



Controllo del moto e robotica industriale

Schemi avanzati di controllo per servomeccanismi

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)



Oltre il PID

Anche se il nucleo di un controllore in anello chiuso per il controllo del moto è sempre costituito da un regolatore PID (o P/PI), vi sono altri schemi di controllo che possono completare o sostituire lo schema base. Alcuni di questi schemi trovano corrente applicazione nei CN ed azionamenti commerciali. Nel seguito ci occuperemo dei seguenti schemi:



- **Filtri notch**
- **Osservatore del disturbo di coppia**
- **Controllo nello spazio di stato**
- **Input shaping**



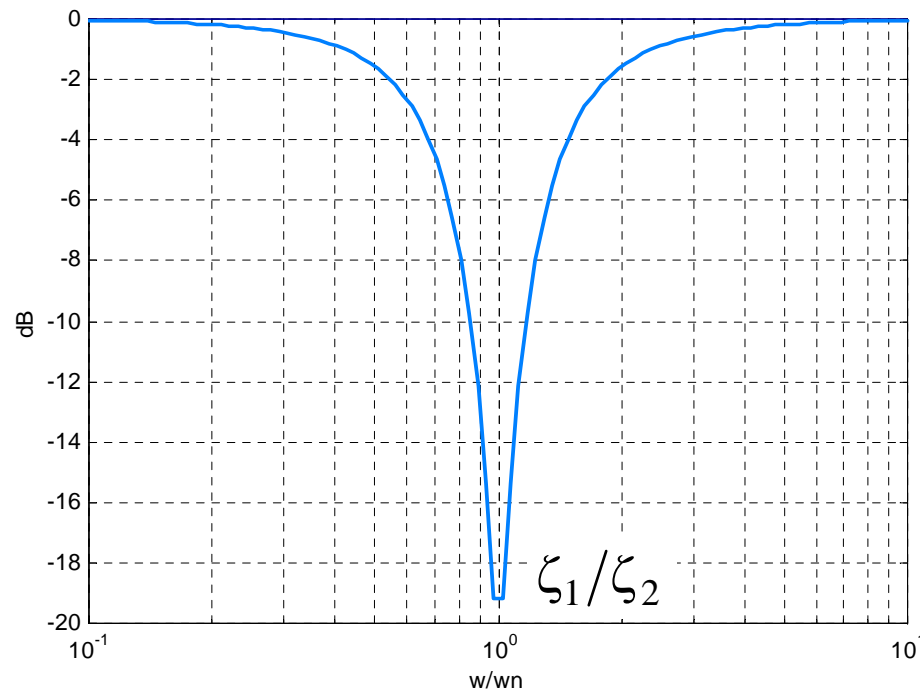
Filtro notch

Un filtro notch è un sistema dinamico progettato per cancellare una coppia di poli complessi e coniugati, tipicamente a basso smorzamento, presenti nel sistema sotto controllo. È quindi caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G_{nf}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove ω_n è la pulsazione dei poli complessi da cancellare, ζ_1 e ζ_2 sono smorzamenti, il primo piccolo, il secondo grande.

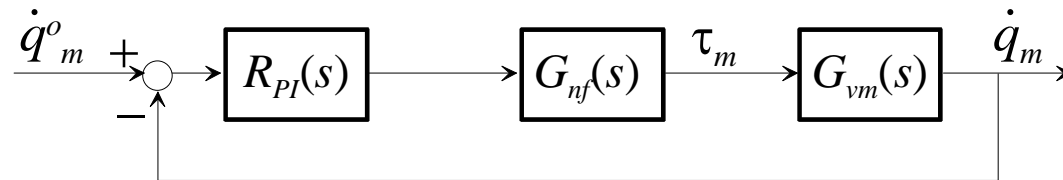
Il diagramma di Bode è caratterizzato da una “gola”:





Filtro notch: utilizzo

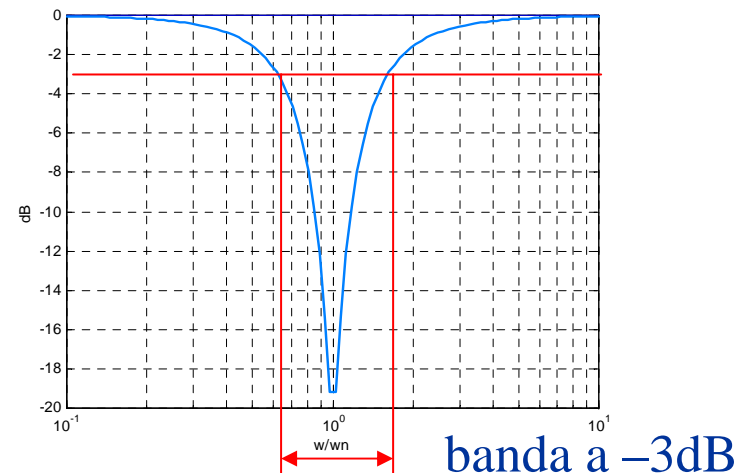
In un sistema di controllo del moto, il filtro notch viene di norma inserito nell'anello di velocità, in serie al regolatore PI:



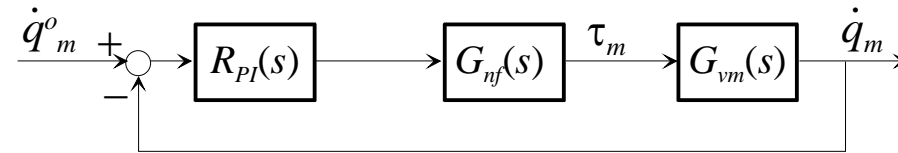
$$G_{nf}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}$$

La pulsazione naturale ω_n del filtro viene posta uguale alla stima disponibile della pulsazione ω_p dei poli del sistema sotto controllo, e lo smorzamento ζ_1 degli zeri del filtro approssima lo smorzamento dei poli ζ_p .

N.B. In diversi CN, il filtro viene assegnato dando la frequenza da bloccare (ω_n) e la “banda a -3dB ”



Filtro notch: problemi



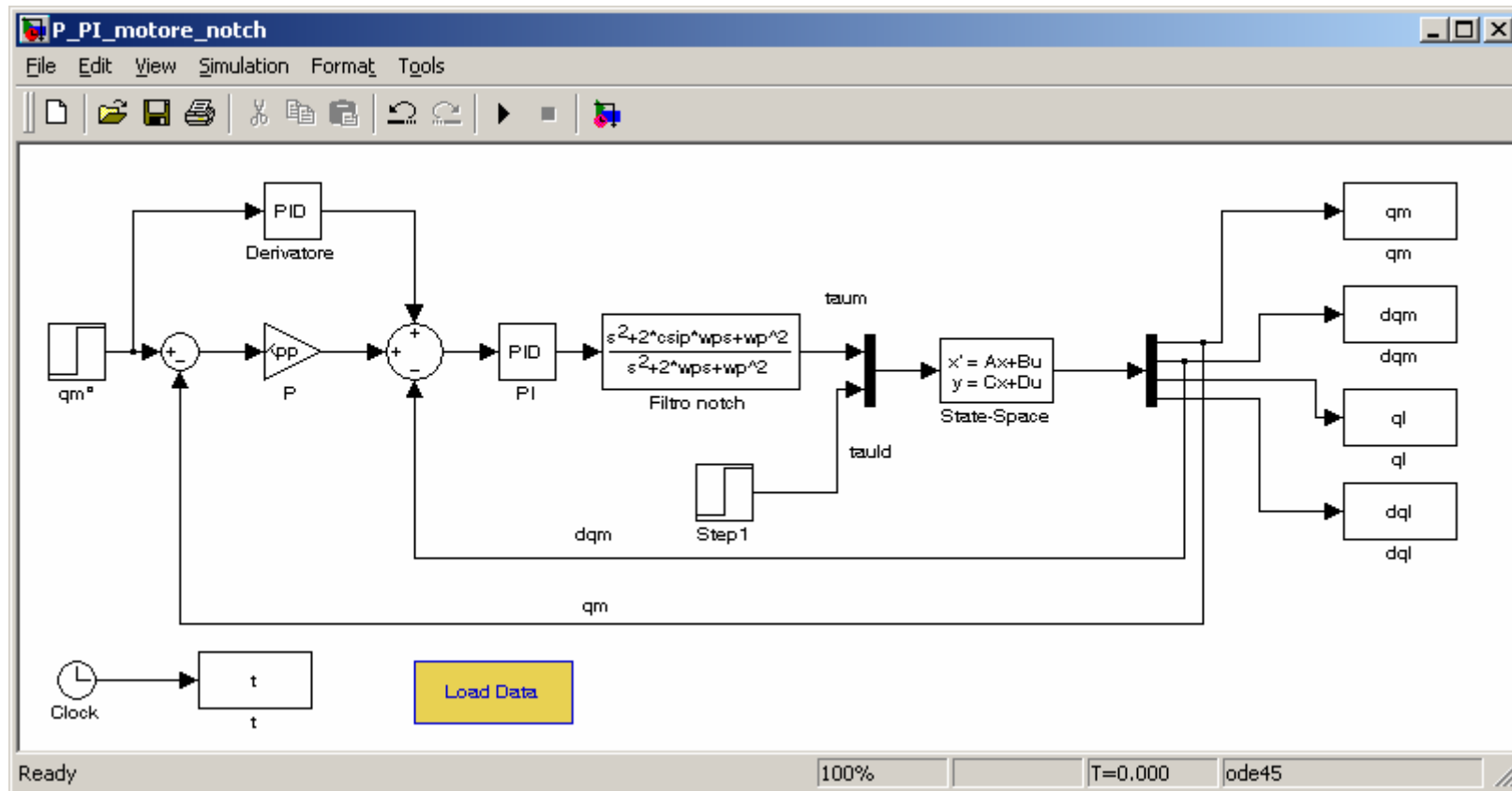
Sebbene il filtro notch possa essere utile per migliorare la risposta al riferimento, ci sono **alcuni problemi** connessi al suo utilizzo:

- La frequenza di risonanza sulla quale sintonizzare gli zeri del filtro deve essere conosciuta con buona approssimazione
- I poli poco smorzati del processo cancellati dal filtro rimangono autovalori del sistema in anello chiuso e riemergono come poli di altre funzioni di trasferimento, tipicamente quella dal disturbo di carico all'uscita.
- La realizzazione digitale dei regolatori produce una certa distorsione della risposta in frequenza che potrebbe non far coincidere la frequenza effettiva degli zeri del filtro digitale con la frequenza di progetto. Vi sono metodi per ovviare a questo problema (frequency pre-warping)

Simulazioni



Simuliamo in Simulink il controllo P/PI lato motore con filtro notch all'interno dell'anello di velocità:

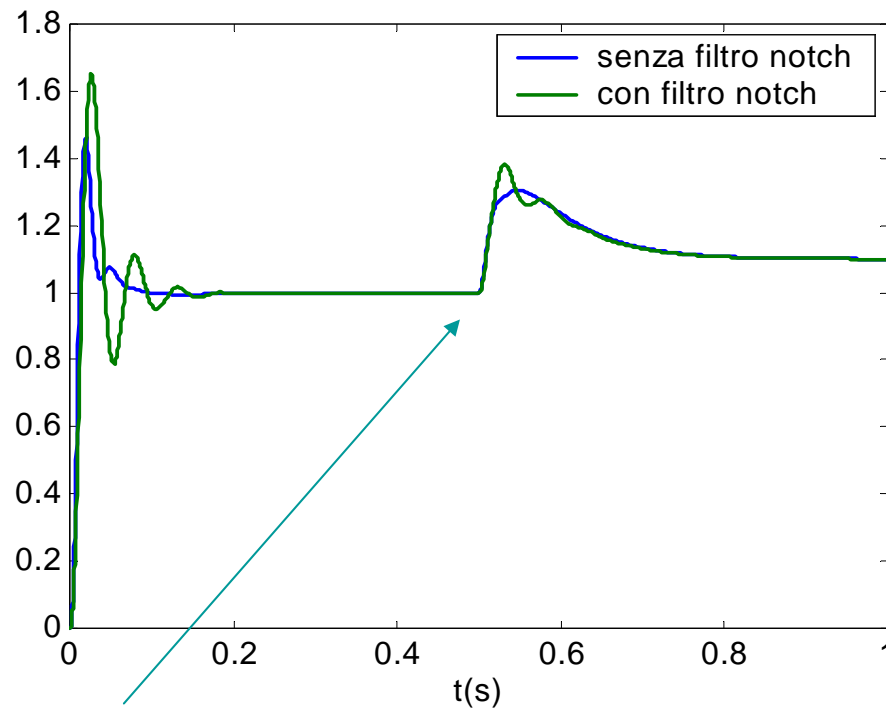


Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$, $\tilde{\omega}_{cv}=1$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$



Le cose non migliorano
(anzi peggiorano).
Perché?

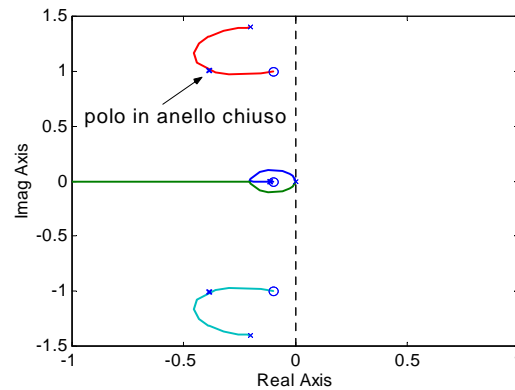
disturbo di coppia

Spiegazione

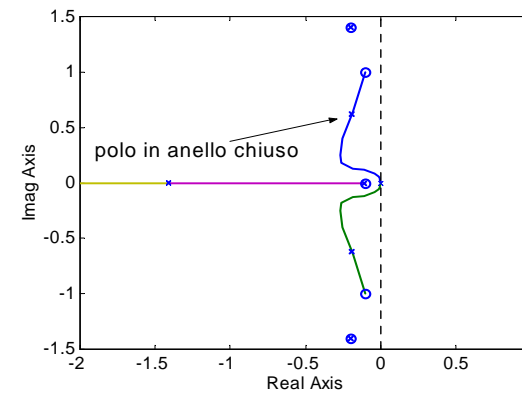


Anello di
velocità

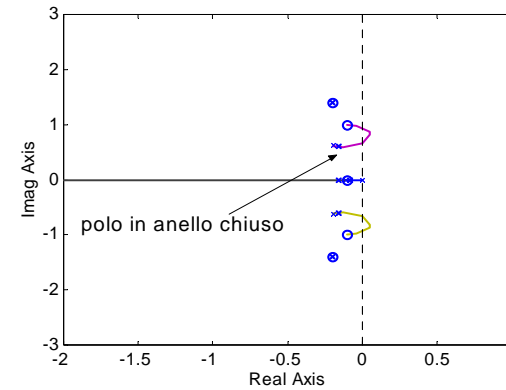
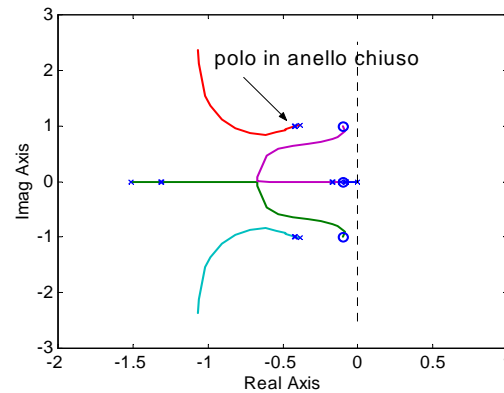
Senza filtro



Con filtro

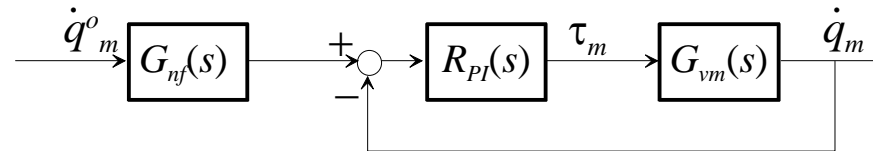


Anello di
posizione



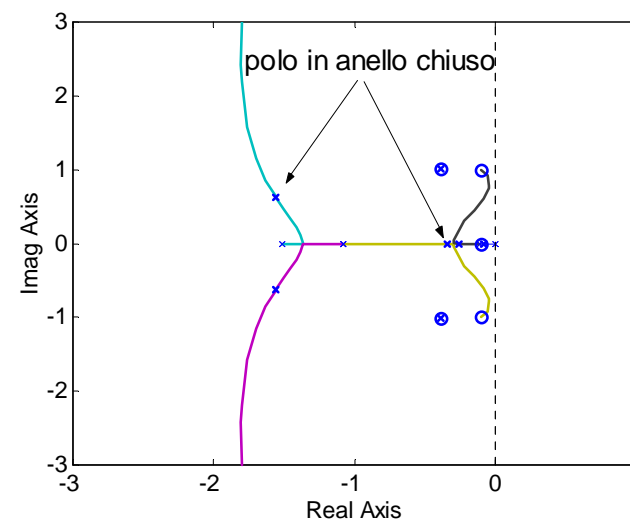
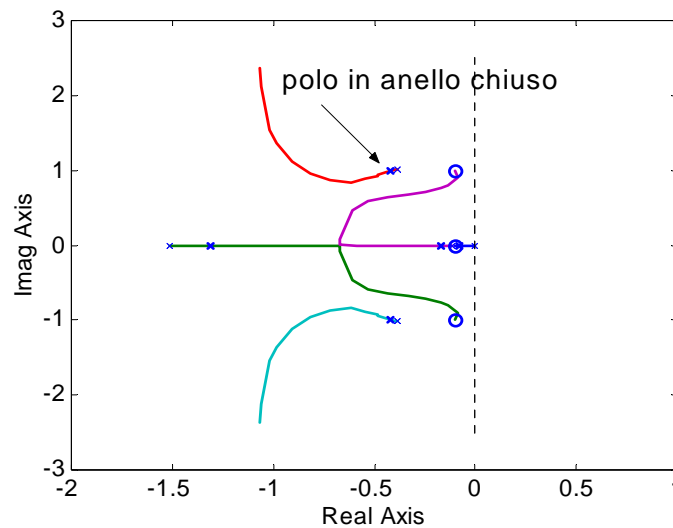
Conclusione: il filtro di fatto non aiuta a conferire smorzamento ai poli in anello chiuso.

Filtro notch fuori dall'anello di velocità



Senza filtro

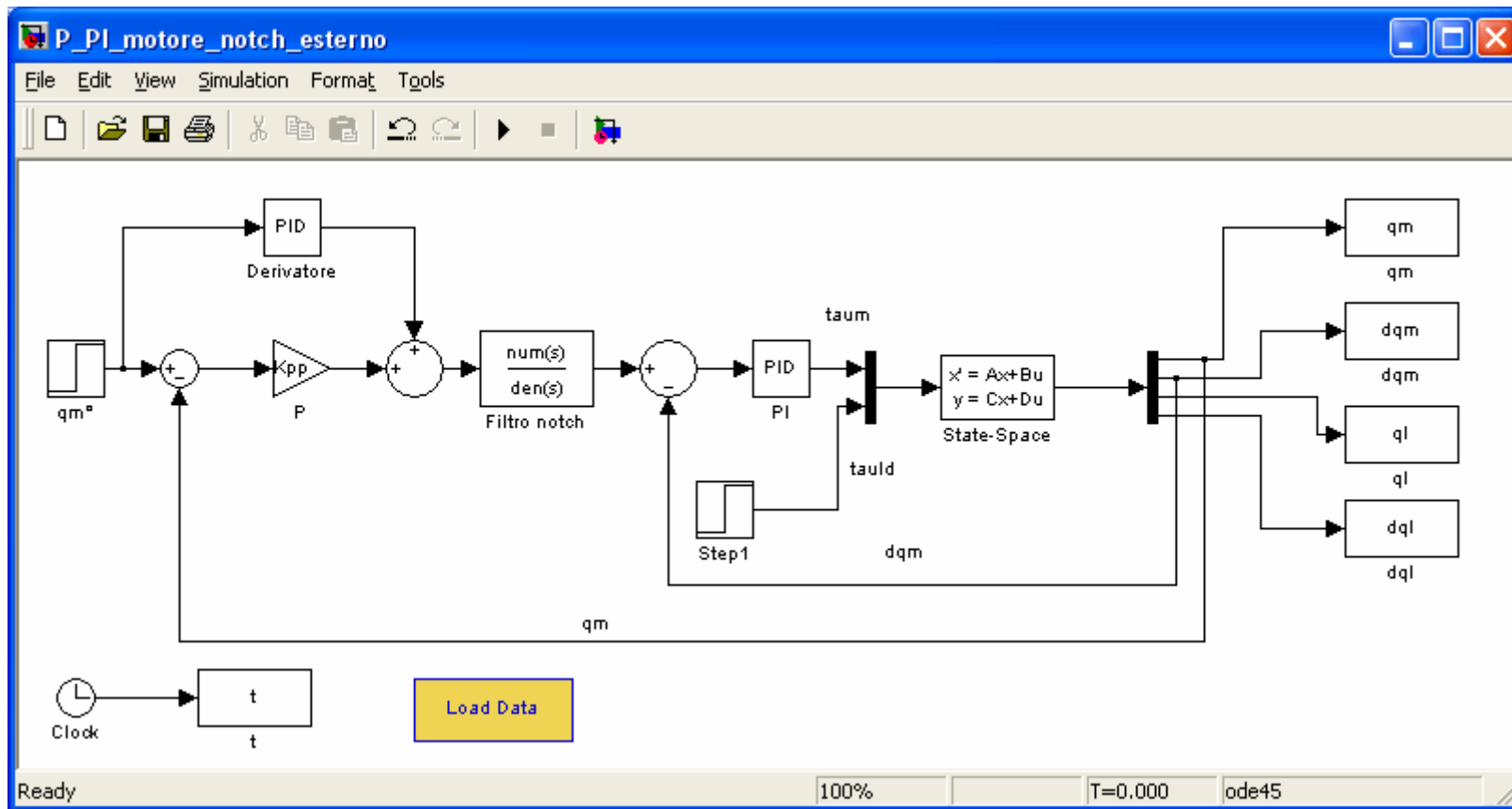
Con filtro



Anello di
posizione

Con gli stessi guadagni del P/PI si ottengono dei poli in anello chiuso più smorzati.

Simulazioni

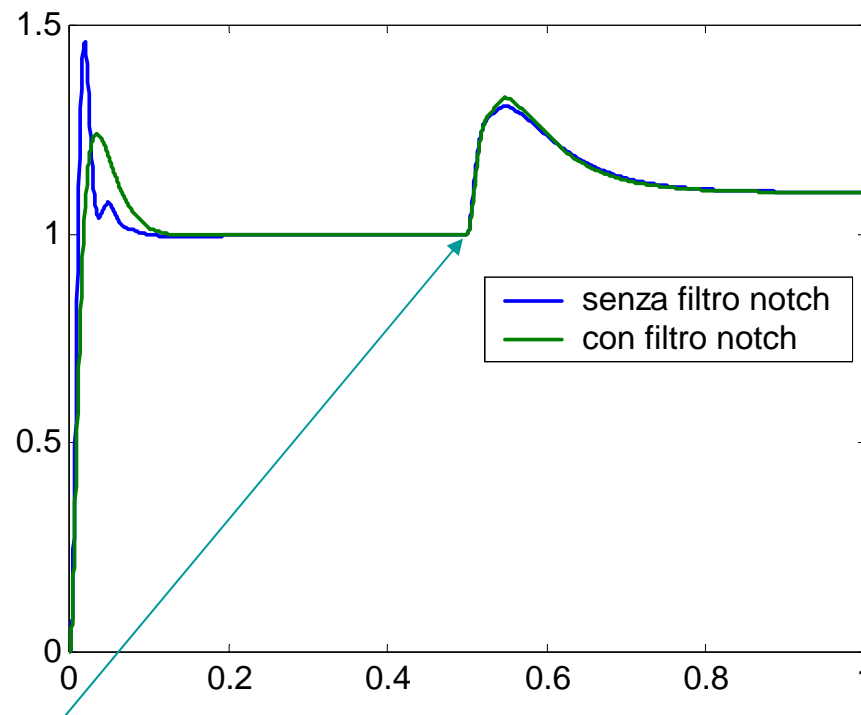


Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

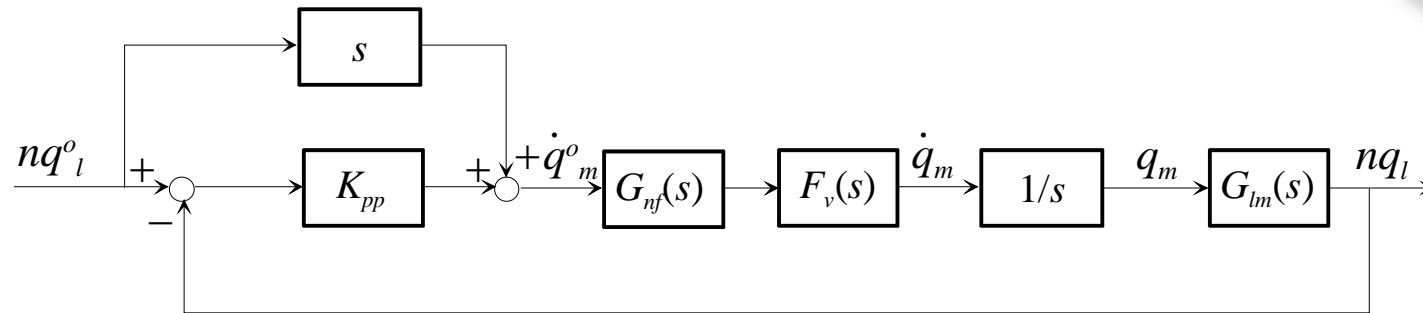
PI di velocità: $\tau_{iv}=10$, $\tilde{\omega}_{cv}=1$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$



disturbo di coppia

Si ottiene un sensibile miglioramento della risposta lato carico

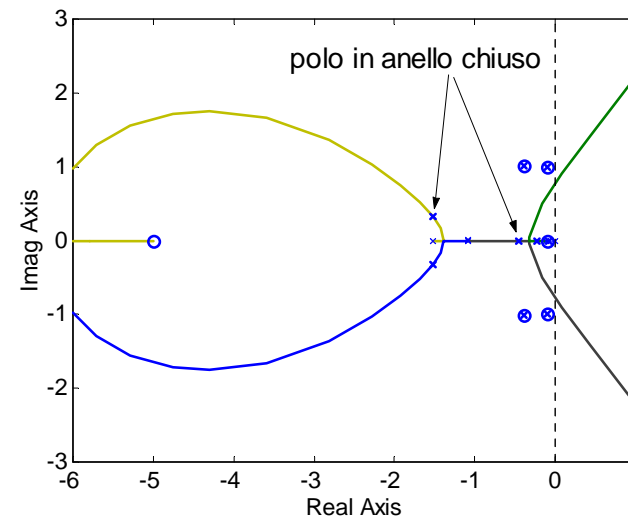
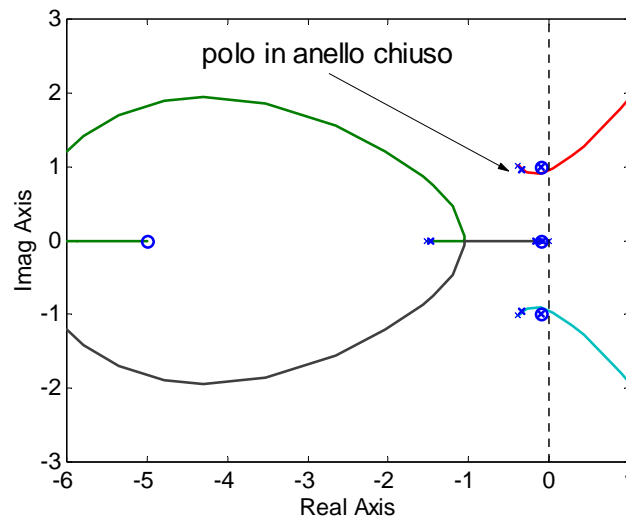
Filtro notch e controllo lato carico



Senza filtro

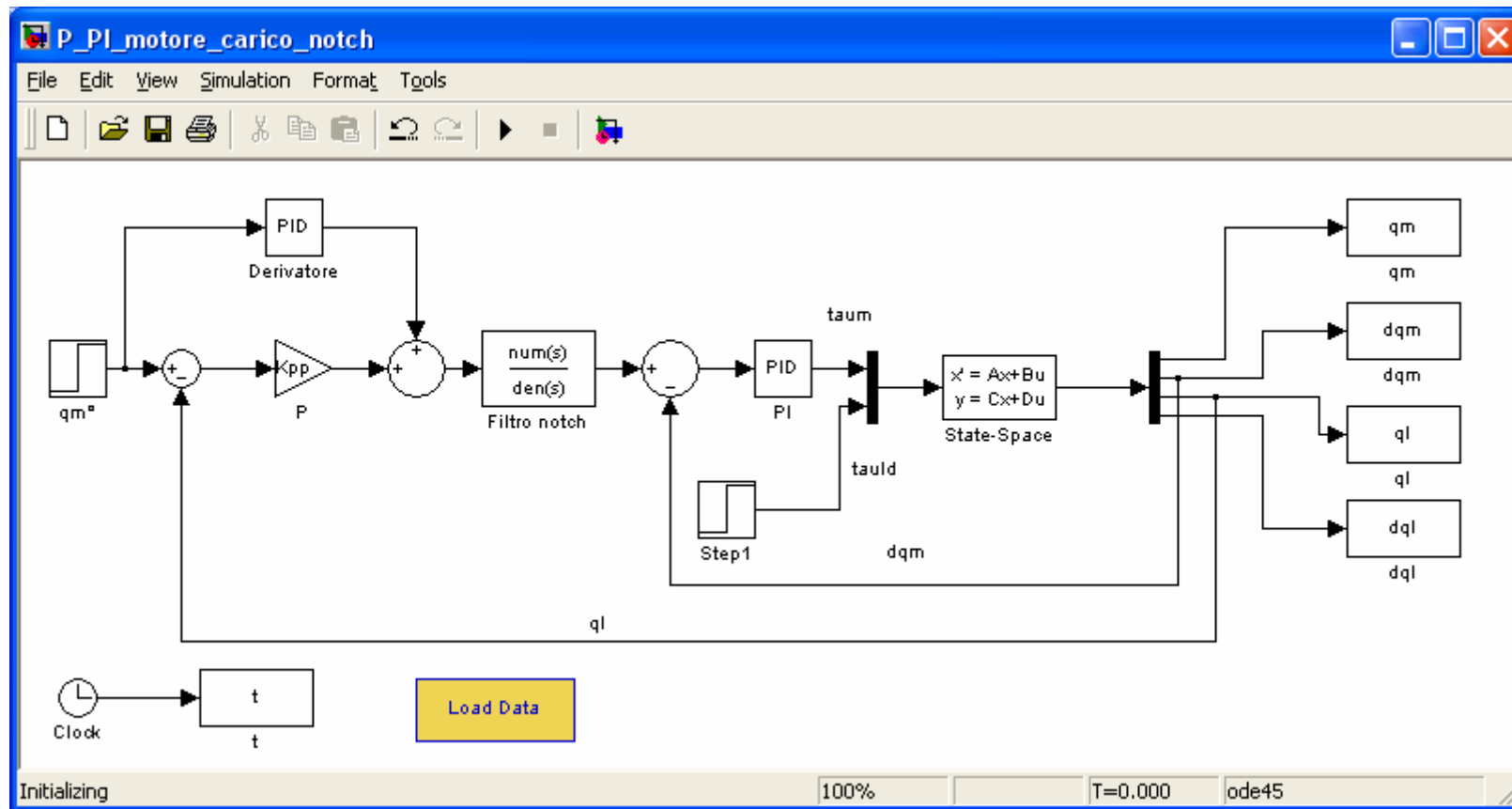
Con filtro

Anello di
posizione



Il vantaggio del filtro notch in questo caso appare ancora più rilevante.

Simulazioni

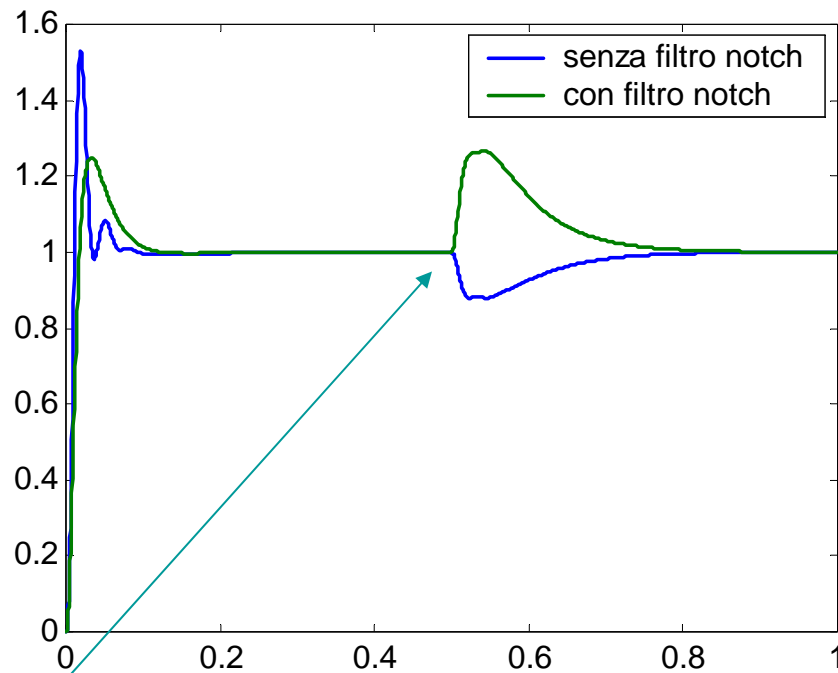


Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$, $\tilde{\omega}_{cv}=1$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$



disturbo di coppia

Si ottiene un sensibile miglioramento della risposta al riferimento lato carico.
La risposta al disturbo però peggiora.

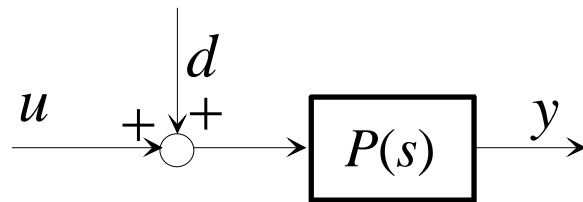
Osservatore del disturbo



L'osservatore del disturbo di coppia (TDO: Torque Disturbance Observer) è uno schema molto utilizzato nel controllo del moto, in particolare in applicazioni dove alla coppia nominale prodotta dal motore si sovrapponga un disturbo.

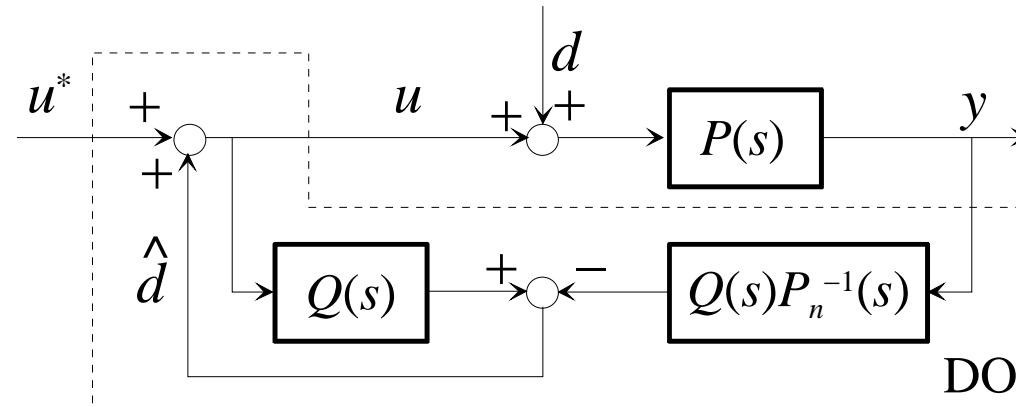
Il metodo stima la coppia di disturbo in ingresso al motore, compensandola con una retroazione positiva sul comando.

Consideriamo inizialmente un generico sistema con ingresso manipolabile u e disturbo di carico d :



Ci proponiamo di progettare un sistema che sulla base dei valori assunti da u e y determini una stima del disturbo.

Osservatore del disturbo



In questo schema $P_n(s)$ è un modello del sistema sotto controllo, di funzione di trasferimento $P(s)$, mentre $Q(s)$ è un filtro passabasso a guadagno unitario tale da rendere realizzabile la funzione di trasferimento $Q(s)P_n^{-1}(s)$.

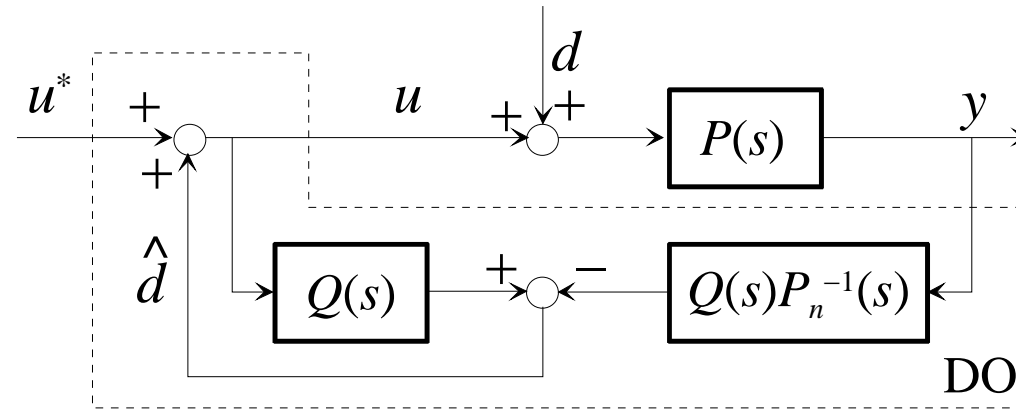
La stima del disturbo prodotta dall'osservatore (DO) è la seguente:

$$\begin{aligned}\hat{d}(s) &= Q(s)u(s) - P_n^{-1}(s)Q(s)y(s) = Q(s)u(s) - P_n^{-1}(s)Q(s)P(s)(d(s) + u(s)) = \\ &= Q(s)\left(1 - P_n^{-1}(s)P(s)\right)u(s) - Q(s)P_n^{-1}(s)P(s)d(s)\end{aligned}$$

se: $P_n(s) \approx P(s)$ si ha: $\hat{d}(s) \approx -Q(s)d(s)$

Pertanto, nella banda passante del filtro Q , il disturbo è stimato correttamente.

Osservatore del disturbo



Risolvendo lo schema a blocchi, si ottiene:

$$y(s) = \frac{P(s)(1-Q(s))}{1-Q(s)+P_n^{-1}(s)P(s)Q(s)}d(s) + \frac{P(s)}{1-Q(s)+P_n^{-1}(s)P(s)Q(s)}u^*(s)$$

se: $P_n(s) \approx P(s)$

$$y(s) = P(s)(1-Q(s))d(s) + P(s)u^*(s)$$

Pertanto, nella banda passante del filtro Q , il sistema dal nuovo ingresso u^* all'uscita y è virtualmente esente dal disturbo.

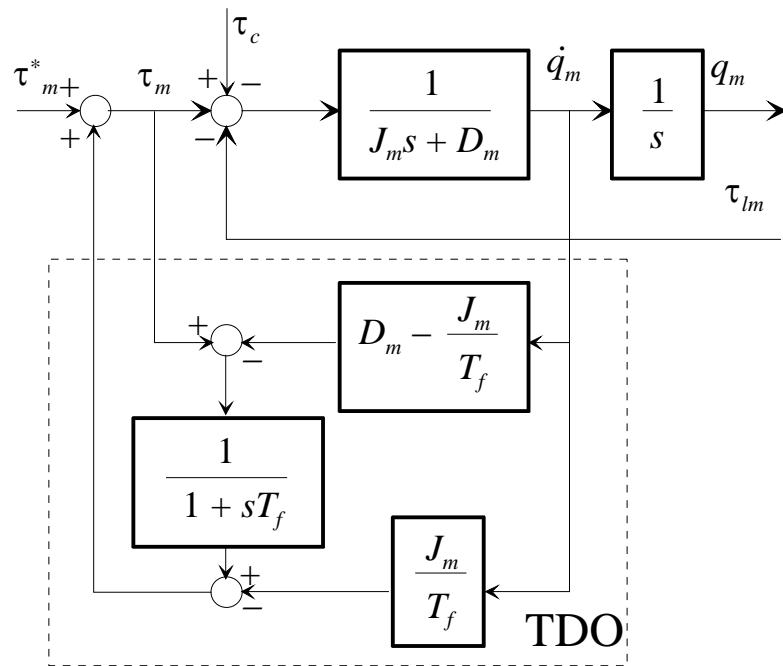


Osservatore del disturbo di coppia

Consideriamo ora un motore caratterizzato dal momento di inerzia J_m e dal coefficiente di attrito D_m . La funzione di trasferimento (da coppia a velocità) è:

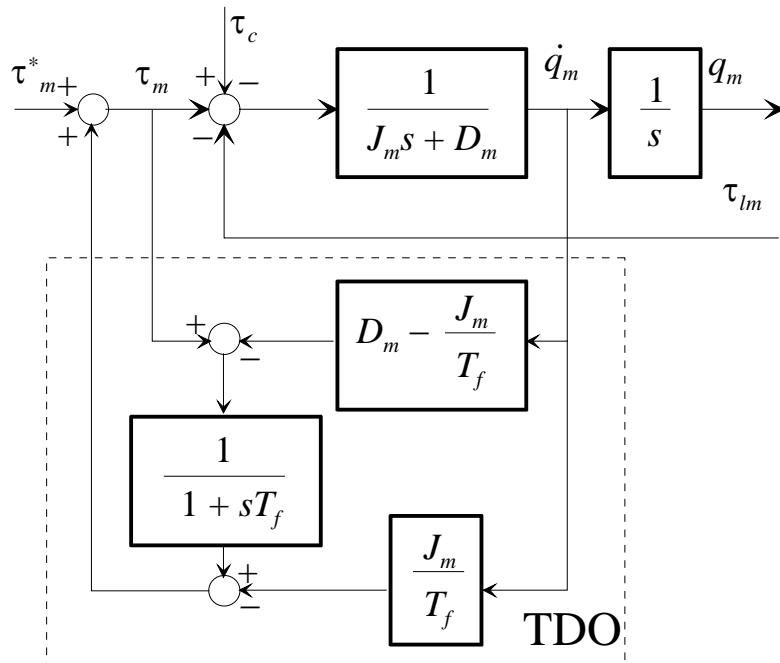
$$P(s) = \frac{1}{J_m s + D_m}$$

Adottando un filtro Q del primo ordine e rielaborando lo schema dell'osservatore del disturbo si ottiene:



La coppia di disturbo è costituita da una coppia esogena τ_c e dalla coppia trasmessa dal carico τ_{lm} . T_f è la costante di tempo (piccola) del filtro Q .

Osservatore del disturbo di coppia



Elaborando lo schema a blocchi si ottiene:

$$Q_m(s) = \frac{1}{J_m s^2 + D_m s} [\tau_m^*(s) - G_f(s)(\tau_c(s) + \tau_{lm}(s))]$$

con:

$$G_f(s) = \frac{sT_f}{1 + sT_f}$$

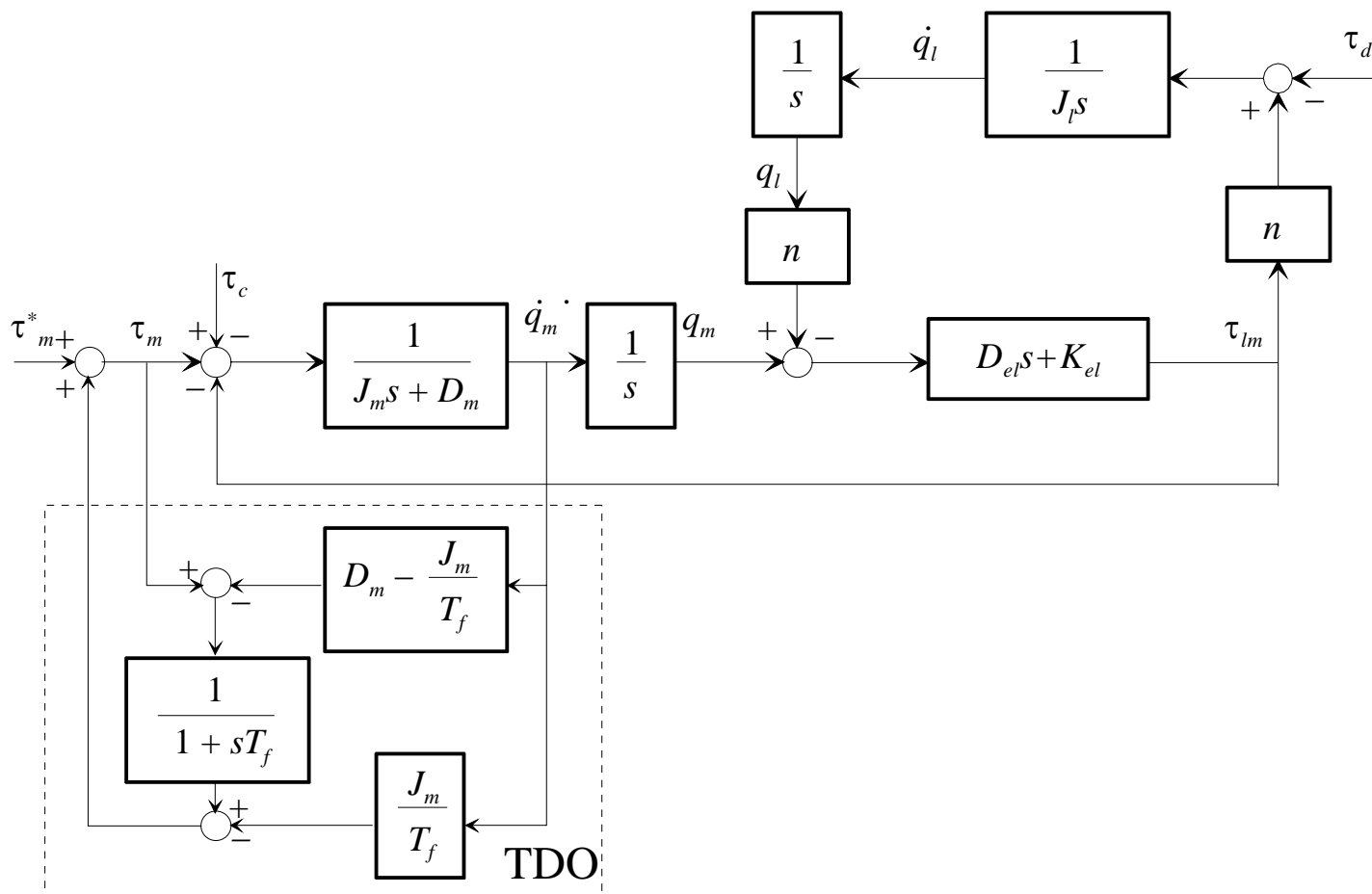
filtro passa-alto.

Il disturbo di coppia viene quindi filtrato molto efficacemente, in particolare in bassa frequenza.

Si osservi che il modello di riferimento è quello di un giunto **rigido**.

Che cosa cambia se tra motore e carico c'è un accoppiamento elastico?

TDO e modello elastico



TDO e modello elastico



Elaborando lo schema a blocchi con $\tau_d=0$ si ottiene:

$$Q_m(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{\varphi_f(s)} \left[\tau_m^*(s) - G_f(s)\tau_c(s) \right]$$

$$Q_l(s) = \frac{D_{el}s + K_{el}}{\varphi_f(s)} \left[\tau_m^*(s) - G_f(s)\tau_c(s) \right]$$

con: $\varphi_f(s) = (J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el})(J_ms^2 + D_ms) + G_f(s)(D_{el}s + K_{el})J_ms^2$

Per $T_f \rightarrow 0$:

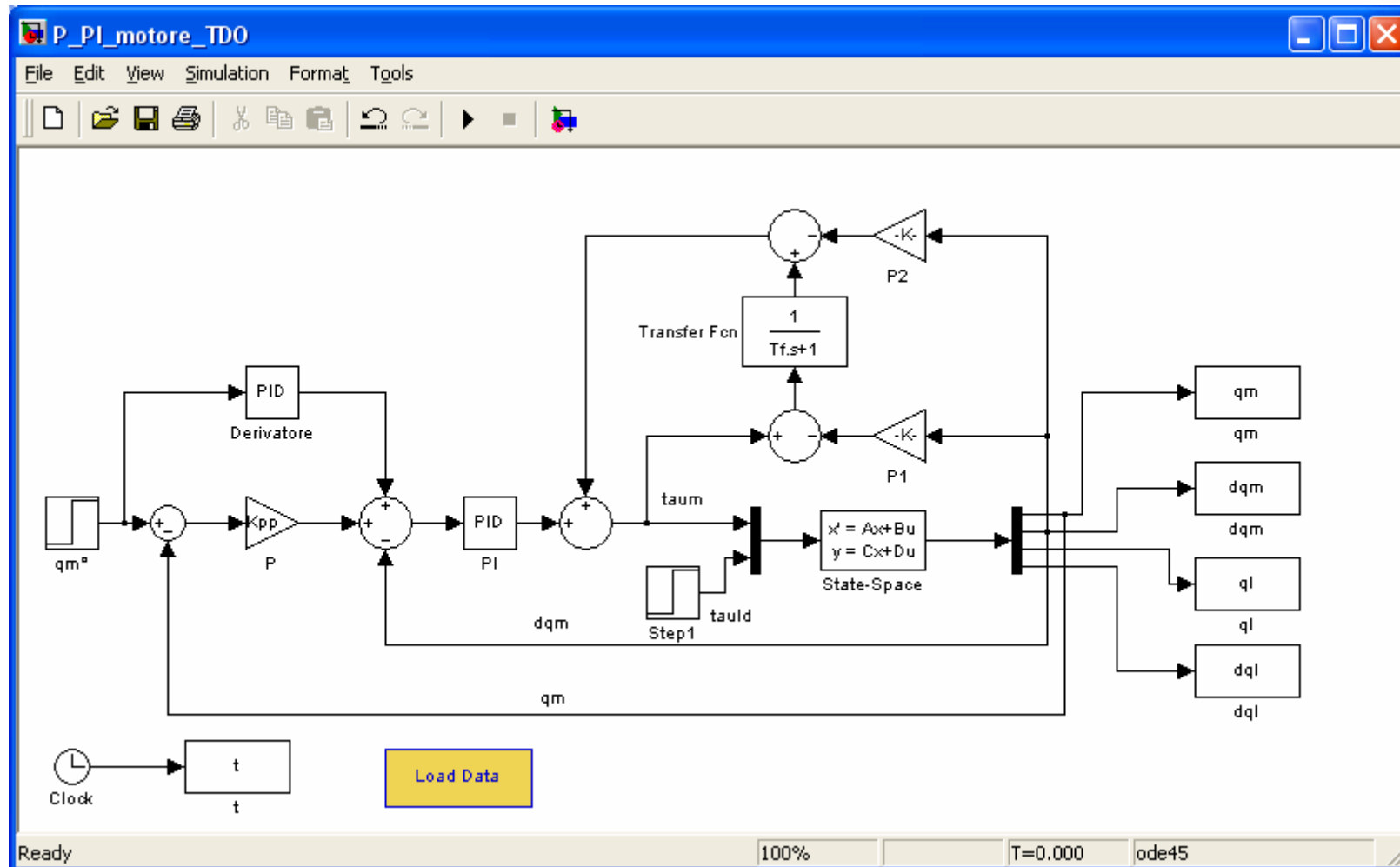
$$Q_m(s) \approx \frac{1}{J_ms^2 + D_ms} \tau_m^*(s)$$

$$Q_l(s) \approx \frac{K_{el} + sD_{el}}{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}} Q_m(s)$$

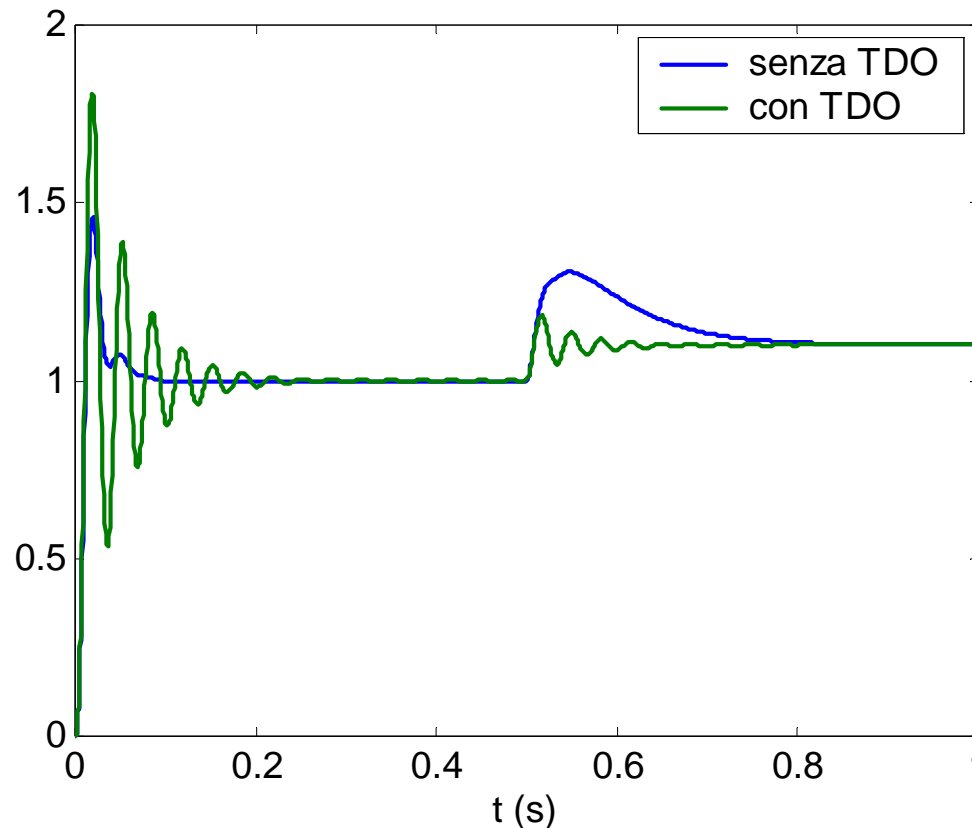
Il disturbo di coppia è rigettato e si può controllare il motore con un modello rigido...

...ma il carico oscilla liberamente, con la dinamica che avrebbe se il rotore fosse bloccato (“locked frequency”).

Simulazione



Simulazione



(lato carico)

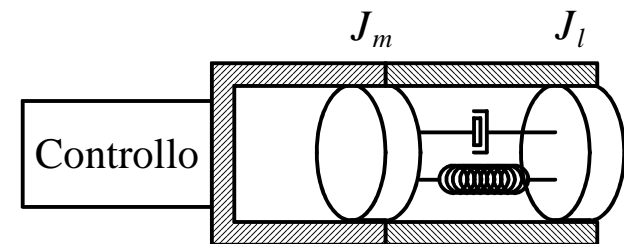
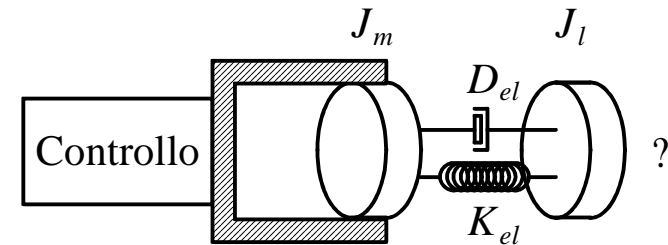
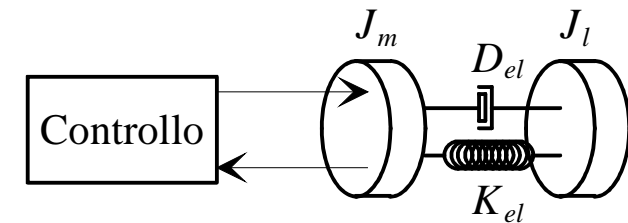
Conclusione: L'osservatore viene "tratto in inganno": interpreta la retroazione di coppia dalla trasmissione come se fosse un disturbo esogeno e cerca di neutralizzarlo. Bisogna usare il TDO con attenzione.

Controllo nello spazio di stato



Se si dispone della misura della sola posizione motore, può essere di interesse considerare metodologie di controllo concepite nello spazio di stato:

- 1) L'obiettivo ultimo è controllare la posizione del carico...
- 2) Un controllo perfetto del motore lascia il carico in anello aperto...
- 3) ...si cercano soluzioni che tengano conto dell'intero stato del sistema.





Modello nello spazio di stato

$$\mathbf{x} = [q_m \quad \dot{q}_m \quad nq_l \quad n\dot{q}_l]^T \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$u = \tau_m, \quad y = q_m \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

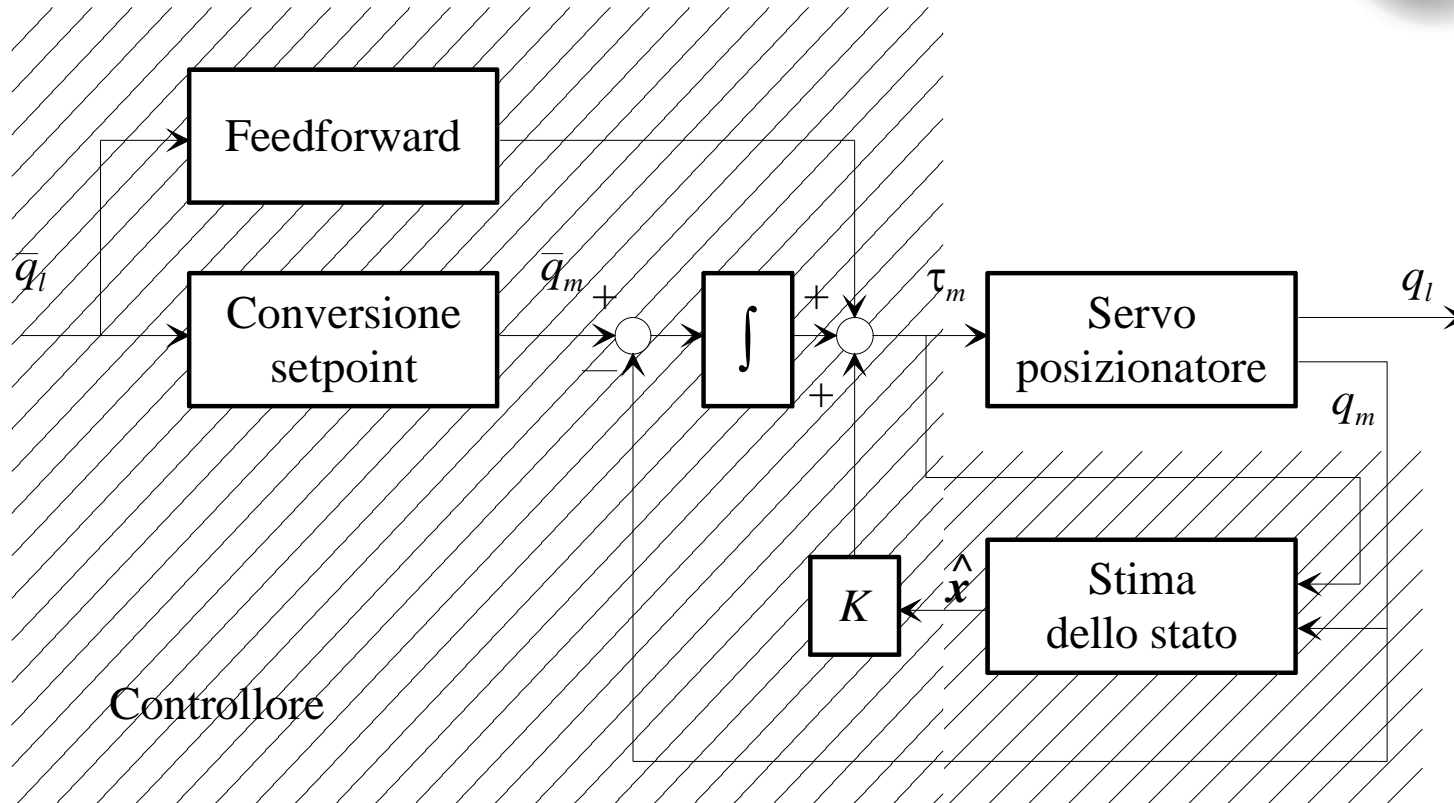
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{el}}{J_m} & -\frac{D_m + D_{el}}{J_m} & \frac{K_{el}}{J_m} & \frac{D_{el}}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{el}}{J_{lr}} & \frac{D_{el}}{J_{lr}} & -\frac{K_{el}}{J_{lr}} & -\frac{D_{el}}{J_{lr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$J_{lr} = J_l / n^2$$

- Raggiungibile da u
- Osservabile da y

Schema di controllo



Da progettare:

- Azione integrale
- Legge di controllo ($u = \hat{K}x$)
- Stima dello stato
- Azioni in anello aperto

Introduzione dell'azione integrale



Si introduce l'azione integrale per ottenere errore nullo a regime sul setpoint anche in presenza di disturbi costanti. Detto x_I lo stato dell'integratore si avrà:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$\dot{x}_I = \bar{y} - y = -\mathbf{c}\mathbf{x} + \bar{y}$$

A questo punto si “allarga” lo stato del sistema, aggiungendo lo stato dell'integratore:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

Le matrici si modificano di conseguenza:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{g}_u \mathbf{u} + \mathbf{g}_y \bar{y}$$

Introduzione dell'azione integrale



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Grazie al **principio di separazione**, potremo procedere all'assegnamento degli autovalori del sistema in anello chiuso come se lo stato del sistema fosse accessibile, trattando separatamente il problema della stima dello stato dall'uscita.

Volendo allocare gli autovalori del sistema “aumentato” occorrerà preliminarmente verificare che la coppia $(\mathbf{F}, \mathbf{g}_u)$ sia **raggiungibile**: si può dimostrare che questo è vero se e solo se il sistema sotto controllo è raggiungibile ed osservabile e se la sua funzione di trasferimento **non ha zeri in $s=0$** .

Poiché queste condizioni sono soddisfatte, si può procedere all'assegnamento degli autovalori con regolazione a zero dell'errore.

Posizionamento degli autovalori



Si scelgono i guadagni in modo da assegnare gli autovalori della matrice in anello chiuso:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + g_u u \\ u &= \tilde{K}z, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} K & k_I \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \dot{z} = \left(F + g_u \tilde{K} \right) z$$

In linea di principio, gli autovalori possono essere scelti arbitrariamente. In realtà la **robustezza** dell'assegnamento degli autovalori dipende fortemente dalle posizioni scelte per gli autovalori desiderati in anello chiuso.

Una misura di robustezza è il condizionamento della matrice formata dagli **autovettori** del sistema in anello chiuso: più ortogonali sono gli autovettori, migliore è il condizionamento, più robusto è il sistema in anello chiuso.

Controllo ottimo LQ



Un'alternativa è scegliere i guadagni in modo da minimizzare la cifra di merito quadratica:

$$J = \int_0^{\infty} \left[\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + u(t)^2 \right] dt$$

La routine Matlab “lqr” fornisce la soluzione del problema (cioè la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$) dati il sistema sotto controllo e la matrice \mathbf{Q} (che deve essere semidefinita positiva).

Come scegliere la matrice dei pesi \mathbf{Q} ?

Si può procedere per tentativi oppure seguire strade più strutturate, per le quali si rimanda alla letteratura specifica.

Ricostruttore asintotico dello stato

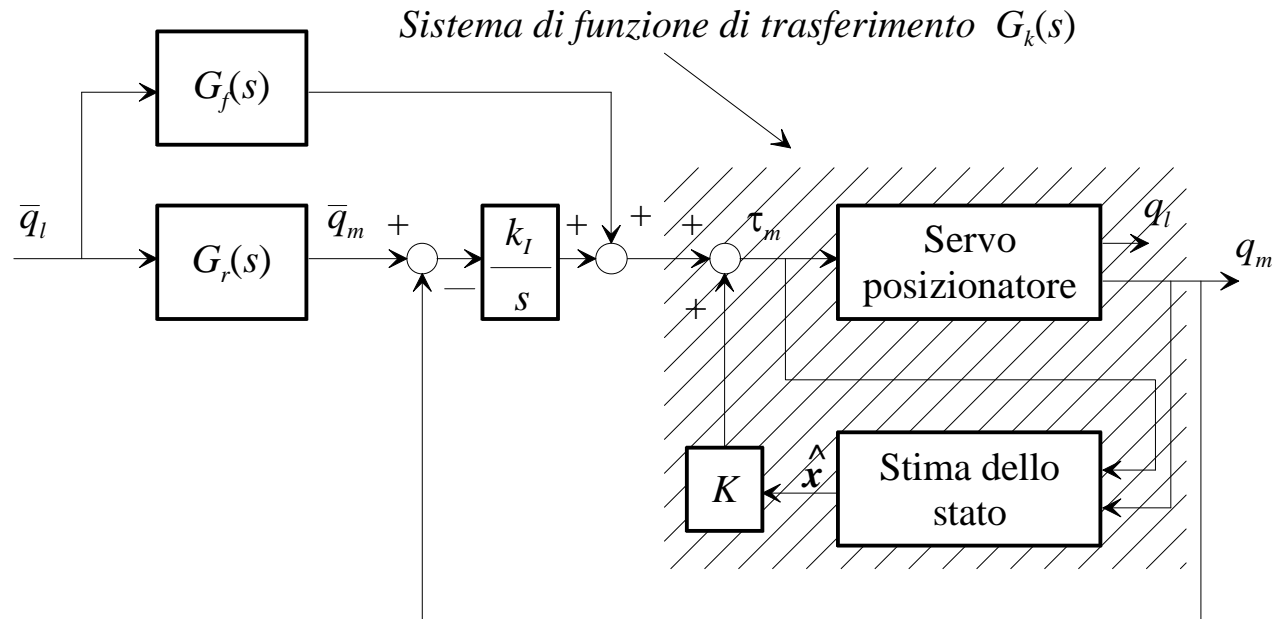


Si scelgono i guadagni del ricostruttore in modo da assegnare gli autovalori della dinamica dell'errore di stima:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{c})\boldsymbol{\varepsilon} \quad [\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]$$

- Come è noto il problema è risolubile se la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{c}) è **osservabile** (come nel nostro caso).
- Più grande è il modulo degli autovalori di $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{c}$, più veloce è la ricostruzione della dinamica, ma più sensibile è la stima ai rumori di misura.
- Anche questo problema può essere impostato in termini di minimizzazione di una cifra di merito integrale, progettando un **filtro di Kalman**. Occorre però modellare il sistema in ambito stocastico (i disturbi vanno interpretati come processi stocastici con determinate medie e varianze).

Progetto delle azioni di anticipo



Per conferire al progetto **precisione dinamica** (prontezza e grado di stabilità nei transitori di inseguimento del riferimento) si adottano dei componenti in **feedforward**.

Si osservi che:

$$G_k(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I}_4 - (\mathbf{A} + \mathbf{bK}))^{-1} \mathbf{b} = \frac{B_m(s)}{\chi_{A+bK}(s)}$$

Numeratore della f.d.t.
da τ_m a q_m

Progetto delle azioni di anticipo

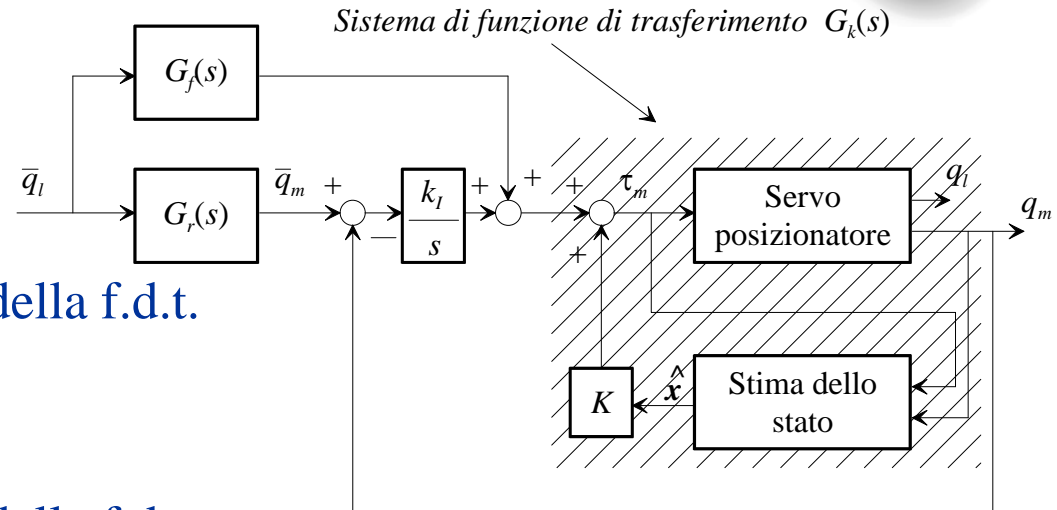


Definiamo:

$$G_{lm}(s) = \frac{B_l(s)}{B_m(s)}$$

Numeratore della f.d.t.
da τ_m a q_l

Numeratore della f.d.t.
da τ_m a q_m



Scegliendo:

$$\begin{cases} G_r(s) = G_{lm}(s)^{-1} F(s) \\ G_f(s) = G_k(s)^{-1} G_{lm}(s)^{-1} F(s) \end{cases} \Rightarrow$$

si ottiene:

$$\frac{Q_l(s)}{Q_l(s)} = F(s)$$

Specificando $F(s)$ si assegna completamente la risposta del sistema al riferimento. Per ottenere operatori **causali**, il grado relativo di F deve essere pari almeno a 3.

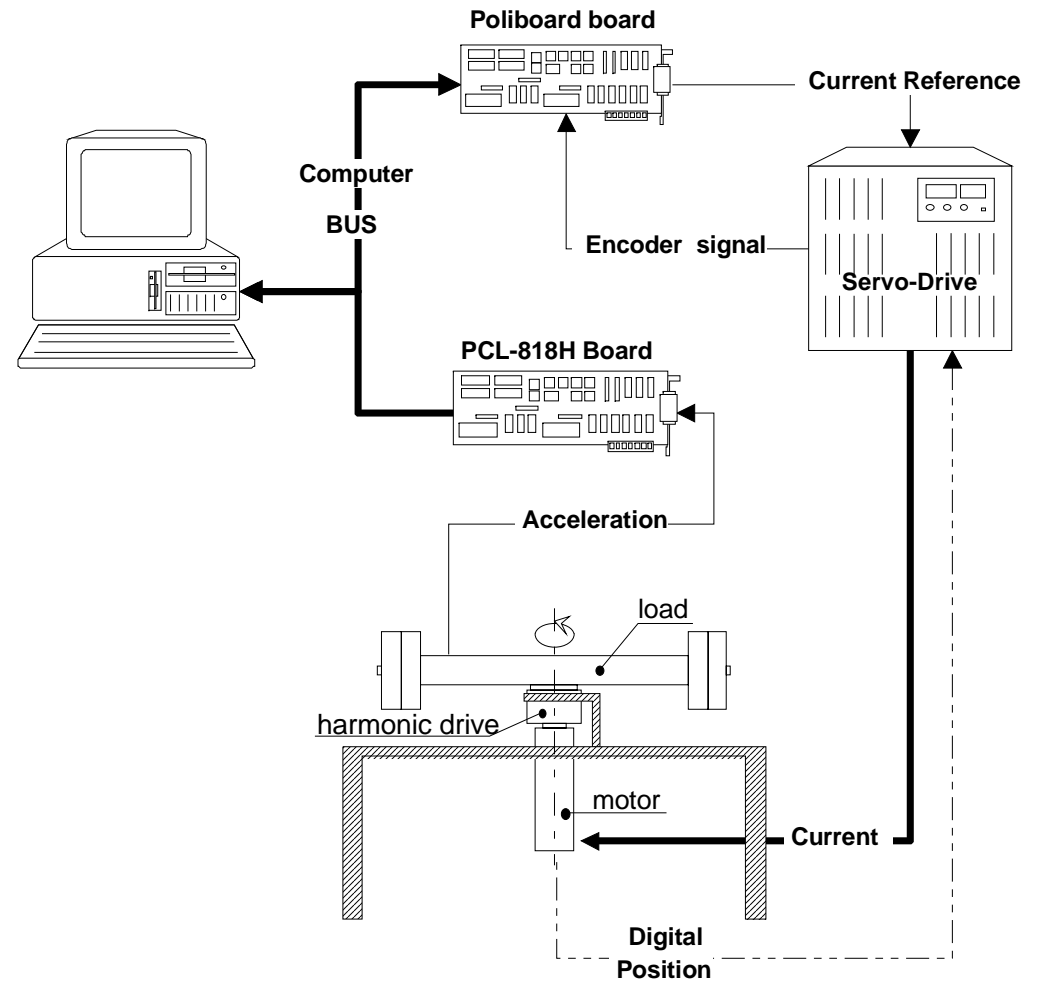


Apparato sperimentale

Vedremo ora alcuni confronti sperimentali tra un controllore progettato nello spazio di stato (LQG) ed un controllore PID, chiuso lato motore.

Torque constant K_t	1.6 Nm/Arms
Motor inertia J_m	0.00015 Kgm ²
Load inertia J_l	2.7 Kgm ²
Transmission ratio n	100
Viscous friction D_m	0.0034 Nms/rad
Stiffness constant K_{el}	3.1 Nm/rad
Elasticity damping coeff. D_{el}	0.0022 Nms/rad
Antiresonance frequency ω_{nz}	105 rad/s
Complex zeros damping ζ_z	0.063
Resonance frequency ω_{np}	179 rad/s
Complex poles damping ζ_p	0.138
Real pole frequency $1/T$	9.12 rad/s

Experiment	1	2	3
Load rotation (deg)	40	30	50
Time for the positioning (s)	0.5	0.5	0.9
Maximum acceleration (rad/s ²)	1200	900	500

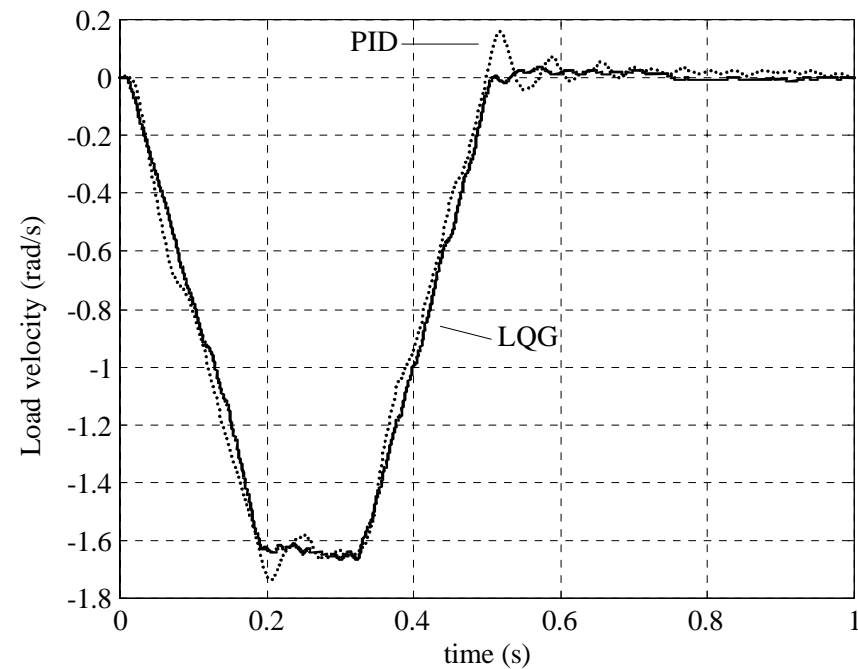
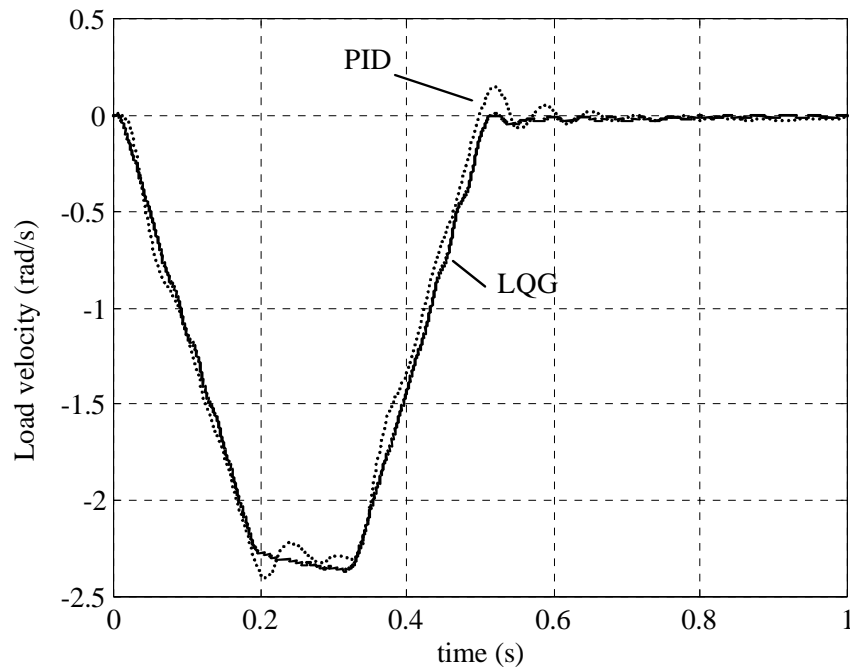


Confronti sperimentali



- Rotazione di 40° in 0.5 s
- Accelerazione max: 1200 rad/s^2

- Rotazione di 30° in 0.5 s
- Accelerazione max: 900 rad/s^2

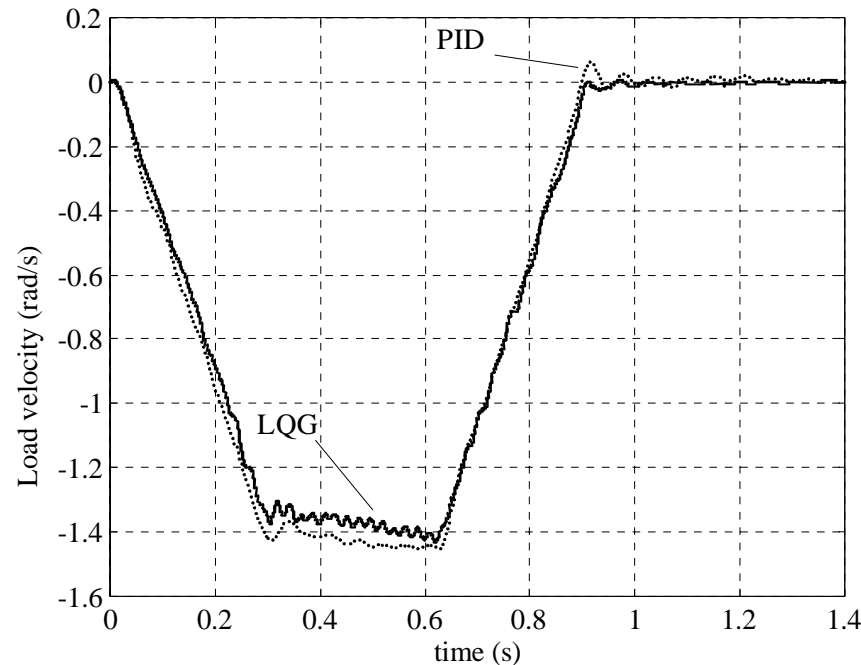


Si confrontano le velocità lato carico, ottenute per integrazione del segnale prodotto da un accelerometro montato sul carico.

Confronti sperimentali



- Rotazione di 50° in 0.9 s
- Accelerazione max: 500 rad/s^2



A basse velocità si ha la comparsa di ripple

Conclusioni sui metodi nello spazio di stato:

Si manifestano dei vantaggi rispetto al controllore PID, che però si pagano in termini di complessità di progettazione, realizzazione, codifica e debugging del controllore.

Input shaping



Tutti i metodi di controllo visti finora prevedono una retroazione della variabile controllata: sono infatti metodi **in anello chiuso**.

L'input shaping è invece un metodo **in anello aperto** (feedforward): consiste nel modificare l'ingresso al sistema sotto controllo in modo tale da annullare l'effetto di una o più risonanze presenti nel sistema stesso. Richiede la conoscenza della pulsazione naturale e dello smorzamento dei poli complessi e coniugati.

Può essere utilizzato con un certo successo nel controllo di strutture flessibili, quali per esempio bracci robotici per applicazioni spaziali.



RALF, Georgia Tech (Atlanta)

Risposta all'impulso



Si consideri un sistema dinamico con una coppia di poli complessi e coniugati:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La risposta ad un impulso di ampiezza k_i che interviene all'istante t_i è data dall'espressione:

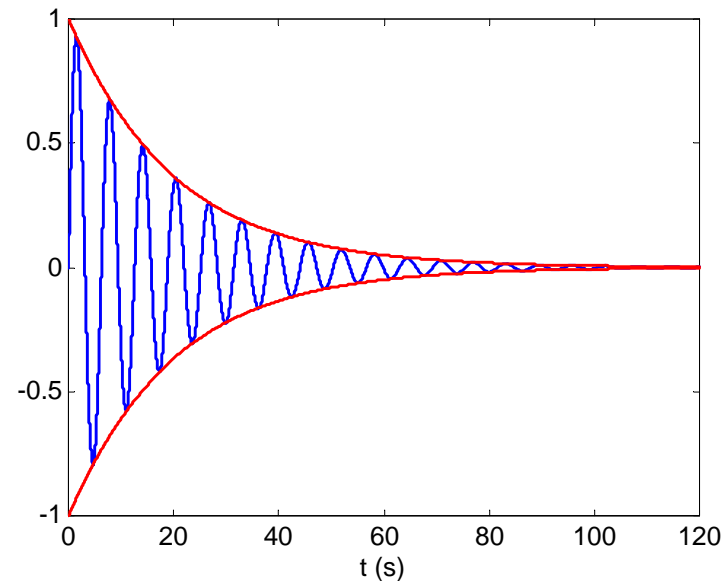
$$y_i(t) = B_i e^{-\zeta\omega_n(t-t_i)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_i)\right), \quad t \geq t_i$$

con:

$$B_i = k_i \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Il periodo (o pseudoperiodo) dell'oscillazione vale:

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$





Due impulsi

Si supponga ora di eccitare il sistema con due impulsi, agli istanti t_1 e t_2 ($t_2 > t_1$). La risposta del sistema è la somma delle due risposte all'impulso:

$$y(t) = B_1 e^{-\zeta \omega_n (t-t_1)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_1)\right) + B_2 e^{-\zeta \omega_n (t-t_2)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_2)\right), \quad t \geq t_2$$

È possibile fare in modo che y sia **nulla** a partire dall'istante t_2 ?

È sufficiente imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} k_1 e^{\zeta \omega_n t_1} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_1\right) + k_2 e^{\zeta \omega_n t_2} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_2\right) = 0 \\ k_1 e^{\zeta \omega_n t_1} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_1\right) + k_2 e^{\zeta \omega_n t_2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_2\right) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle quattro incognite k_1 , k_2 , t_1 e t_2 . Per risolverlo possiamo imporre $t_1=0$ e la condizione di normalizzazione sulle ampiezze:

$$k_1 + k_2 = 1$$

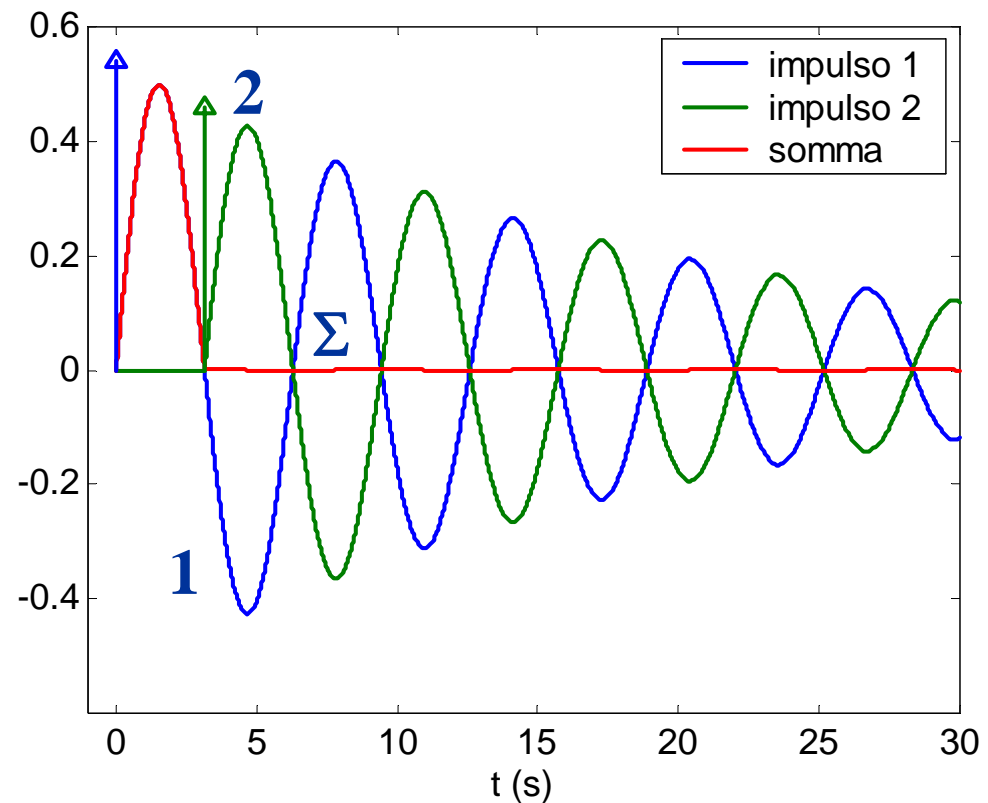
Due impulsi: soluzione



Risolvendo il sistema si trova:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\Delta T}{2}, \quad k_1 = \frac{1}{1+\alpha}, \quad k_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad \left(\alpha = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

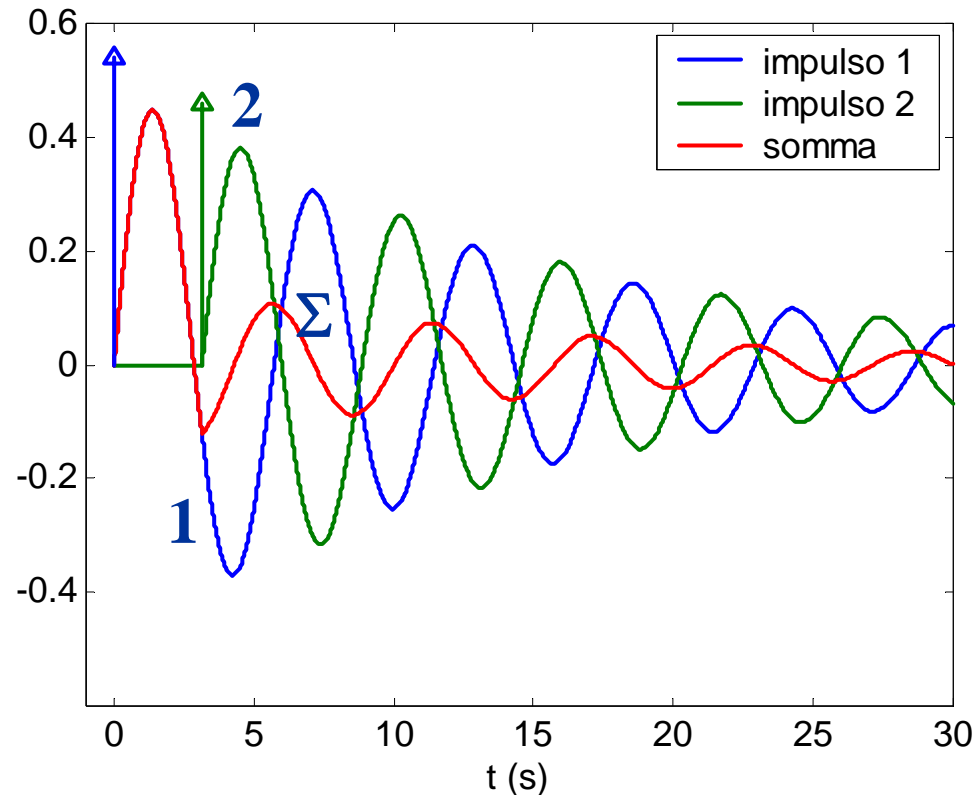
Il secondo impulso va quindi dato dopo metà periodo. Si osservi che entrambi gli impulsi sono positivi.



Due impulsi: robustezza



Se i parametri ω_n e ζ sono noti con imprecisione, il risultato dell'operazione peggiora. Ad esempio, con un errore del 10% su ω_n e del 20% su ζ si ottiene:



Per migliorare la robustezza del metodo, si possono utilizzare più di due impulsi.

Tre impulsi



Si supponga quindi di eccitare il sistema con tre impulsi, agli istanti t_1 , t_2 e t_3 ($t_3 > t_2 > t_1$). La risposta del sistema è la somma delle tre risposte all'impulso:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 B_i e^{-\zeta \omega_n (t-t_i)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_i)\right), \quad t \geq t_3$$

Per fare in modo che y sia **nulla** a partire dall'istante t_3 si impone:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 k_i e^{\zeta \omega_n t_i} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 k_i e^{\zeta \omega_n t_i} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle sei incognite k_1, k_2, k_3, t_1, t_2 e t_3 . Possiamo però imporre anche che non solo y ma **anche la sua derivata** sia nulla a partire dall'istante t_3 . In questo modo si generano altre due equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 k_i t_i e^{\zeta \omega_n t_i} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 k_i t_i e^{\zeta \omega_n t_i} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \end{cases}$$

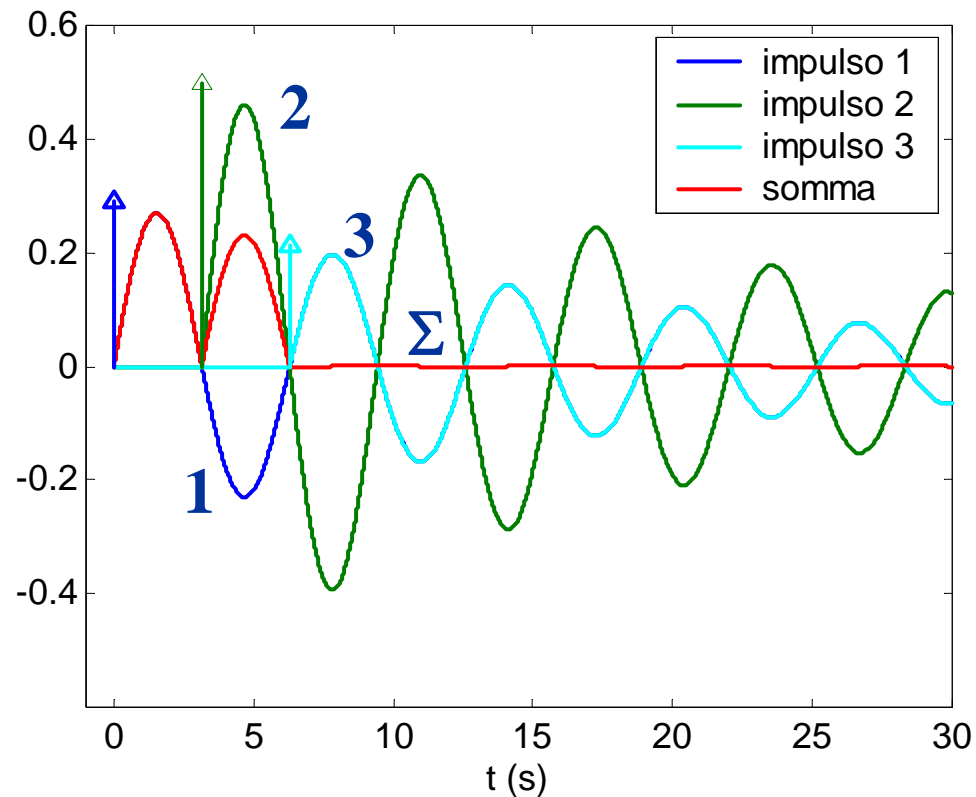


Tre impulsi: soluzione

Risolvendo il sistema imponendo $t_1=0$ e la condizione di normalizzazione sulle ampiezze $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ si trova:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\Delta T}{2}, \quad t_3 = \Delta T, \quad k_1 = \frac{1}{1+2\alpha+\alpha^2}, \quad k_2 = \frac{2\alpha}{1+2\alpha+\alpha^2}, \quad k_3 = \frac{\alpha^2}{1+2\alpha+\alpha^2}$$

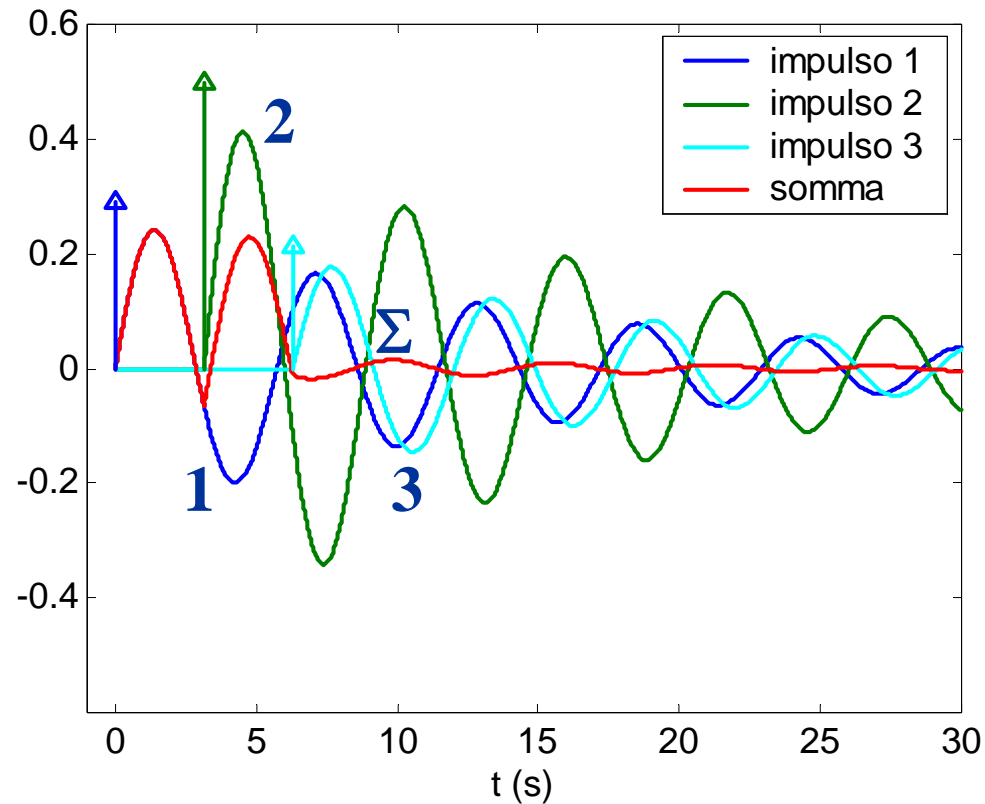
Il secondo impulso va quindi dato dopo metà periodo, il terzo dopo un intero periodo. Si osservi che tutti gli impulsi sono positivi.



Tre impulsi: robustezza



Con un errore del 10% su ω_n e del 20% su ζ si ottiene:



Il comportamento, nonostante l'incertezza sui parametri, è buono.

Input shaping: il metodo



Dalle considerazioni precedenti si può derivare un metodo per modificare l'ingresso di un sistema risonante, in modo da eliminare le oscillazioni.

Sia $u(t)$ l'ingresso del sistema e $w(t)$ il treno di impulsi determinato con le considerazioni precedenti:

$$w(t) = k_1\delta(t) + k_2\delta(t - \Delta T/2) + k_3\delta(t - \Delta T)$$

Sia inoltre $h(t)$ la risposta del sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ a w :

$$h(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad h(t) = 0, t > \Delta T$$

Ricordiamo che con convoluzione di due segnali u e h si intende l'operazione:

$$h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

e che la trasformata di Laplace della convoluzione di due segnali è il prodotto delle due trasformate:

$$L[h(t) * u(t)] = H(s)U(s)$$



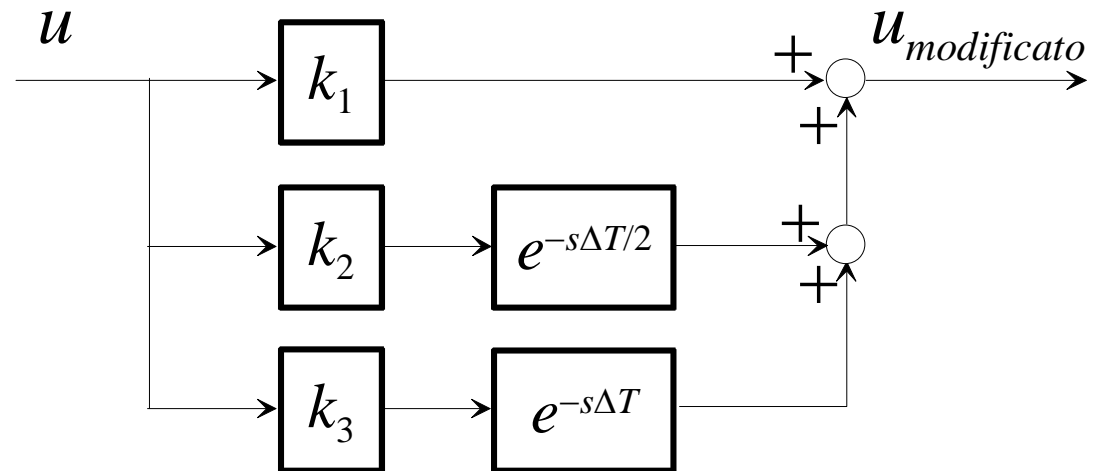
Input shaping: il metodo

Facendo la convoluzione dell'ingresso originario u con la funzione h si ottiene un segnale y privo di oscillazioni a partire dall'istante ΔT .

D'altra parte risulta:

$$Y(s) = L[h(t) * u(t)] = H(s)U(s) = G(s)W(s)U(s) = G(s)(k_1 + k_2 e^{-s\Delta T/2} + k_3 e^{-s\Delta T})U(s)$$

Il metodo quindi consiste nel prefiltrare il segnale di ingresso con questo semplice schema a blocchi:

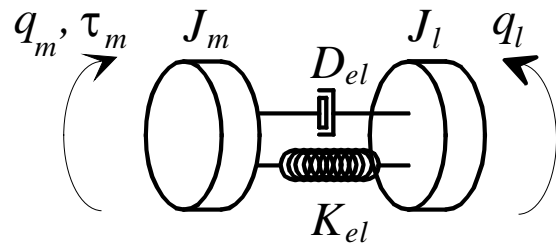


Sono state sviluppate anche versioni adattative del metodo ed estensioni al caso di più modi risonanti.

Esempio

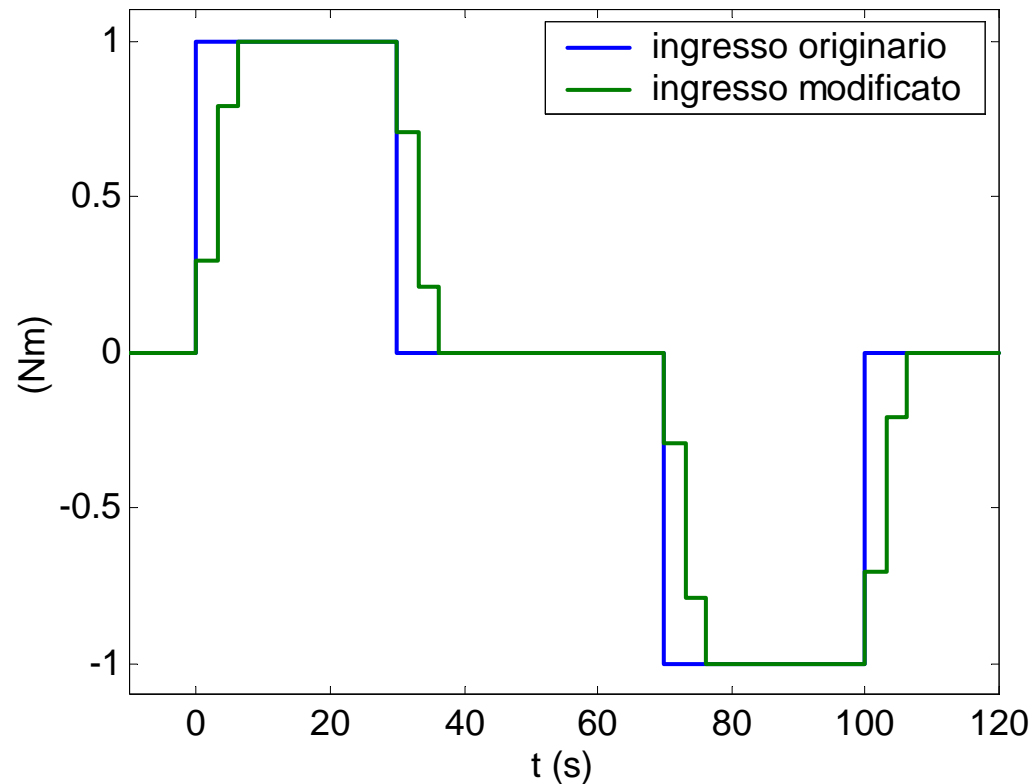


Applichiamo il metodo dell'input shaping a un servomeccanismo a due masse.



$$\omega_n = 1, \quad \zeta = 0.05$$

Supponiamo che l'ingresso di comando sia un profilo di coppia di tipo rettangolare. Calcoliamo con la metodologia vista i coefficienti k_i e i ritardi di tempo. Si ottiene l'ingresso modificato:



Esempio



Simuliamo la risposta, in termini di velocità lato carico. Prevediamo un'incertezza del 10% su ω_n e del 20% su ζ .

Nonostante l'incertezza, le oscillazioni sono quasi completamente rimosse. Si genera un ritardo, che però può essere compensato facendo partire in anticipo l'ingresso.

