Esercizio 2.1

Si vuole trasmettere in formato binario una sequenza di immagini in bianco e nero al ritmo di 20 immagini al secondo.

Se la dimensione di ogni immagini e' 720 x 576 pixel, e ogni pixel e' rappresentato con 256 livelli di grigio, determinare il ritmo di trasmissione del flusso binario Rb.

Soluzione

I 256 livelli di grigio per pixel vengono codificati con $\log_2 256=8$ [bit/pixel].

Rb=720 x576 [pixel/immagine] x 8[bit/pixel] x 20 [immagini/s]= 66355200 [bit/s].

Esercizio 2.2

Rappresentare con codifica binaria naturale, complemento a due, e di Gray, i quattro livelli equidistanti [-3,-1,+1,+3].

Soluzione

Gli M=4 livelli vengono codificati con $N=\log_2 4=2$ [bit/livello].

Codifica naturale: [00, 01, 10, 11].

Codifica di Gray: [00, 01, 11, 10].

Esercizio 2.3

Dato un segnale campionato v(nT) con distribuzione della ampiezze costante nell'intervallo [0,1], il segnale viene quantizzato (in maniera uniforme) e codificato in binario.

Determinare il numero minimo di bit necessari per rappresentare ogni livello affinche' il rapporto tra la potenza del segnale e la potenza del rumore di quantizzazione sia maggiore di 100dB.

Soluzione

Il numero di livelli di quantizzazione $M=2^N$.

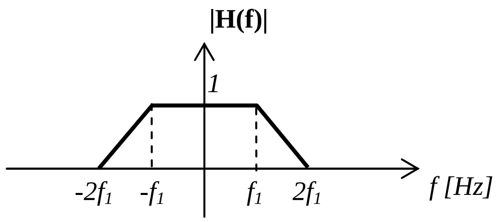
La potenza di segnale Ps vale Ps=1/3 (vedi calcolo del valore quadratico medio di una variabile distribuita uniformemente in un certo intervallo).

La potenza di rumore $P_Q=\Delta^2/12$, con $\Delta=1/M$ ➔ $P_Q=1/12M^2$.

Il rapporto segnale rumore $SNR=Ps/P_Q=4M^2$ ➔ $SNR(dB)=10\log(2^{2N+2})>100$ ➔ $20\log(2)+10N\log(4)>100$ ➔ N=16.

Esercizio 2.4 (senza soluzione)

Un sistema PCM utilizza un canale di trasmissione con caratteristica passa-basso ideale e un filtro di ricostruzione con risposta in frequenza avente il seguente andamento (la fase varia in modo lineare):



a) Se il segnale $x(t)$ da trasmettere ha banda pari a f_1 determinare la minima frequenza di campionamento per la quale è ancora possibile ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni utilizzando $H(f)$ come filtro di ricostruzione.

b) Se i campioni di $x(t)$ vengono quantizzati mediante un quantizzatore con $L=2^M$ livelli e poi trasmessi in formato binario, quale deve essere la banda minima del canale ideale affinché in ricezione non si abbia interferenza intersimbolica?

3. Trasmissione digitale in banda passante

Esercizio 3.1

Si vuole trasmettere con una costellazione tipo M-QAM un segnale numerico con bit-rate Rb=100Mbit/s su un canale con banda passante B=25MHz.

Quanti livelli M deve avere la costellazione ?

Una modulazione M-ASK richiederebbe la stessa banda e/o la stessa potenza di trasmissione, a parita' di probabilita' di errore ?

Soluzione

La tecnica di modulazione M-QAM richiede una banda di trasmissione minima

$$B = \frac{R_b}{\log_2 M}$$

e pertanto si ottiene $M = 2^{\frac{R_b}{B}} = 2^4 = 16$.

La modulazione M-ASK richiede la stessa banda della modulazione M-QAM; d'altronde, a parita' di prestazioni ed osservando lo spazio dei segnali, si nota che la modulazione M-ASK richiede piu potenza media della M-QAM.

Esercizio 3.2

Dato un flusso di dati binari con bit rate R_b=20kbit/s, calcolare la probabilita' di errore $P_b(E)$ nel caso di modulazione BPSK, nell'ipotesi di attenuazione di canale γ=16 dB, potenza in trasmissione P_{tx}=2.4W, e densita' spettrale di potenza del rumore additivo $N_0/2=2.5\ 10^{-7}$ W/Hz.

Soluzione

$$\gamma_{lin} = 10^{1.6} = 40; \quad E_b = \frac{P_{tx}}{\gamma_{lin} \cdot R_b} = \frac{2.4}{40 \cdot 2 \cdot 10^4} = 3\mu J.$$

$$BPSK : P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \Rightarrow \quad P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2.4}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^5}}\right) \cong Q(3.5) = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Esercizio 3.3

Un segnale *s(t)* con banda *B=4kHz* viene campionato con frequenza di campionamento f_c*=10kHz* e quantizzato a 256 livelli. I campioni quantizzati vengono convertiti in formato binario e trasmessi con modulazione 4QAM su un canale in banda passante con banda *W=80kHz*.

a) Tracciare lo schema del modulatore/demodulatore 4QAM.

b) Verificare se risulta possibile trasmettere impulsi con spettro a coseno rialzato e roll-off α=0.5.

Soluzione

a) vedi gli appunti delle lezioni;

b) Il ritmo di trasmissione dei bit del flusso binario PCM sara' $R_b=f_c\log_2 256=80$kbit/s; la banda richiesta per la trasmissione 4QAM, fissato il fattore di roll-off $\alpha=0.5$, e' $B=(R_b/2)(1+\alpha)=60$kHz, minore della larghezza di banda disponibile.

Esercizio 3.4

Un segnale analogico *s(t)* con banda B_s=4kHz viene campionato alla frequenza di campionamento f_c=10kHz e quantizzato con un quantizzatore a 256 livelli (8 bit). I campioni vengono quindi convertiti in formato binario e trasmessi su un canale in banda passante con banda B_c=30kHz con modulazione 16-QAM.

a) Tracciare lo schema del modulatore/demodulatore 16-QAM.

b) Calcolare il ritmo di trasmissione su ciascuna delle due portanti del sistema di modulazione.

c) Nell'ipotesi che gli impulsi trasmessi abbiano spettro a coseno rialzato calcolare il valore massimo del fattore di roll-off α consentito dalla banda del canale di trasmissione.

d) Calcolare il rapporto $E_S/(N_0/2)$ (E_S = energia media degli impulsi della costellazione, $N_0/2$ = densita' spettrale di potenza del rumore termico) tale da garantire in ricezione una probabilita' d'errore $P_e=10^{-9}$.

Soluzione

a) vedi appunti delle lezioni;

b) Il ritmo di trasmissione all'uscita del convertitore analogico digitale sara' Rb=80000bit/s; il flusso binario viene suddiviso sulle due portanti (in fase e in quadratura) e su ogni ramo i bit vengono raggruppati a due a due: su ogni ramo il ritmo di trasmissione dei simboli sara' $R=R_I=R_Q=20000$ simboli/s;

c) La banda di canale $B_c=R(1+\alpha)$, da cui $\alpha=(B_c-R)/R=0.5$.

d) Dal grafico della funzione Q(.), $Q(6)=10^{-9}$. La probabilita' di errore del 16-QAM e' $P(e)\cong Q\left(\sqrt{\frac{2E_G}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{10N_0}}\right)$; $\frac{E_S}{N_0}=180$.

Esercizio 3.5

È dato un segnale *x(t)* che ha ampiezza distribuita uniformemente tra –V e +V e trasformata di Fourier triangolare nell'intervallo (-100 Hz, +100 Hz). Il segnale viene campionato con frequenza fc=250 campioni/s e poi convertito in formato binario utilizzando N=8 bit per campione.

a) determinare il rapporto tra la potenza del segnale e la potenza del rumore di quantizzazione.

Il segnale convertito in binario viene trasmesso in banda base. Determinare la banda minima di canale nei due casi di

b) trasmissione binaria;

c) trasmissione a 8 livelli.

In ricezione il segnale viene riconvertito in analogico.

d) disegnare la trasformata di Fourier del segnale campionato ;

e) rappresentare il filtro interpolatore che permette di ricostruire il segnale dati i suoi campioni .

Soluzione

a) Il rapporto segnale rumore di quantizzazione vale SNR=48 dB.

Il ritmo di trasmissione del flusso binario da trasmettere vale $R_b = f_c \cdot N = 2000$ bit/s.

b) Nel caso di trasmissione binaria, la banda minima di canale vale $B = \frac{R_b}{2} = 1kHz$;

c) nel caso di trasmissione a 8 livelli, la banda si riduce di tre volte, cioe' $B = \frac{R_b}{2 \cdot \log_2 8} = 333Hz$.

d) La trasformata di Fourier del segnale campionato si ottiene replicando con passo 250Hz in frequenza i triangoli con base 200Hz, dunque il campionamento non genera aliasing.

e) Il filtro di ricostruzione e' un filtro passabasso con frequenza di taglio compresa tra 100Hz e 150Hz.

Esercizio 3.6

Si vuole trasmettere una sequenza binaria con ritmo di trasmissione R=10 Mbit/s. Si utilizzano degli impulsi antipodali che valgono +/-Ag(t), dove g(t) e' un rettangolo, con ampiezza unitaria, che si estende da t=0 a t=T/2 secondi (il tempo T[s] e' l'inverso di R, cioe' T=1/R).

a) Rappresentare il segnale che viene trasmesso sul canale, se la sequenza binaria vale [0 1 0 0] ;

b) ipotizzando un filtro adattato in ricezione, determinare il valore di Eb/No che garantisce una probabilita' di errore sul bit P(e)=10^{-9} .

c) Data la probabilita' di errore P(e)=10^{-9}, quanti bit saranno sbagliati in media in un'ora .

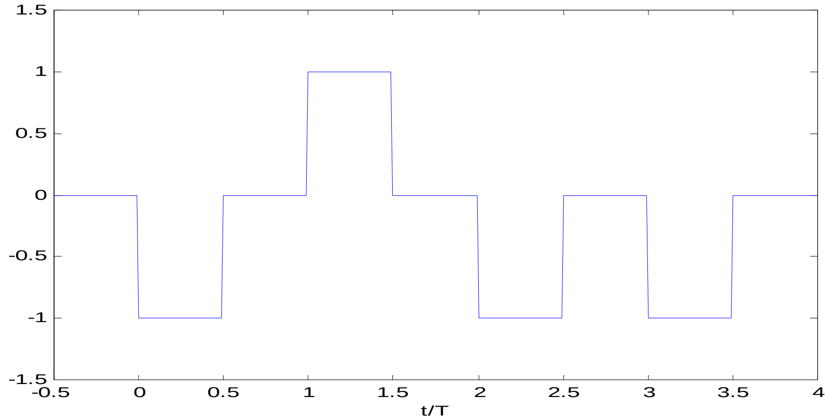
d) Se il canale introduce un'attenuazione di 20 dB, e l'ampiezza A vale A = 0.2, calcolare l'energia Eb, all'ingresso del ricevitore, e la potenza di trasmissione*;*

e) disegnare la risposta all'impulso c(t) del filtro adattato (deve risultare nulla per t<0) ;

f) disegnare l'impulso p(t) all'uscita del filtro adattato: il sistema introduce interferenza intersimbolica ?

Soluzione

a) Il segnale e' costituito da quattro rettangoli, con base T/2, altezza -1,+1,-1, -1, che partono dagli istanti 0,T,2T,3T.



b) La probabilita' di errore del sistema di trasmissione binario antipodale vale $P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$. Verificando che $Q(6) = 10^{-9}$, si ricava che deve essere $\frac{E_b}{N_0} = 18$.

c) Il numero di bit sbagliati in un'ora sara' $10M\frac{bit}{s} \cdot 3600\frac{s}{ora} \cdot 10^{-9} = 36$.

d) L'energia trasmessa per bit vale $E_{b,tx} = A^2\frac{T}{2} = 2 \cdot 10^{-9}$. L'energia ricevuta sara' $E_b = \frac{E_{b,tx}}{\gamma_{lin}} = 2 \cdot 10^{-11}$ e la potenza trasmessa sara' $P_{tx} = E_{b,tx} \cdot R = 20mW \quad (13dBm)$.

e) La risposta all'impulso del filtro adattato si ottine $c(t) = g(t - t_0)$, cioe' ribaltando rispetto all'asse delle ordinate e poi traslando a destra l'impulso originario; la traslazione e' tale che *c(t)* sia nullo per t<0. La risposta all'impulso del filtro adattato in questo caso e' uguale alla forma dell'impulso trasmesso.

f)L'impulso all'uscita del filtro adattato e' la convoluzione dell'impulso g(t) con se' stesso, quindi e' un triangolo la cui base si estende da 0 a T. Il sistema non introduce interferenza intersimbolica perche' l'impulso all'uscita del filtro di ricezione e' limitato nel tempo ad un intervallo di simbolo.

4. Esercizi non svolti

Esercizio 4.1

È dato un segnale *x(t)* che ha ampiezza distribuita uniformemente tra –V e +V e trasformata di Fourier triangolare tra –100 Hz e +100 Hz.

Il segnale viene campionato con frequenza fc=250 campioni al secondo e poi convertito in formato binario utilizzando N=8 bit per campione.

f) determinare il rapporto tra la potenza del segnale e la potenza del rumore di quantizzazione.

Il segnale convertito in binario viene trasmesso in banda base. Determinare la banda minima di canale nei due casi di

g) trasmissione binaria;

h) trasmissione a 8 livelli.

In ricezione il segnale viene riconvertito in analogico.

i) disegnare la trasformata di Fourier del segnale campionato;

j) rappresentare il filtro interpolatore che permette di ricostruire il segnale dati i suoi campioni .

Esercizio 4.2

Si vuole trasmettere una sequenza binaria con ritmo di trasmissione R=10 Mbit/s. Si utilizzano degli impulsi antipodali che valgono +/-Ag(t), dove g(t) e' un rettangolo, con ampiezza unitaria, che si estende da t=0 a t=T/2 secondi (il tempo T[s] e' l'inverso di R, cioe' T=1/R).

g) Rappresentare il segnale che viene trasmesso sul canale, se la sequenza binaria vale [0 1 0 0]*;*

h) ipotizzando un filtro adattato in ricezione, determinare il valore di Eb/No che garantisce una probabilita' di errore sul bit $P(e)=10^{-9}$.

i) Data la probabilita' di errore $P(e)=10^{-9}$, quanti bit saranno sbagliati in media in un'ora.

j) Se il canale introduce un'attenuazione di 20 dB, e l'ampiezza A vale A=0.2 Volt, calcolare l'energia Eb, all'ingresso del ricevitore, e la potenza di trasmissione*;*

k) disegnare la risposta all'impulso c(t) del filtro adattato (deve risultare nulla per t<0);

l) disegnare l'impulso p(t) all'uscita del filtro adattato: il sistema introduce interferenza intersimbolica ?

Esercizio 4.3

Un segnale analogico (in banda base) con banda Ba=25kHz, e distribuzione dell'ampiezza uniformemente distribuita tra –2V e +2V, viene convertito in formato binario utilizzando N=16 bit per campione.

k) Verificare se la frequenza di campionamento fc=45kHz permette di ricostruire il segnale analogico dai suoi campioni, e in caso contrario scegliere opportunamente fc;

l) determinare il bit rate Rb della sequenza binaria;

m) determinare la potenza del rumore di quantizzazione.

La sequenza binaria viene trasmessa in banda base. Determinare il numero di livelli da usare in trasmissione se la banda del canale vale Bc=250kHz.

Esercizio 4.4

Una sorgente numerica emette un flusso binario con bit rate Rb=20 Mbit/s. La sequenza viene trasmessa con un sistema in banda base che utilizza M=4 livelli antipodali (+/-A,+/-3A), e un filtro di trasmissione con risposta all'impulso g(t) rettangolare, con ampiezza unitaria e base uguale al tempo di simbolo.

m) Rappresentare lo schema a blocchi del sistema di trasmissione;
n) rappresentare il segnale che viene trasmesso sul canale, se la sequenza binaria vale [01001011] e la codifica adottata e'quella naturale;
o) disegnare la risposta all'impulso c(t) del filtro adattato;
p) disegnare la forma dell'impulso in uscita al ricevitore nel caso in cui venga trasmesso l'impulso -Ag(t), e indicare l'istante di campionamento;
q) noti il valore Eb (energia media per bit all'ingresso del ricevitore) e l'attenuazione del canale γ=23 dB, calcolare la potenza trasmessa;
r) fissato il valore Eb, tale da garantire una probabilita' di errore sul bit P(e)=10^{-9}, quanto vale la probabilita' di errore se Eb diminuisce di 4 volte;
s) variando il numero di livelli di trasmissione, cioe' passando da M=4 a M=8 livelli, varia il numero di bit che arrivano al destinatario in un'ora di trasmissione ?

Esercizio 4.5

Dato un flusso di Rb [bit/s] da trasmettere, confrontare, a parita' di potenza trasmessa, l'occupazione della banda e la probabilita' di errore dei due sistemi di trasmissione in banda passante BPSK e 4-QAM.