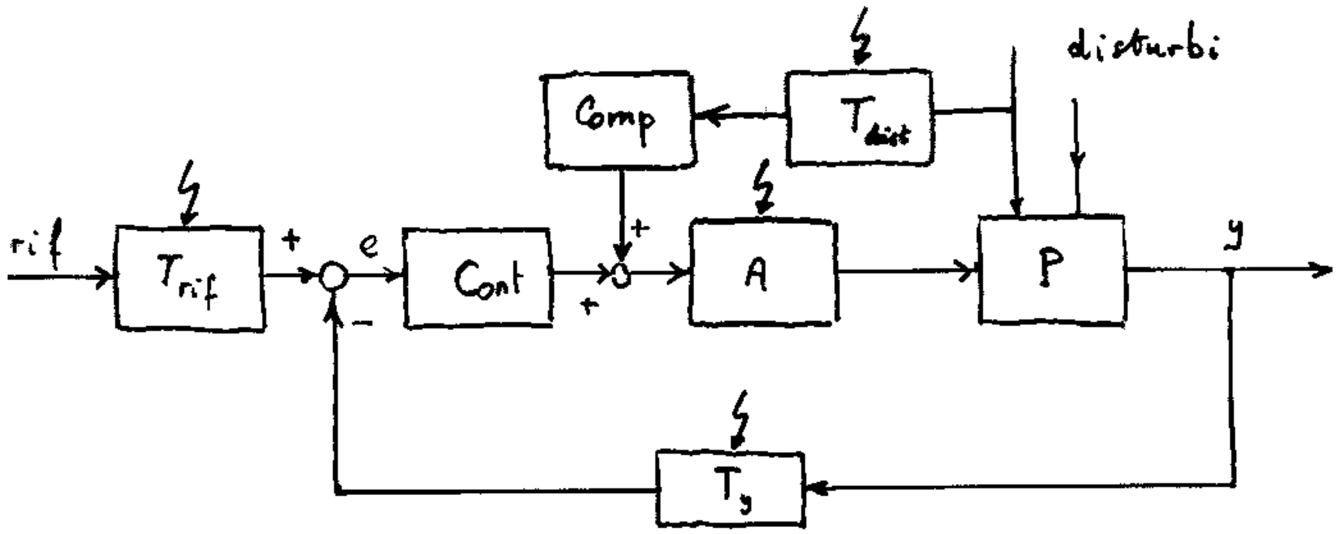


T = trasduttore P = processo (impianto, sistema da controllare)

A = attuatore Comp = compensatore Cont = controllore (regolatore)

rif = segnale di riferimento
e = segnale errore
y = variabile controllata

↯ altri disturbi

Il controllore è in un anello (loop, feedback, retroazione), mentre il compensatore no.

<u>Esempi</u>

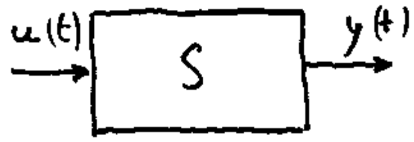
$\begin{cases} P = \text{studenti in aula} \\ y = \text{attenzione studenti} \end{cases}$ $\begin{cases} P = \text{lago} \\ y = \text{livello} \end{cases}$

$\begin{cases} P = \text{corpo umano} \\ y = \text{posizione} \end{cases}$ $\begin{cases} P = \text{sala cinematografica} \\ y = \text{temperatura} \end{cases}$

$\begin{cases} P = \text{laminatoio} \\ y = \text{spessore del laminato} \end{cases}$ $\begin{cases} P = \text{altoparlante} \\ y = \text{segnale acustico} \end{cases}$

<u>Problema</u> : inventare altri quattro esempi

SISTEMI LINEARI : EQUAZIONI DI STATO



$u(t)$ = ingresso all'istante t

$y(t)$ = uscita all'istante t

$t = \begin{cases} \text{intero } 0, 1, 2, \dots & \text{tempo discreto} \\ \text{reale} & \text{tempo continuo} \end{cases}$

u e y si chiamano variabili <u>esterne</u>

variabili interne $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$

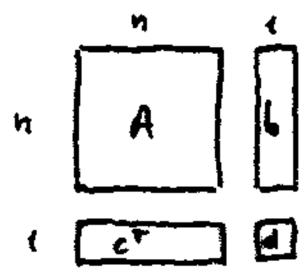
n = ordine del sistema

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{vmatrix} \qquad \text{vettore di stato} \qquad x \in R^n$$

Equazioni di stato

$$x(t+1) = A\,x(t) + b\,u(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$$
$$\left(\dot{x}(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \right)$$



Esempio : i conigli di Fibonacci (XIII secolo)

$t = 0, 1, 2, \dots$ = generazione

x_1 = # coppie conigli giovani (non fertili)

x_2 = # coppie conigli adulti (fertili)

u = # coppie conigli adulti prelevati

y = # coppie conigli

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) - u(t) \end{cases}$$

equazioni corrispondenti al caso "estremo" di conigli immortali

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{vmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$$A = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}} \quad d = \boxed{0}$$

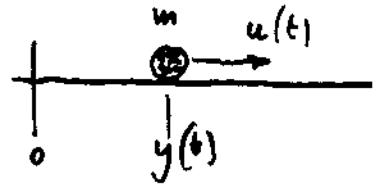
il sistema si dice "proprio" quando $d = 0$

Caso con $u(t) \equiv 0$

$$x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad x(1) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad x(2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad x(3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad x(4) = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$y(0) = 1 \quad y(1) = 1 \quad y(2) = 2 \quad y(3) = 3 \quad y(4) = 5 \quad \dots$$

Esempio : la legge di Newton (XVII secolo)



$x_1(t) = y(t) =$ posizione
$x_2(t) =$ velocità
$u(t) =$ forza

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}\, u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

caso "estremo" di assenza di attrito

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

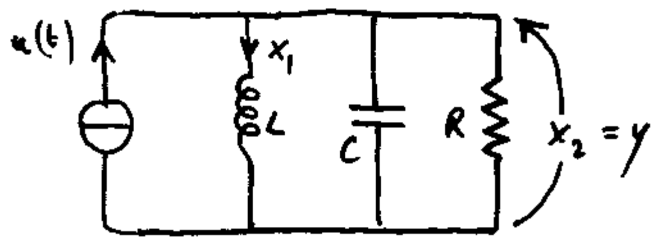
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1/m \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}} \quad d = \boxed{0}$$

sistema proprio

Esempio : circuito elettrico



le variabili di stato sono:
tensioni sui condensatori
correnti negli induttori

$$L\dot{x}_1 = x_2$$

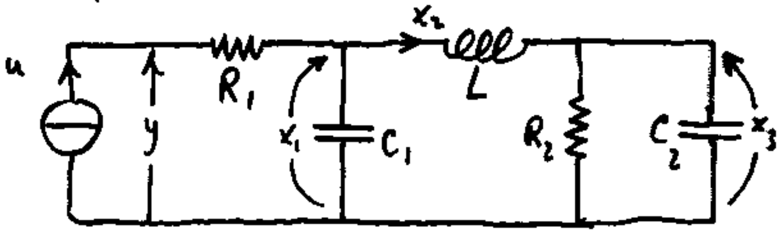
$$C\dot{x}_2 = u - x_1 - \frac{x_2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$y = x_2$$

$$A = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1/L \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1/C \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}} \quad d = \boxed{0}$$

Esempio : un altro circuito elettrico

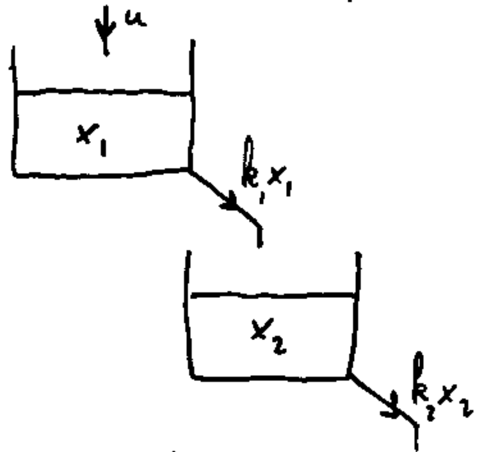


$$A = \boxed{\begin{matrix} 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 1/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}} \quad d = \boxed{R_1}$$

sistema improprio

Esempio : due laghi in cascata



u = portata volumetrica di alimentazione

$y = k x_2$ = portata dell'emissario

$\dot{x}_i$ = portata di ingresso − portata di uscita i-esimo lago

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$

$$A = \boxed{\begin{matrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 0 & k_2 \end{matrix}} \quad d = \boxed{0}$$

Esempio : corsa agli armamenti

$x_i(t)$ = potenziale bellico gruppo $\underline{i}$

$y = x_1 + x_2$ = potenziale bellico totale

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1$$

deperimento   diffidentismo

$$A = \boxed{\begin{matrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{matrix}} \quad b = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}$$

$$c^T = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}} \quad d = \boxed{0}$$

Esempio: modello demografico di Leslie

s_i = sopravvivenza classe di età i

f_i = fertilità " " " "

n classi di età

$$x_1(t+1) = s_0 f_1 x_1(t) + s_0 f_2 x_2(t) + \dots + s_0 f_n x_n(t)$$

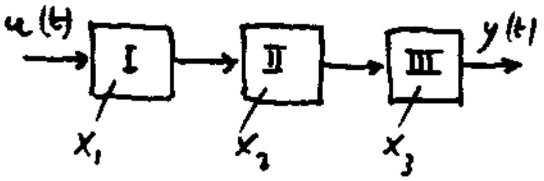
$$x_2(t+1) = s_1 x_1(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t+1) = s_{n-1} x_{n-1}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & \dots & s_0 f_{n-1} & s_0 f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: la scuola media



$$x_1(t+1) = u(t) + \beta_1 x_1(t)$$

$$x_2(t+1) = (1-\beta_1) x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = (1-\beta_2) x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$y(t) = (1-\beta_3) x_3(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 1-\beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 1-\beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\beta_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: amore di coppia

$x_1(t)$ = amore di lei per lui all'inizio del giorno t — $u_1(t)$ fascino di lei

$x_2(t)$ = amore di lui per lei all'inizio del giorno t — $u_2(t)$ = fascino di lui

$$x_1(t+1) = x_1(t) - f_1 x_1(t) + r_1 x_2(t) + \rho_1 u_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) - f_2 x_2(t) + r_2 x_1(t) + \rho_2 u_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = \text{amore di coppia}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-f_1 & r_1 \\ r_2 & 1-f_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_2 & 0 \end{bmatrix}$$

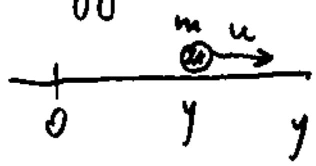
$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

SISTEMI LINEARI : MODELLO ARMA (1)

Si tratta di un modo alternativo di descrivere i sistemi lineari.

Si chiama <u>approccio esterno</u> perché vengono coinvolte sole le variabili esterne (ingresso e uscita).

<u>Esempio</u> : legge di Newton



$$\ddot{y} = \frac{1}{m} u$$

<u>Esempio</u> : i conigli di Fibonacci

$$y(t+2) - y(t+1) - y(t) = -u(t+1) - u(t)$$

In generale,

$$y(t+n) + \alpha_1 y(t+n-1) + \cdots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u(t+n) + \beta_1 u(t+n-1) + \cdots + \beta_n u(t)$$

o, equivalentemente $((t+n) \to t)$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i)\, y(t-i)}_{\text{auto-regressive}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, u(t-i)}_{\text{moving average}}$$

auto-regressive → A R; moving average → M A

e nel caso a tempo continuo

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_n y^{(0)}(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \beta_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + \beta_n u^{(0)}(t)$$

$$\beta_0 \begin{cases} = 0 & \text{sistema proprio} \\ \neq 0 & \text{sistema improprio} \end{cases}$$

Sinteticamente, un modello ARMA è

$$D(p)\,y(t) = N(p)\,u(t)$$

dove $N(\cdot)$ e $D(\cdot)$ sono polinomi in p

p è un "operatore" $\begin{cases} \text{tempo discreto } (z) & \text{anticipo} \\ \quad\text{" continuo } (s) & \text{derivazione} \end{cases}$

__Esempio__ : legge di Newton

$$s^2 y = \frac{1}{m} u \;\Rightarrow\; D = s^2 \quad N = \frac{1}{m}$$

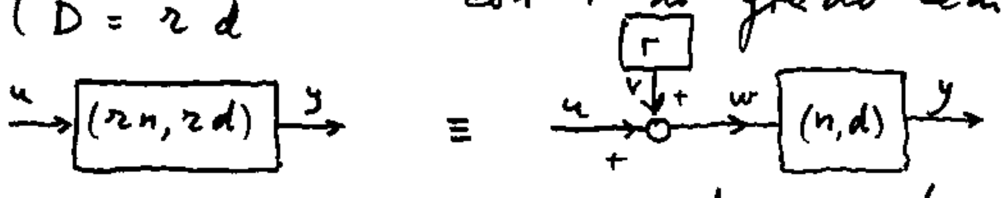
__Esempio__ : i conigli di Fibonacci

$$\underbrace{\left(z^2 - z - 1\right)}_{D(z)} y(t) = \underbrace{(-z-1)}_{N(z)} u(t)$$

Se (N, D) sono polinomi coprimi il modello ARMA è detto di __trasferimento__

Se (N, D) non sono coprimi, allora

$$\begin{cases} N = r\,n \\ D = r\,d \end{cases}$$ con r di grado almeno pari a 1



$$n w = d y \rightarrow r n (u + v) = r d y$$
$$\downarrow$$
$$N u + r n v = D y$$
$$\downarrow$$
$$N u + n r v = D y$$
$$\downarrow$$
$$N u = D y$$

__Vedi Problema 5__

REALIZZAZIONE : $(N, D) \rightarrow (A, b, c^T, d)$

Dato (N, D) esistono infinite realizzazioni (A, b, c^T, d)

La più nota (perché più semplice delle altre) è, forse, la realizzazione in <u>forma canonica di ricostruzione</u> che ha il vantaggio di essere sempre valida

$$\left.\begin{aligned} N &= \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n \\ D &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad b_r = \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d_r = \boxed{\beta_0}$$

dove $\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i$

$(\gamma_i = \beta_i \text{ se } \beta_0 = 0)$

Un'altra realizzazione è quella in <u>forma canonica di controllo</u>, valida però solo per i modelli ARMA di trasferimento (cioè nel caso N e D coprimi)

$$\left.\begin{aligned} N &= \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n \\ D &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_c^T = \begin{bmatrix} \gamma_n & \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix} \quad d_c = \boxed{\beta_0}$$

dove $\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i$

Si noti che $A_c = A_r^T \quad b_c = c_r \quad c_c = b_r \quad d_c = d_r$
(principio di dualità)

<u>Esempio</u> : i conigli di Fibonacci

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \boxed{0}$$

questa è la quaterna (A, b, c^T, d) con cui abbiamo descritto l'allevamento di Fibonacci

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} N &= -z-1 \\ D &= z^2-z-1 \end{aligned}\right\}$$ questo è il modello ARMA dell'allevamento di Fibonacci

Determiniamo la realizzazione in forma canonica di ricostruzione e quella in forma canonica di controllo (cosa possibile perchè N e D sono coprimi) e verifichiamo che tali realizzazioni sono diverse da (A, b, c^T, d).

Forma canonica di ricostruzione

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b_r = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d_r = \boxed{0}$$

Forma canonica di controllo

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_c^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad d_c = \boxed{0}$$

Ovviamente, i tre sistemi hanno lo stesso modello ARMA e, quindi, il loro comportamento ingresso/uscita è lo stesso. Vedremo che sistemi di questo tipo si chiamano equivalenti.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (1

$$D(p)\, y(t) = N(p)\, u(t) \qquad \left(y(t) = \frac{N(p)}{D(p)}\, u(t) \right)$$

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \triangleq \text{funzione di trasferimento}$$

In realtà, $G(p) = \dfrac{n(p)}{d(p)}$.

<u>Esempio</u> : legge di Newton

$$G(s) = \frac{1}{m s^2}$$

<u>Esempio</u> : i conigli di Fibonacci

$$G(z) = -\frac{z+1}{z^2 - z - 1}$$

Gli zeri della f.d.t. sono i valori di p per cui $G = 0$
I poli " " " " " " " " " $G = \infty$

<u>Quindi</u> : gli zeri della f.d.t. sono gli zeri di $n(p)$
i poli " " " " " " $d(p)$

<u>Calcolo di $G(p)$</u>

$$\begin{tikzcd}
 & (A, b, c^T, d) \arrow[dl, "\text{difficile}"'] \arrow[dr, "\text{Souriau}"] & \\
(N, D) \arrow[rr, "\text{banale}\ \left(G = \frac{N}{D} = \frac{n}{d}\right)"'] & & G
\end{tikzcd}$$

$$p\, x(t) = A\, x(t) + b\, u(t)$$
$$(pI - A)\, x(t) = b\, u(t)$$
$$x(t) = (pI - A)^{-1} b\, u(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + d\, u(t) = \underbrace{\left[c^T (pI - A)^{-1} b + d \right]}_{G(p)} u(t)$$

Esistono vari metodi per il calcolo automatico di $G(p)$
Il più noto è il metodo di Souriau (vedi note)

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (2)

La funzione di trasferimento si può assegnare in varie forme

$$G(s) = \begin{cases} \dfrac{\beta_r s^{n-r} + \beta_{r+1} s^{n-r-1} + \cdots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n} \\[2ex] \rho \dfrac{(s-z_1)\cdots(s-z_{n-r})}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \\[2ex] \mu \dfrac{(1+st_1)\cdots(1+st_{n-r})}{s^g(1+sT_1)\cdots(1+sT_{n-g})} \end{cases}$$

r = grado relativo (surplus di poli)

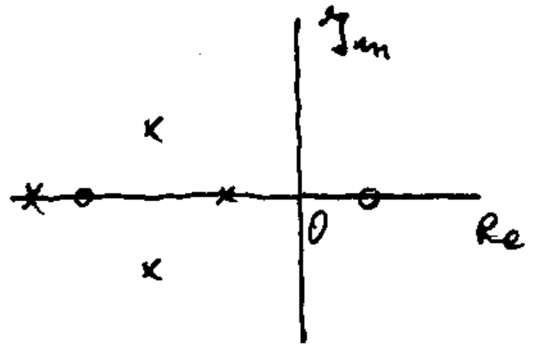
z_i = zero $\quad p_i$ = polo

ρ = costante di trasferimento

g = tipo ($g = 1$ un polo nullo)

μ = guadagno

t_i, T_i = costanti di tempo



x poli

o zeri

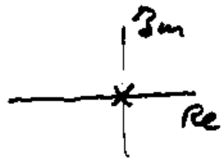
Caso dei poli complessi: $(s-p_1)(s-\bar{p}_1) = (s-(a+ib))(s-(a-ib)) =$

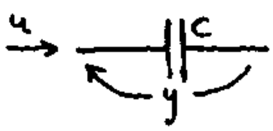
$$= s^2 - 2as + (a^2+b^2)$$

Idem per gli zeri

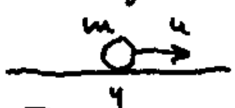
<u>Esempi</u>

integratore $\quad G = \dfrac{1}{s}$

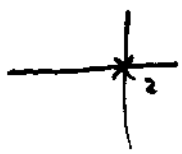


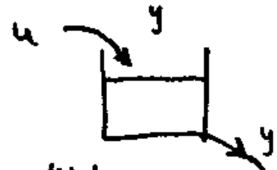


condensatore $\quad G = \dfrac{1}{Cs} \quad$ idem



massa senza attrito $\quad G = \dfrac{1}{ms^2}$



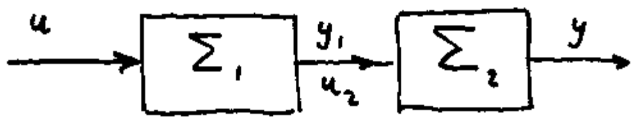


serbatoio $\quad G = \dfrac{1}{1+sT} \quad$ costante di tempo

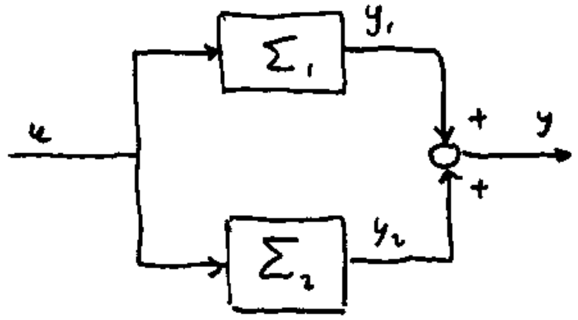
ritardatore puro $\quad G = e^{-\tau s} \quad$??

AGGREGATI DI SOTTOSISTEMI

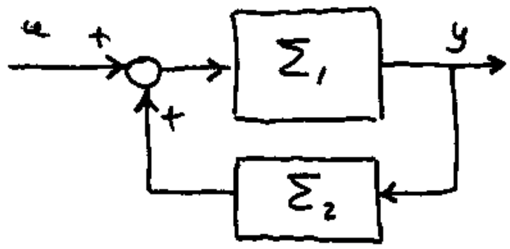
Aggregati elementari



cascata

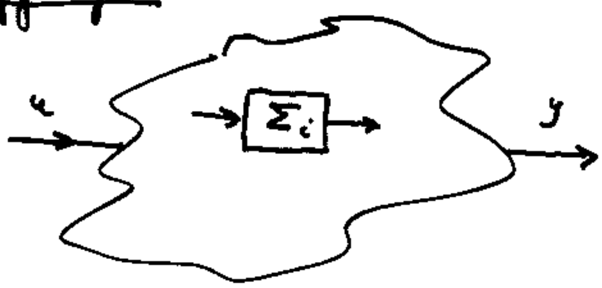


parallelo



retroazione

Aggregati



Problemi

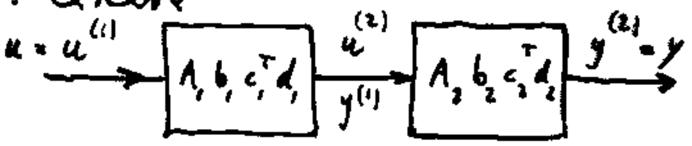
$$(A_i \,,\, b_i \,,\, c_i^T ,\, d_i) \longrightarrow (A \,,\, b ,\, c^T ,\, d)$$

$$(N_i \,,\, D_i) \longrightarrow (N \,,\, D)$$

$$G_i \longrightarrow G$$

$$(A_i\,,\, b_i\,,\, c_i^T\,,\, d_i) \longrightarrow (A\,,\, b\,,\, c^T,\, d)$$

Esempio: cascata



$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= A_1 x^{(1)} + b_1 u^{(1)} \\ y^{(1)} &= c_1^T x^{(1)} + d_1 u^{(1)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}^{(2)} &= A_2 x^{(2)} + b_2 u^{(2)} \\ y^{(2)} &= c_2^T x^{(2)} + d_2 u^{(2)} \end{aligned}$$

$$u^{(1)} = u \qquad u^{(2)} = y^{(1)} \qquad y^{(2)} = y$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= A_1\, x^{(1)} + b_1\, u \\ \dot{x}^{(2)} &= A_2\, x^{(2)} + b_2\, c_1^T\, x^{(1)} + b_2\, d_1\, u \\ y &= c_2^T x^{(2)} + d_2\, c_1^T x^{(1)} + d_2\, d_1\, u \end{aligned}$$

$$x = \begin{vmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{vmatrix} \dot{x}^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} \end{vmatrix} = \overbrace{\boxed{\begin{matrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1^T & A_2 \end{matrix}}}^{A} \begin{vmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{vmatrix} + \overbrace{\boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{matrix}}}^{b} u$$

$$y = \underbrace{\boxed{\begin{matrix} d_2 c_1^T & c_2^T \end{matrix}}}_{c^T} \begin{vmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{vmatrix} + \underbrace{\boxed{d_1 d_2}}_{d} u$$

Si noti che il sistema è improprio solo se entrambi i sottosistemi sono impropri.

Nel caso generale si segue lo stesso procedimento.

$$G_i \longrightarrow G$$

Formule di Mason

$$G = \frac{\sum_k C_k \, \Delta_k}{\Delta}$$

k-esimo cammino diretto

$$C_k = G_2 \, G_7 \, G_{15}$$

Δ = determinante dell'aggregato

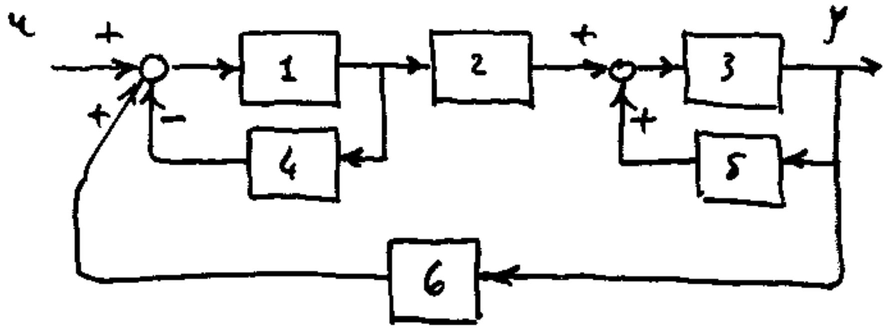
$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_i \sum_j L_i L_j - \sum_i \sum_j \sum_h L_i L_j L_h + \cdots$$

L_i = prodotto delle f. d. t. dell'i-esimo loop (cammino chiuso)

Le sommatorie doppie (triple, ...) vanno estese soltanto ai cammini chiusi che non si toccano a due a due (a tre a tre, ...)

Δ_k = determinante ridotto rispetto al k-esimo cammino diretto = Δ privato di tutti i termini relativi a loop toccati dal k-esimo cammino diretto

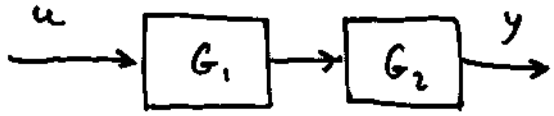
Esempio



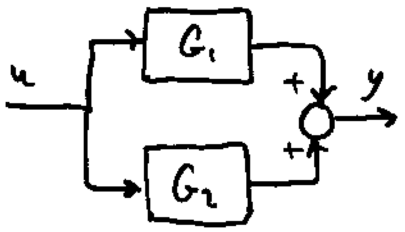
un solo cammino diretto con $\Delta_1 = 1$

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_4 - G_3 G_5 - G_1 G_2 G_3 G_6 - G_1 G_4 G_3 G_5}$$

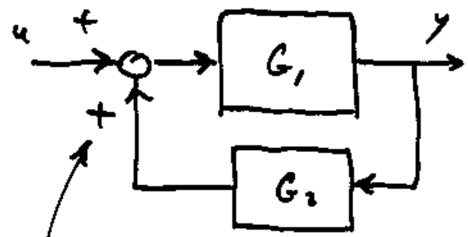
CASCATA, PARALLELO E RETROAZIONE



$$G = G_1 G_2$$

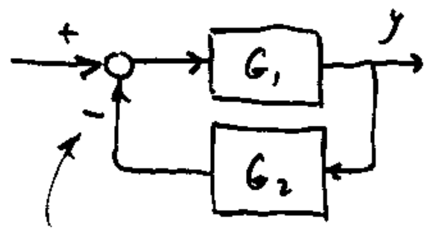


$$G = G_1 + G_2$$



retroazione positiva

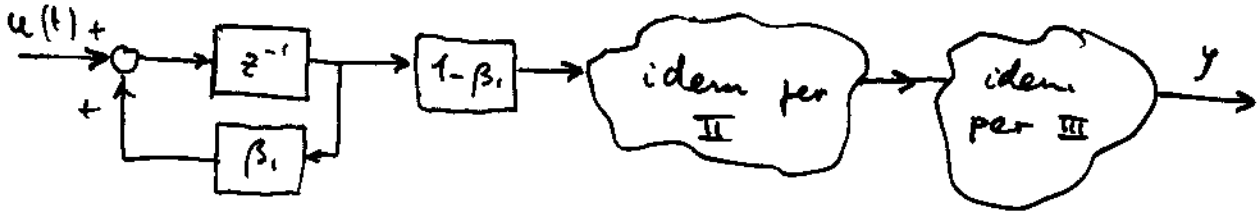
$$G = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2}$$

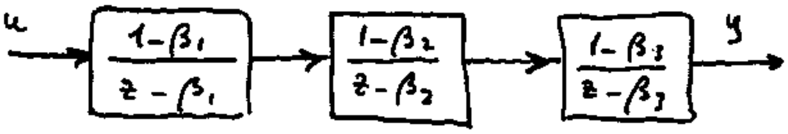


retroazione negativa

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

Esempio : scuola media





$$G(z) = \frac{\prod (1-\beta_i)}{\prod (z-\beta_i)}$$