



Controllo del moto e robotica industriale

Controllo centralizzato

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Controllo centralizzato



Parte I

Controllo nello spazio dei giunti

Controllo centralizzato



Si parla di controllo centralizzato ogniqualvolta il controllore, nel determinare la coppia che deve essere applicata a ciascun giunto, prende in considerazione misure e/o modelli di pertinenza anche degli altri giunti del manipolatore.

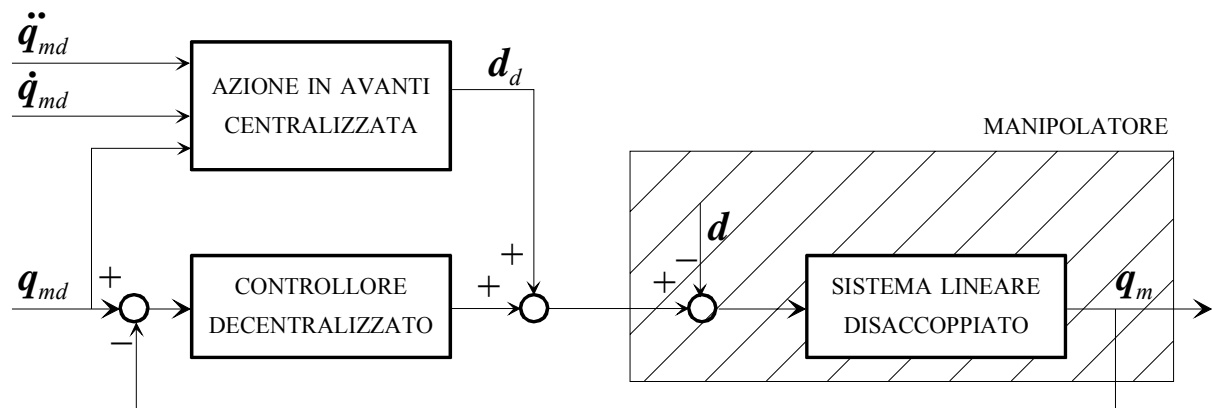
In generale un controllo centralizzato richiede la conoscenza, almeno parziale, del **modello matematico** del robot.

In assenza dell'effetto disaccoppiante indotto da rapporti di riduzione elevati (come per esempio nel caso di adozione di motori a presa diretta), l'uso di una strategia di controllo centralizzato può rivelarsi necessaria.

Compensazione in avanti a coppia precalcolata



In questo schema, il controllore decentralizzato in anello chiuso viene affiancato da un controllore che opera **in anello aperto**, calcolando le coppie di disturbo sulla base del riferimento di posizione, velocità ed accelerazione:



$$d_d = N^{-1} \Delta B(q_d) N^{-1} \ddot{q}_{md} + N^{-1} C(q_d, \dot{q}_d) N^{-1} \dot{q}_{md} + N^{-1} g(q_d)$$

- La compensazione delle non linearità può essere solo parziale (per esempio solo i termini gravitazionali ed i termini diagonali della matrice di inerzia)
- I termini di compensazione possono essere calcolati anche fuori linea, nel caso di traiettorie ripetute più volte.

PD con compensazione di gravità



Si consideri un manipolatore di equazioni:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

Si supponga assegnata una postura di equilibrio *costante* \mathbf{q}_d . Ci proponiamo di trovare una legge di controllo che garantisca la stabilità asintotica globale dello stato di equilibrio, utilizzando il metodo di Lyapunov.

Lo stato del sistema sia:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$$

Come funzione candidata di Lyapunov prendiamo:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}$$

Scegliendo \mathbf{K}_P simmetrica definita positiva, anche la funzione V è definita positiva.

PD con compensazione di gravità



Deriviamo la funzione V , tenendo conto che \mathbf{q}_d è costante ed utilizzando il modello dinamico:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}})\end{aligned}$$

Il primo termine è nullo in virtù di una proprietà del modello dinamico del manipolatore già dimostrata (antisimmetria della matrice $\dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$).

Si consideri ora la seguente scelta per la legge di controllo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}$$

con \mathbf{K}_D simmetrica definita positiva. Si ottiene:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} \leq 0$$

Pertanto la derivata di V è semidefinita negativa.

PD con compensazione di gravità



Per concludere circa la stabilità dello stato di equilibrio, occorre valutare le traiettorie del sistema quando $\dot{V}=0$. In anello chiuso si ha:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P \tilde{q} - K_D \dot{q}$$

Si osservi che quando $\dot{V}=0$ risulta $\dot{q} \equiv 0$, $\ddot{q} \equiv 0$, per cui l'unica traiettoria compatibile con le equazioni del sistema è caratterizzata da:

$$K_P \tilde{q} = 0$$

ovvero:

$$\tilde{q} = 0$$

Questo è sufficiente per dimostrare che lo stato di equilibrio caratterizzato da

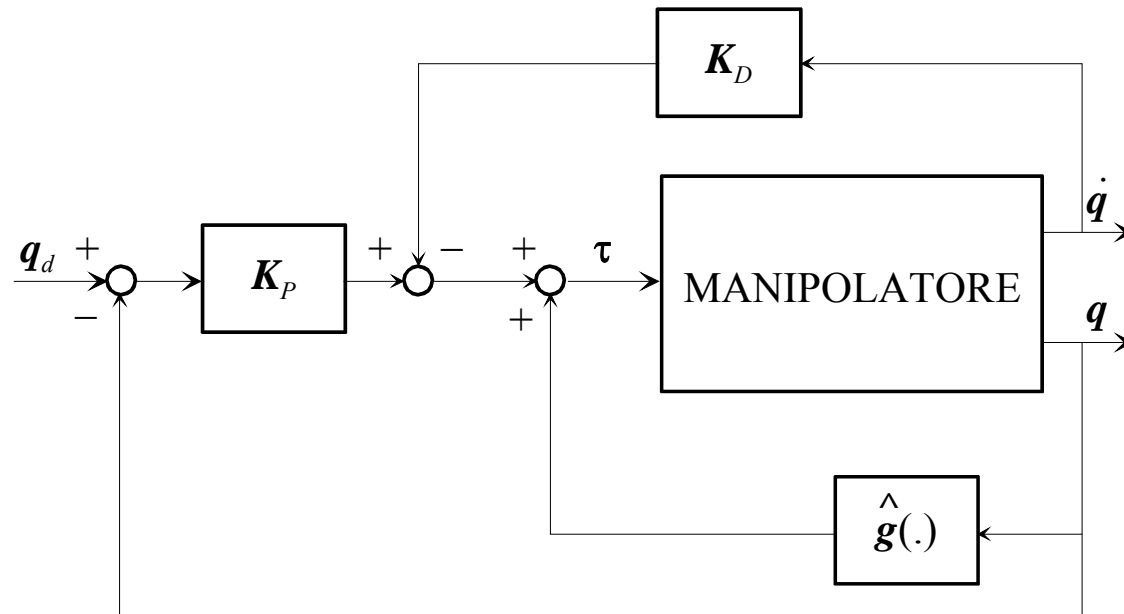
$$\tilde{q} = 0, \quad \dot{q} = 0$$

(robot fermo con errore di posizione nullo) è globalmente asintoticamente stabile.



PD con compensazione di gravità

La legge di controllo ricavata con il metodo di Lyapunov si lascia interpretare come un controllo PD nello spazio dei giunti cui si aggiunge un termine di compensazione degli effetti gravitazionali.



K_P e K_D diagonali

q_d costante

Se la compensazione dei termini gravitazionali non è perfetta le conclusioni tratte dall'analisi teorica precedentemente condotta perdono di validità (compreso il fatto che a regime l'errore sia nullo).

Controllo a dinamica inversa



Si consideri nuovamente il modello dinamico del manipolatore:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}$$

dove si sono concentrati i termini centrifughi, di Coriolis e gravitazionali in \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

Ipotizzando una conoscenza perfetta del modello dinamico, possiamo prendere in considerazione la legge di controllo (a **dinamica inversa**):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Poiché la matrice \mathbf{B} è di rango n e quindi invertibile per qualunque configurazione, l'applicazione della legge di controllo sopra riportata comporta:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

La dinamica del sistema è stata resa lineare, completamente disaccoppiata e costituita da n doppi integratori.

Controllo a dinamica inversa



Il sistema disaccoppiato:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

Può essere agevolmente controllato per mezzo di un controllore PD decentralizzato, cui si può aggiungere un'azione di anticipo di accelerazione:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}_d$$

Si ottiene la seguente equazione in anello chiuso:

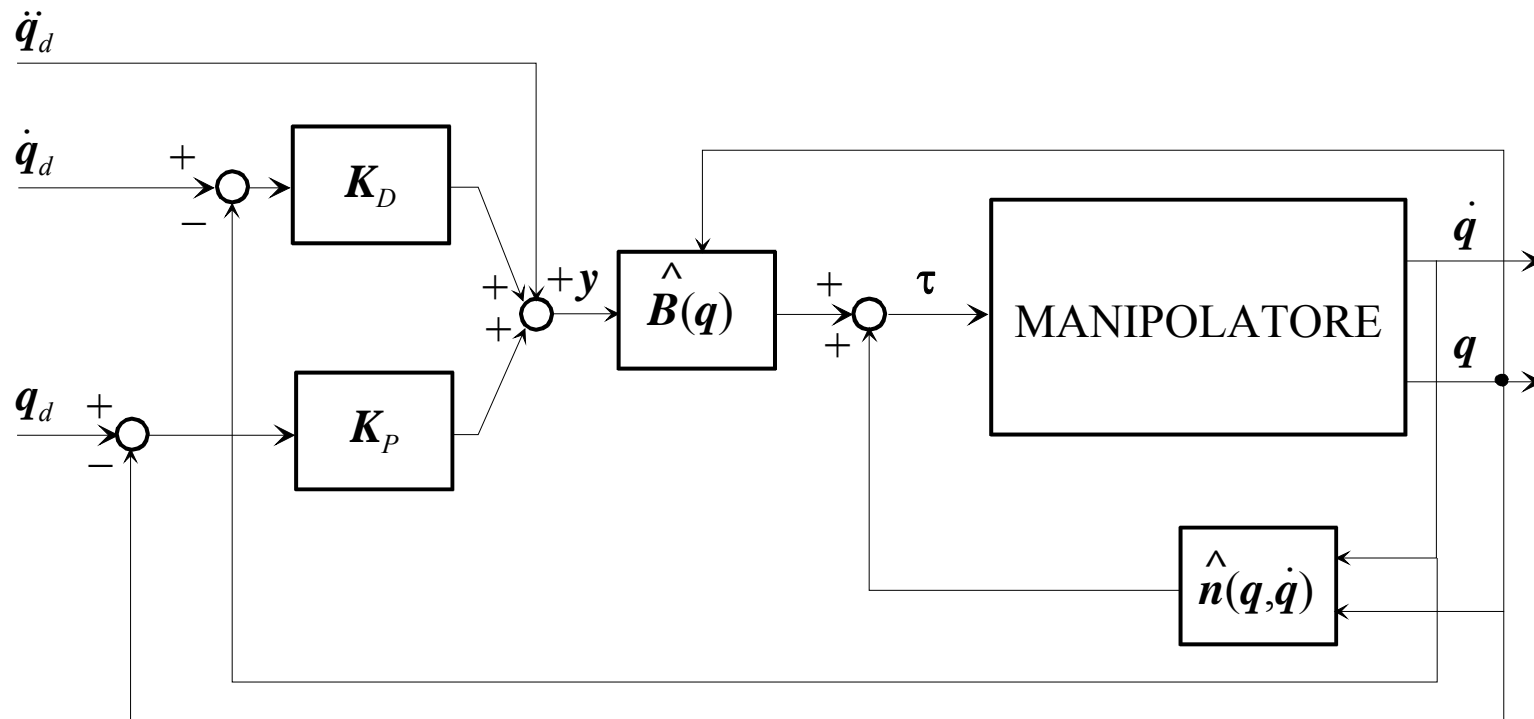
$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Pertanto l'errore è governato da una dinamica del second'ordine che può essere arbitrariamente assegnata, su ciascun giunto, scegliendo opportunamente gli elementi delle matrici diagonali \mathbf{K}_P e \mathbf{K}_D .

Controllo a dinamica inversa



Lo schema di controllo a dinamica inversa si può rappresentare con il seguente schema a blocchi:



- I termini di compensazione devono essere calcolati in linea, con tempi di campionamento ridotti ($\leq 1 \text{ ms}$).
- Il metodo prevede una cancellazione perfetta di tutti i termini del modello dinamico, il che può essere difficile da realizzare in pratica.

Controllo robusto



In uno scenario più realistico si può assumere che la compensazione del modello dinamico del manipolatore sia *imperfetta*. Il controllo a dinamica inversa si può allora esprimere come:

$$\tau = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

per cui:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Esprimiamo l'*incertezza* di modello nei seguenti termini:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}$$

Poiché la matrice \mathbf{B} è invertibile, si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} + (\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{I})\mathbf{y} + \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}$$

con:

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}})\mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}$$

Controllo robusto



Adottando la stessa legge di controllo per y del caso ideale:

$$y = K_P \tilde{q} + K_D \dot{\tilde{q}} + \ddot{q}_d$$

si ottiene che la dinamica dell'errore è retta dall'equazione:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = \eta$$

per cui il sistema è ancora non lineare ed accoppiato.

Occorrerà allora affiancare al controllo lineare di tipo PD un **termine aggiuntivo non lineare** dipendente dall'errore, concepito per conferire robustezza al progetto. Questo termine verrà progettato sulla base del metodo di Lyapunov.

Controllo robusto



Si osservi che dalla relazione:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}$$

discende l'espressione della derivata seconda dell'errore:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}$$

Definendo lo stato del sistema come:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$$

si ottiene l'equazione differenziale matriciale del primo ordine:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta})$$

dove:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n \times n}$$

Il sistema è non lineare e tempo-variante.

Controllo robusto



Nel seguito faremo ricorso ai concetti di **norma** di un vettore e di una matrice. Dato un vettore \mathbf{x} definiamo la sua norma (Euclidea) come:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

Consideriamo ora una matrice \mathbf{A} , genericamente rettangolare. Definiamo norma di \mathbf{A} , indotta dalla definizione di norma del vettore, la quantità:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

Si può dimostrare che la norma della matrice coincide con il massimo valor singolare della matrice stessa, ossia:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

Controllo robusto



Stimiamo il campo di variabilità dell'incertezza:

$$a) \quad \sup_{t \geq 0} \|\ddot{\mathbf{q}}_d\| < Q_M < \infty \quad \forall \ddot{\mathbf{q}}_d$$

$$b) \quad \left\| \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \right\| \leq \alpha \leq 1 \quad \forall \mathbf{q}$$

$$c) \quad \|\tilde{\mathbf{n}}\| \leq \Phi(\|\xi\|) \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$$

L'ipotesi *a*) deriva dal fatto che la pianificazione della traiettoria garantisce limitatezza dell'accelerazione.

L'ipotesi *b*) è consistente con il fatto che la matrice \mathbf{B} (e quindi anche \mathbf{B}^{-1}) è limitata inferiormente e superiormente. Pertanto risulta:

$$0 < B_m \leq \left\| \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \right\| \leq B_M \leq \infty, \quad \forall \mathbf{q}$$

Posto quindi, per esempio:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{2}{B_M + B_m} \mathbf{I} \quad \text{si ottiene:} \quad \left\| \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{I} \right\| \leq \frac{B_M - B_m}{B_M + B_m} = \alpha < 1$$

L'ipotesi *c*) concerne i termini centrifughi, di Coriolis e gravitazionali. Si può assumere per Φ una funzione quadratica nella norma dello stato:

$$\Phi(\|\xi\|) = \alpha_0 + \alpha_1 \|\xi\| + \alpha_2 \|\xi\|^2$$

Controllo robusto



Consideriamo ora come legge di controllo la seguente espressione:

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{w}$$

dove il nuovo termine \mathbf{w} verrà progettato in modo da contrastare l'incertezza.

Posto $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_P \ \mathbf{K}_D]$, si ricava:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w})$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} - \mathbf{DK}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix}$$

è la matrice, con tutti autovalori a parte reale negativa, della dinamica nominale in anello chiuso. Se $\boldsymbol{\eta} = 0$, basta scegliere $\mathbf{w} = 0$ per ricondursi al caso nominale.

Per la determinazione del vettore \mathbf{w} procediamo con il metodo di Lyapunov.

Controllo robusto



Scegliamo come funzione di Lyapunov candidata:

$$V(\xi) = \xi^T Q \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0$$

con Q matrice simmetrica e definita positiva. Derivando lungo le traiettorie del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\xi}^T Q \xi + \xi^T Q \dot{\xi} = \\ &= \xi^T (\tilde{H}^T Q + Q \tilde{H}) \xi + 2 \xi^T Q D (\eta - w) = \\ &= -\xi^T P \xi + 2z^T (\eta - w) \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$z = D^T Q \xi$$

e si è sfruttato il fatto che, avendo \tilde{H} tutti autovalori a parte reale negativa, comunque si scelga la matrice P definita positiva, l'equazione:

$$\tilde{H}^T Q + Q \tilde{H} = -P$$

ha un'unica soluzione Q definita positiva.

Controllo robusto



Adottiamo per w l'espressione:

$$w = \rho(\|\xi\|) \frac{z}{\|z\|}, \quad \rho > 0$$

ρ è una funzione della norma dello stato a valori positivi, da determinare.

Con questa scelta di w si ottiene:

$$\begin{aligned} z^T (\eta - w) &= z^T \eta - \rho(\|\xi\|) \frac{z^T z}{\|z\|} \\ &\leq \|z\| \|\eta\| - \rho(\|\xi\|) \|z\| = \\ &= \|z\| (\|\eta\| - \rho(\|\xi\|)) \end{aligned}$$

Se quindi si fa in modo che:

$$\rho(\|\xi\|) > \|\eta\| \quad \forall q, \dot{q}, \ddot{q}_d$$

si ottiene che questo termine, e quindi anche \dot{V} , è negativo.

Controllo robusto



Ricordiamo che:

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}})\mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{w}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\eta}\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\|(\|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \|\mathbf{K}\|\|\boldsymbol{\xi}\| + \|\mathbf{w}\|) + \|\mathbf{B}^{-1}\|\|\tilde{\mathbf{n}}\| \\ &\leq \alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\boldsymbol{\xi}\| + \alpha\rho(\|\boldsymbol{\xi}\|) + B_M\Phi(\|\boldsymbol{\xi}\|) \\ &< \rho(\|\boldsymbol{\xi}\|)\end{aligned}$$

Potremo quindi scegliere la funzione ρ in modo tale che:

$$\rho(\|\boldsymbol{\xi}\|) \geq \frac{1}{1-\alpha}(\alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\boldsymbol{\xi}\| + B_M\Phi(\|\boldsymbol{\xi}\|))$$

Controllo robusto



Si osservi che poiché:

$$\Phi(\|\xi\|) = \alpha_0 + \alpha_1 \|\xi\| + \alpha_2 \|\xi\|^2$$

per soddisfare la disuguaglianza precedente sarà sufficiente scegliere:

$$\rho(\|\xi\|) = \beta_0 + \beta_1 \|\xi\| + \beta_2 \|\xi\|^2$$

con:

$$\beta_0 \geq \frac{\alpha Q_M + \alpha_0 B_M}{1 - \alpha}, \quad \beta_1 \geq \frac{\alpha \|\mathbf{K}\| + \alpha_1 B_M}{1 - \alpha}, \quad \beta_2 \geq \frac{\alpha_2 B_M}{1 - \alpha}$$

In questo modo:

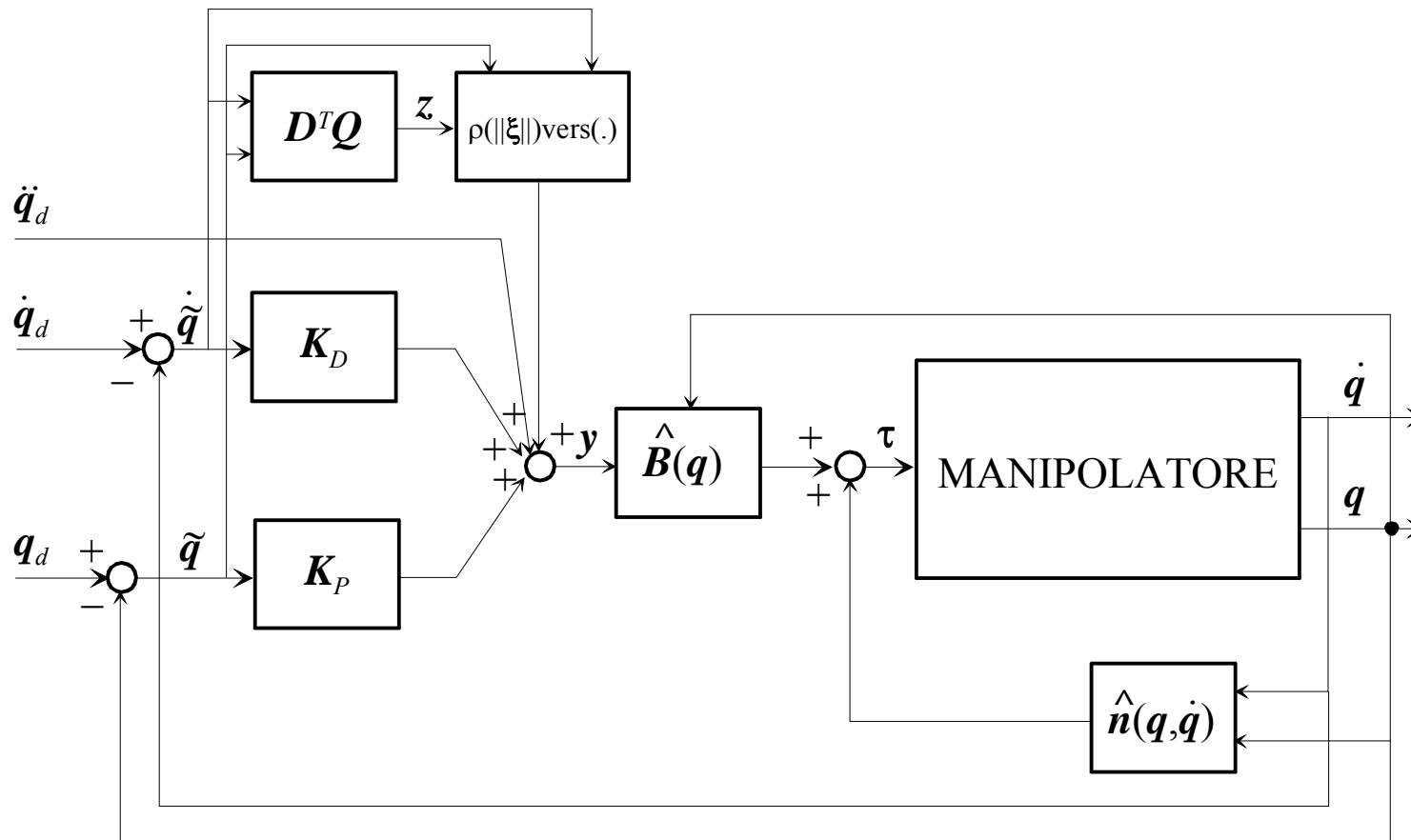
$$\dot{V} = -\xi^T \mathbf{P} \xi + 2z^T \left(\eta - \rho(\|\xi\|) \frac{z}{\|z\|} \right) < 0, \quad \forall \xi \neq \mathbf{0}$$

ovvero $\xi = \mathbf{0}$ è uno stato di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Controllo robusto



Lo schema di controllo risultante è il seguente:



Controllo robusto



La legge di controllo è quindi composta da tre contributi:

1. $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ compensa in modo approssimato i termini non lineari
2. $\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ stabilizza il sistema dinamico nominale nell'errore
3. $\mathbf{w} = \rho(\|\xi\|) \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$ conferisce robustezza, contrastando l'incertezza

Per evitare commutazioni ad alta frequenza della variabile di controllo (cosiddetto *chattering*), il terzo termine può essere approssimato come segue:

$$\mathbf{w} = \begin{cases} \rho(\|\xi\|) \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} & \text{per } \|\mathbf{z}\| \geq \varepsilon \\ \frac{\rho(\|\xi\|)}{\varepsilon} \mathbf{z} & \text{per } \|\mathbf{z}\| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{dove } \varepsilon \text{ è un opportuno valore di soglia}$$

Controllo adattativo



Un'alternativa al controllo robusto, di interesse in particolare quando la struttura del modello dinamico è ragionevolmente nota, ma c'è incertezza sui parametri del modello stesso, è costituita dal controllo adattativo.

Il controllo adattativo si basa sulla proprietà di linearità del modello dinamico del manipolatore nei parametri dinamici:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = \tau$$

dove π è un opportuno vettore costante di parametri.

Apparentemente una tecnica di controllo basata sulla precedente relazione di linearità deve far uso di misure o stime di accelerazione ai giunti, per il calcolo del regressore Y , il che naturalmente costituirebbe una notevole limitazione al suo utilizzo pratico.

La tecnica che verrà presentata nel seguito, dovuta a Slotine e Li, risolve il problema senza la necessità di informazioni sulle accelerazioni e senza dover invertire la matrice di inerzia del manipolatore.

Controllo adattativo



Si consideri dapprima la seguente legge di controllo, in cui si suppone noto senza incertezza il modello dinamico:

$$\tau = B(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) + K_D \sigma$$

con K_D matrice definita positiva. Si ponga:

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda \tilde{q} \quad \ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}$$

con Λ definita positiva (si può prendere diagonale).

Se ora poniamo:

$$\sigma = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}$$

l'azione $K_D \sigma$ equivale ad un'azione PD sull'errore.

Complessivamente l'adozione della legge di controllo comporta:

$$B(q)\dot{\sigma} + C(q, \dot{q})\sigma + K_D \sigma = 0$$

Controllo adattativo



Si assuma come funzione di Lyapunov candidata la seguente espressione:

$$V(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$$

con \mathbf{M} matrice definita positiva. Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T [-2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{K}_D] \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \\ &= -\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_D \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

in cui si è sfruttata la proprietà di antisimmetria della matrice $\dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$.

Ponendo $\mathbf{M} = 2\Lambda \mathbf{K}_D$ si ottiene:

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_D \Lambda \tilde{\mathbf{q}} < 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \neq \mathbf{0}$$

Lo stato $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \boldsymbol{\sigma}^T]^T = \mathbf{0}$ risulta quindi equilibrio *globalmente asintoticamente stabile*.

Controllo adattativo



Consideriamo ora una legge di controllo basata su stime dei parametri:

$$\begin{aligned}\tau &= \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{g}(q) + K_D\sigma = \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\pi} + K_D\sigma\end{aligned}$$

Si osservi che Y non dipende dalle accelerazioni dei giunti.

Sostituendo nel modello dinamico:

$$\begin{aligned}B(q)\ddot{\sigma} + C(q, \dot{q})\dot{\sigma} + K_D\sigma &= -\tilde{B}(q)\ddot{q}_r - \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r - \tilde{g}(q) = \\ &= -Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi}\end{aligned}$$

dove:

$$\tilde{B} = \hat{B} - B \quad \tilde{C} = \hat{C} - C \quad \tilde{g} = \hat{g} - g \quad \tilde{\pi} = \hat{\pi} - \pi$$



Controllo adattativo

Modifichiamo ora la funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\pi}}^T \mathbf{K}_\pi \tilde{\boldsymbol{\pi}} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{\pi}} \neq \mathbf{0}$$

con \mathbf{K}_π matrice definita positiva. Derivando:

$$\dot{V} = \underbrace{-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \tilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_D \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}}_{\text{dal caso precedente}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T \left(\mathbf{K}_\pi \dot{\tilde{\boldsymbol{\pi}}} - \mathbf{Y}^T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r) \boldsymbol{\sigma} \right)}_{\text{dovuto all'incertezza}}$$

Se si adotta la **legge di adattamento** dei parametri:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{K}_\pi^{-1} \mathbf{Y}^T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r) \boldsymbol{\sigma}$$

risulta, tenendo conto che $\boldsymbol{\pi}$ è costante:

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \tilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_D \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

Pertanto $\tilde{\boldsymbol{q}}$ e $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$ convergono asintoticamente (e globalmente) a zero.

Controllo adattativo



Dalla relazione:

$$B(q)\dot{\sigma} + C(q, \dot{q})\sigma + K_D\sigma = -Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi}$$

si ottiene quindi che la quantità:

$$Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\hat{\pi} - \pi) \rightarrow \mathbf{0}$$

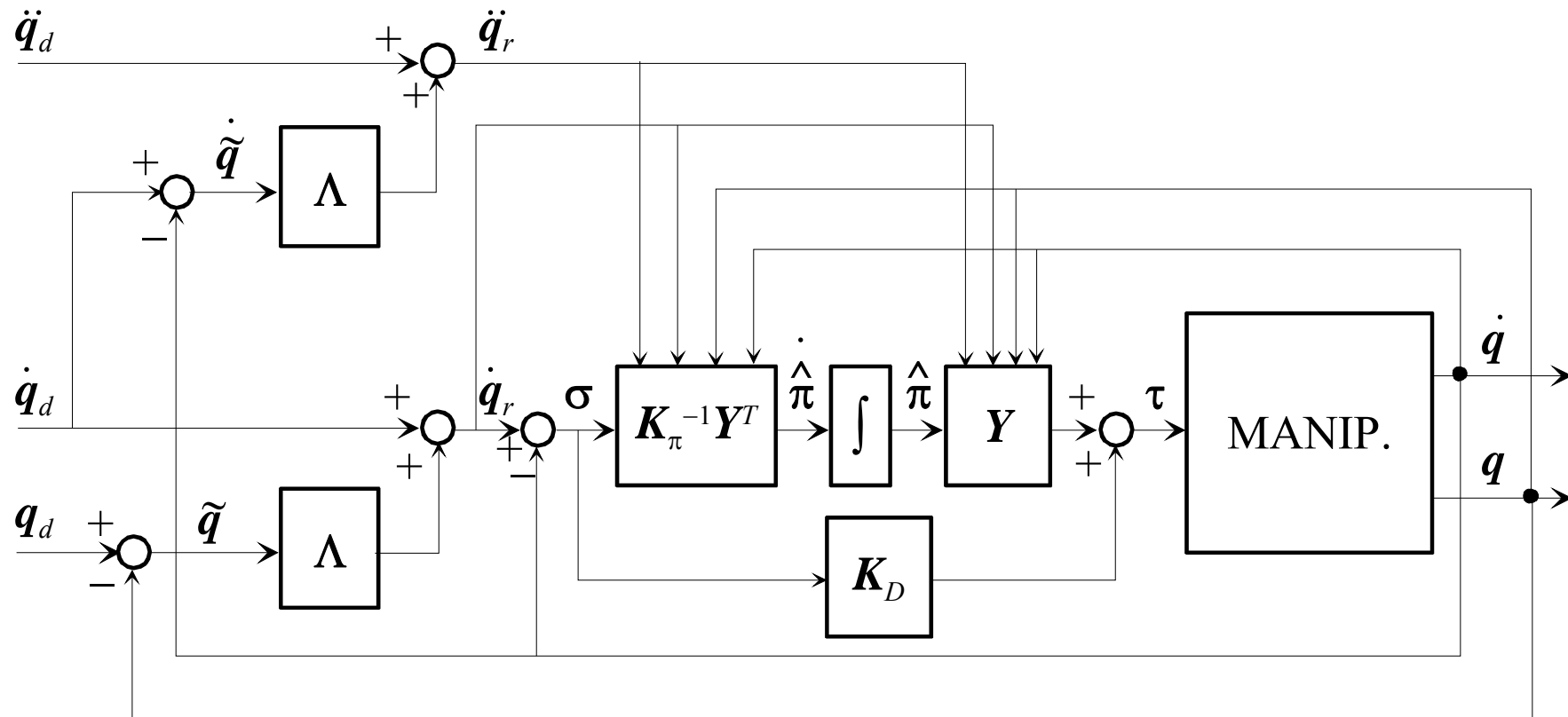
Questo non implica necessariamente che $\hat{\pi}$ tenda a π , la qual cosa dipende dalla struttura della matrice Y .

Si tratta in effetti di un controllo adattativo *diretto*, mirato all'individuazione di una legge di controllo efficiente, piuttosto che alla identificazione dei parametri del modello.

Controllo adattativo



Lo schema di controllo risultante è il seguente:



Controllo adattativo



Nella legge di controllo si individuano quindi tre elementi:

1. $Y\hat{\pi}$ riconducibile ad un'azione a dinamica inversa approssimata
2. $K_D\sigma$ azione stabilizzante di tipo PD sull'errore
3. Il vettore di stima dei parametri π viene aggiornato secondo una tecnica a gradiente. La matrice K_π determina la velocità di convergenza delle stime.

Rispetto allo schema di controllo robusto si avranno prestazioni peggiori in presenza di errori di modello o di rappresentazione parziale del modello dinamico. D'altra parte si hanno azioni di controllo molto più regolari di quelle del controllore robusto, caratterizzate da commutazioni ad alta frequenza potenzialmente dannose.

Controllo centralizzato



Parte II

Controllo nello spazio operativo



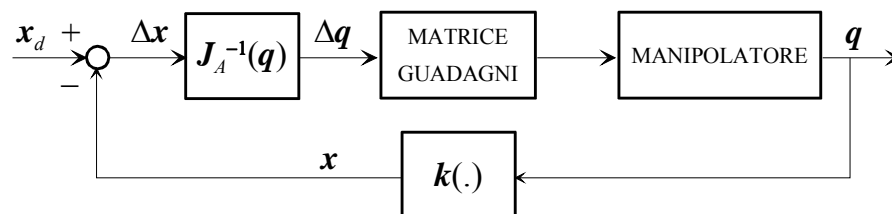
Controllo nello spazio operativo

Per controllo nello spazio operativo si intende una strategia di controllo in cui l'errore viene formato **direttamente sulle coordinate dello spazio operativo**.

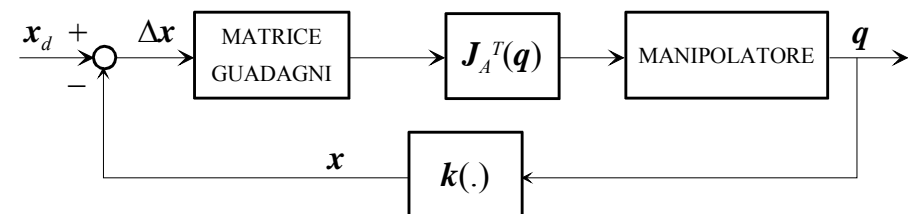
La traiettoria, generata nello spazio operativo, non è quindi soggetta all'inversione cinematica. D'altra parte le "misure" delle variabili nello spazio operativo sono in realtà di norma il risultato del calcolo della cinematica diretta sulle uniche misure disponibili, ovvero sulle misure delle coordinate di giunto.

Schemi di principio:

controllo con *inversa* dello Jacobiano



controllo con *trasposta* dello Jacobiano



PD con compensazione di gravità



In analogia a quanto visto nello spazio dei giunti, si supponga assegnata una posizione di equilibrio *costante* \mathbf{x}_d . Ci proponiamo anche in questo caso di trovare una legge di controllo che garantisca la stabilità asintotica globale dello stato di equilibrio, utilizzando il metodo di Lyapunov.

Definiamo l'errore nello spazio operativo:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

Come funzione candidata di Lyapunov prendiamo:

$$V(\tilde{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}}$$

Scegliendo \mathbf{K}_P simmetrica definita positiva, anche la funzione V è definita positiva.

PD con compensazione di gravità



Deriviamo la funzione V :

$$\dot{V} = \dot{q}^T \mathbf{B}(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{\mathbf{B}}(q) \dot{q} + \tilde{x}^T \mathbf{K}_P \tilde{x}$$

Poiché x_d è costante si ha:

$$\dot{\tilde{x}} = -\mathbf{J}_A(q) \dot{q}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T \mathbf{B}(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{\mathbf{B}}(q) \dot{q} - \dot{q}^T \mathbf{J}_A^T(q) \mathbf{K}_P \tilde{x} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{\mathbf{B}}(q) - 2\mathbf{C}(q, \dot{q})) \dot{q} + \dot{q}^T (\tau - \mathbf{g}(q) - \mathbf{J}_A^T(q) \mathbf{K}_P \tilde{x}) \end{aligned}$$

Il primo termine è nullo in virtù dell'antisimmetria della matrice $\dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$.

PD con compensazione di gravità



Si consideri ora la seguente scelta per la legge di controllo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_D\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

con \mathbf{K}_D simmetrica definita positiva. Si ottiene:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_D\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \leq 0$$

Pertanto la derivata di V è semidefinita negativa. Con un ragionamento analogo a quello seguito nello spazio dei giunti, si conclude che le traiettorie compatibili con $\dot{V} = 0$ sono caratterizzate da:

$$\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Se lo Jacobiano è di rango pieno, si ottiene quindi:

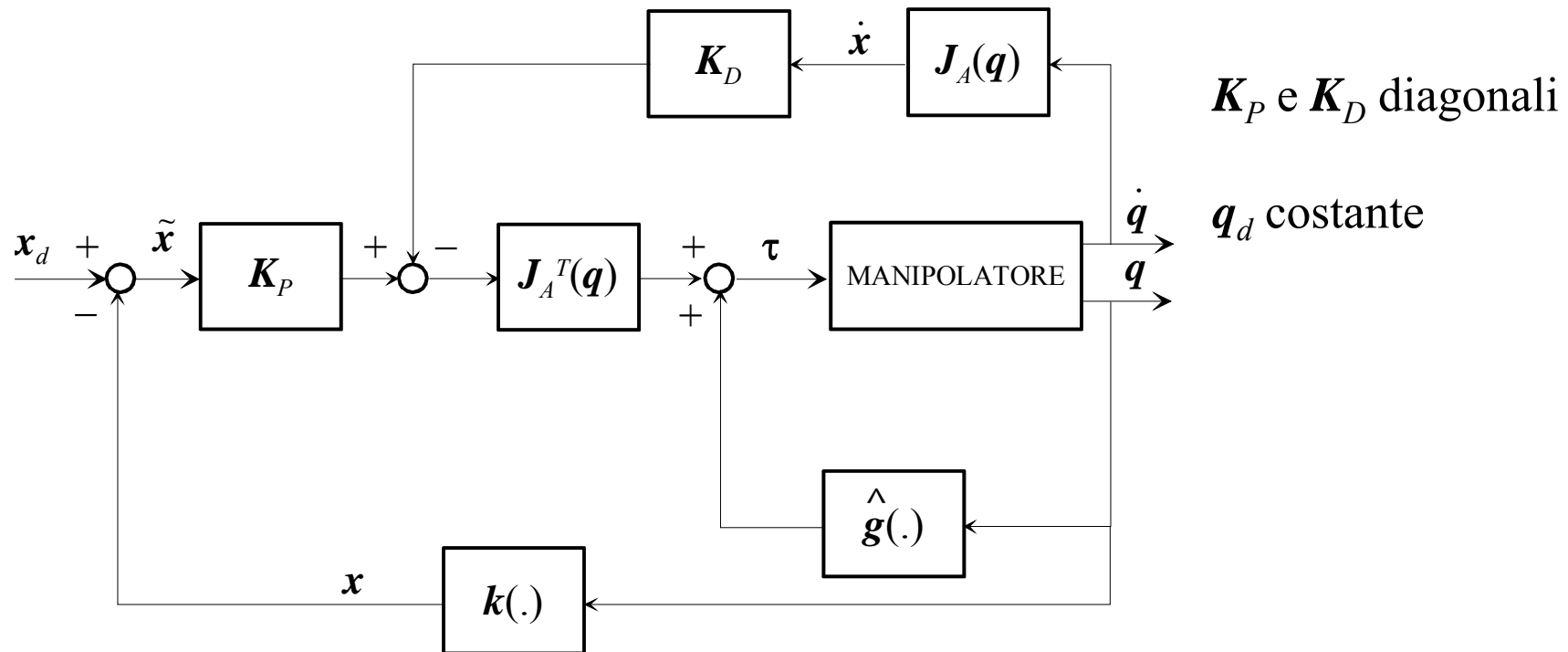
$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Pertanto lo stato di equilibrio caratterizzato da errore nullo (nello spazio operativo) è **globalmente asintoticamente stabile**.



PD con compensazione di gravità

La legge di controllo ricavata con il metodo di Lyapunov si lascia interpretare come un controllo PD nello spazio operativo, cui si aggiunge un termine di compensazione degli effetti gravitazionali nello spazio dei giunti.



Controllo a dinamica inversa



Si consideri nuovamente il modello dinamico del manipolatore:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}$$

dove si sono concentrati i termini centrifughi, di Coriolis e gravitazionali in \mathbf{n} e si ricordi che la legge di controllo a dinamica inversa:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

conduce, nell'ipotesi di conoscenza perfetta del modello, al sistema di doppi integratori:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

Si tratta a questo punto di determinare il nuovo ingresso \mathbf{y} in modo da consentire l'inseguimento di una traiettoria $\mathbf{x}_d(t)$, specificata nello spazio operativo.

Si osservi che derivando la relazione cinematica differenziale si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

Controllo a dinamica inversa



La precedente relazione suggerisce la seguente scelta per y :

$$y = J_A^{-1}(q) \left(\ddot{x}_d + K_D \dot{\tilde{x}} + K_P \tilde{x} - \dot{J}_A(q, \dot{q}) \dot{q} \right)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\ddot{\tilde{x}} + K_D \dot{\tilde{x}} + K_P \tilde{x} = 0$$

Pertanto l'errore nello spazio operativo è governato da una dinamica del second'ordine che può essere arbitrariamente assegnata, su ciascun giunto, scegliendo opportunamente gli elementi delle matrici diagonali K_P e K_D .

Si è ottenuto quindi un risultato del tutto analogo a quello ottenuto nello spazio dei giunti.

Si osservi che il metodo necessita del calcolo dell'inversa della matrice Jacobiana.



Controllo a dinamica inversa

Lo schema di controllo a dinamica inversa nello spazio operativo si può rappresentare con il seguente schema a blocchi:

