



Controllo del moto e robotica industriale

Dinamica del manipolatore

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Energia cinetica



Consideriamo un punto materiale di massa m , la cui posizione sia descritta dal vettore \mathbf{p} rispetto ad una terna xyz .

Definiamo **energia cinetica** del punto la quantità:

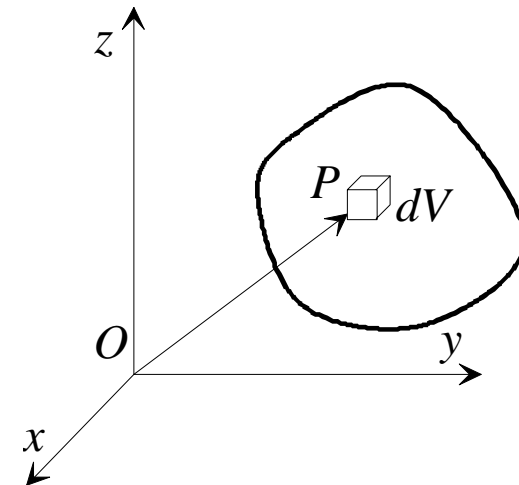
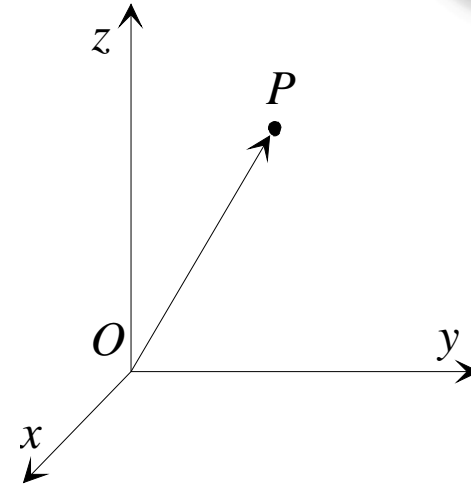
$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}}$$

Analogamente, per un sistema di punti materiali:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i$$

Consideriamo ora un **corpo rigido**, di massa m , volume V e densità ρ . L'energia cinetica è definita come:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} \rho dV$$



Energia potenziale



Un sistema di forze posizionali (cioè dipendenti solo dalle posizioni dei punti d'applicazione) si dice **conservativo** se il lavoro compiuto da ciascuna forza non dipende dalla traiettoria seguita dal punto di applicazione ma solo dalla sua posizione iniziale e finale.

In questo caso il lavoro elementare coincide con il differenziale, cambiato di segno, di una funzione che prende il nome di **energia potenziale**:

$$dW = -dU$$

Un esempio di sistema di forze conservativo è la **forza gravitazionale**.

Per un **punto materiale** avremo l'energia potenziale:

$$U = -m\mathbf{g}_0^T \mathbf{p}$$

dove \mathbf{g}_0 è il vettore accelerazione di gravità.

Per un **corpo rigido**:

$$U = -\int_V \mathbf{g}_0^T \mathbf{p} \rho dV = -m\mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_l$$

con \mathbf{p}_l posizione del baricentro.

Sistemi di corpi



Si consideri ora un sistema di r corpi rigidi (quali, per esempio, i bracci di un robot). Se tutti i corpi sono liberi di muoversi nello spazio, il moto del sistema è ad ogni istante descrivibile per mezzo di $6r$ coordinate \mathbf{x} .

Supponiamo ora che esistano delle limitazioni al moto dei corpi che costituiscono il sistema (quali quelle indotte dalla connessione di un braccio con il successivo tramite un giunto, che elimina cinque su sei gradi di mobilità relativi tra i due bracci).

Diciamo che sul moto dei corpi esiste un **vincolo**, che esprimeremo con la relazione:

$$h(\mathbf{x}) = 0$$

Un vincolo rappresentato da un'equazione di questo tipo si dice **olonomo** (perché dipende solo dalle coordinate di posizione e non dalle velocità) e **stazionario** (perché non dipende dal tempo).

Coordinate libere



$$h(x) = 0$$

Se il vincolo h è costituito da s componenti scalari e tutte sono continue e differenziabili con continuità, è possibile, per mezzo del vincolo, eliminare s coordinate dalle equazioni del sistema.

Le rimanenti $n = 6r - s$ coordinate prendono il nome di **coordinate libere**, o **lagrangiane**, o **generalizzate**, e n è il numero di **gradi di libertà** del sistema meccanico.

Per esempio, in un robot a 6 giunti, delle 36 coordinate originarie, se ne eliminano 30 in virtù dei vincoli imposti dai 6 giunti e ne rimangono 6 che costituiscono le coordinate lagrangiane: tipicamente si scelgono le coordinate di giunto (l'angolo ϑ o la distanza d , rispettivamente per giunto rotazionale o prismatico).

Equazioni di Lagrange



Sia dato quindi un sistema di corpi rigidi, le posizioni ed orientamenti dei quali si possano esprimere per mezzo di n coordinate generalizzate q_i .

Definiamo **lagrangiana** del sistema meccanico la quantità:

$$L = T - U$$

essendo T e U rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Siano poi ξ_i le forze generalizzate associate alle coordinate generalizzate q_i . Il lavoro elementare compiuto dalle forze agenti sul sistema si può esprimere come:

$$dW = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i$$

Si può dimostrare che la dinamica del sistema di corpi è retta dalle seguenti **equazioni di Lagrange**:

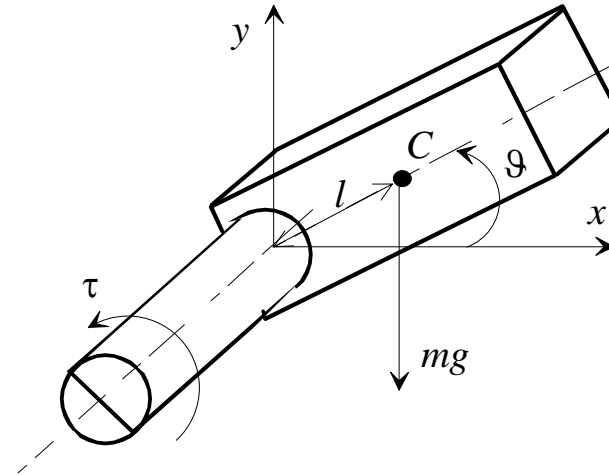
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Esempio



Consideriamo un sistema costituito da un motore rigidamente connesso ad un carico soggetto a forza gravitazionale.

Siano I_m e I i momenti di inerzia di motore e carico rispetto all'asse del motore, m la massa del carico, l la distanza del baricentro del carico dall'asse del motore.



Energia cinetica del motore

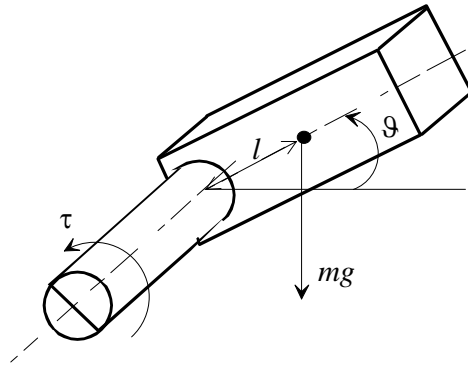
$$T_m = \frac{1}{2} I_m \dot{\vartheta}^2$$

Energia cinetica del carico

$$T_c = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2$$



Esempio



Energia potenziale gravitazionale:

$$U = -m\mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_l = -m \begin{bmatrix} 0 & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cos \vartheta \\ l \sin \vartheta \end{bmatrix} = mgl \sin \vartheta$$

Lagrangiana:
$$L = T_m + T_c - U = \frac{1}{2}(I_m + I)\dot{\vartheta}^2 - mgl \sin \vartheta$$

Equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \tau \Rightarrow \frac{d}{dt} \left((I + I_m) \dot{\vartheta} \right) + mgl \cos \vartheta = \tau$$

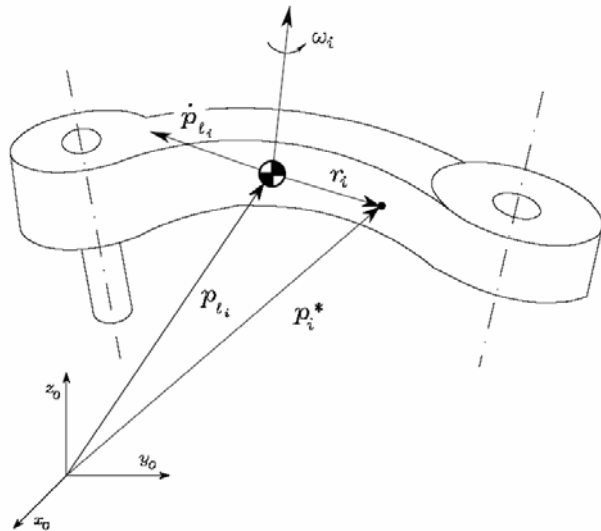
Pertanto:

$$(I + I_m) \ddot{\vartheta} + mgl \cos \vartheta = \tau$$

L'equazione si lascia facilmente interpretare come l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse di rotazione.



Energia cinetica di un braccio



Il contributo di energia cinetica di un singolo braccio di un manipolatore si può calcolare per mezzo dell'integrale:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \dot{p}_i^{*T} \dot{p}_i^* \rho dV$$

p_i^* punto generico sul link

Posizione del baricentro:
$$p_{l_i} = \frac{1}{m_i} \int_{V_i} p_i^* \rho dV$$

Velocità del generico punto:
$$\dot{p}_i^* = \dot{p}_{l_i} + \omega_i \times r_i = \dot{p}_{l_i} + S(\omega_i) r_i$$

dove:
$$S(\omega_i) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{iz} & \omega_{iy} \\ \omega_{iz} & 0 & -\omega_{ix} \\ -\omega_{iy} & \omega_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice antisimmetrica}).$$

Energia cinetica di un braccio



Contributo traslazionale:

$$\frac{1}{2} \int_{V_i} \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i} \rho dV = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i}$$

Contributo mutuo:

$$\int_{V_i} \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{r}_i \rho dV = \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \mathbf{S}(\omega_i) \int_{V_i} (\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_{l_i}) \rho dV = 0$$

Contributo rotazionale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{S}^T(\omega_i) \mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{r}_i \rho dV &= \frac{1}{2} \omega_i^T \left(\int_{V_i} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_i) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \rho dV \right) \omega_i = \\ &= \frac{1}{2} \omega_i^T \mathbf{I}_i \omega_i \end{aligned}$$

N.B.

$$\mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{r}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \omega_i$$

Tensore di inerzia



Definiamo il tensore di inerzia:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} \int (r_{iy}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & -\int r_{ix} r_{iy} \rho dV & -\int r_{ix} r_{iz} \rho dV \\ * & \int (r_{ix}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & -\int r_{iy} r_{iz} \rho dV \\ * & * & \int (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \rho dV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ixx} & -I_{ixy} & -I_{ixz} \\ * & I_{iyy} & -I_{iyz} \\ * & * & I_{izz} \end{bmatrix}$$

(matrice simmetrica)

Il tensore di inerzia, espresso in terna base, dipende dalla configurazione del manipolatore. Se la velocità angolare è espressa rispetto ad una terna solidale al braccio i (per esempio la terna DH), ovvero:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i$$

e il tensore di inerzia rispetto a tale terna è costante. Risulta inoltre:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T$$

Somma dei contributi



Sommiamo il contributo traslazionale con quello rotazionale:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i$$

Velocità lineare:

$$\dot{\mathbf{p}}_{l_i} = \mathbf{j}_{P1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \dots + \mathbf{j}_{Pi}^{(l_i)} \dot{q}_i = \mathbf{J}_P^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{J}_P^{(l_i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P1}^{(l_i)} & \dots & \mathbf{j}_{Pi}^{(l_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Velocità angolare:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{j}_{O1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \dots + \mathbf{j}_{Oi}^{(l_i)} \dot{q}_i = \mathbf{J}_O^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{J}_O^{(l_i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{O1}^{(l_i)} & \dots & \mathbf{j}_{Oi}^{(l_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Colonne dello Jacobiano:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{Pj}^{(l_i)} \\ \mathbf{j}_{Oj}^{(l_i)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{l_i} - \mathbf{p}_{j-1}) \\ \mathbf{z}_{j-1} \end{bmatrix} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$



Matrice di inerzia

Sviluppando le velocità lineari ed angolari:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_P^{(l_i)T} \mathbf{J}_P^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(l_i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}}$$

Sommando i contributi di tutti i bracci si ottiene l'espressione dell'energia cinetica dell'intero manipolatore:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

dove:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{J}_P^{(l_i)T} \mathbf{J}_P^{(l_i)} + \mathbf{J}_O^{(l_i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(l_i)} \right)$$

è la **matrice di inerzia** del manipolatore.

simmetrica

definita positiva

dipendente da \mathbf{q}

Energia potenziale



L'energia potenziale di un braccio rigido è dovuta solo alla forza peso:

$$U_i = - \int_V \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_i^* \rho dV = - m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}$$

dove \mathbf{g}_0 è il vettore dell'accelerazione di gravità espresso in terna base.

L'energia potenziale dell'intero manipolatore è semplicemente la somma dei contributi relativi ai singoli link:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}$$

Equazioni del moto



Lagrangiana del manipolatore:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{li}(\mathbf{q})$$

Deriviamo la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{db_{ij}(\mathbf{q})}{dt} \dot{q}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \dot{q}_j \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{lj}}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}_0^T \mathbf{j}_{P_i}^{(l_j)}(\mathbf{q}) = g_i(\mathbf{q})$$

Equazioni del moto



Dalle equazioni di Lagrange otteniamo

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \xi_i \quad i = 1, \dots, n$$

dove:
$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$$

↑ termine gravitazionale dipendente solo dalla configurazione

Termini di accelerazione:

b_{ii} : momento di inerzia visto all'asse del giunto i

b_{ij} : effetto dell'accelerazione del giunto j sul giunto i

Termini quadratici in velocità:

$h_{ijj}\dot{q}_j^2$: effetto centrifugo indotto al giunto i dalla velocità del giunto j

$h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$: effetto di Coriolis indotto al giunto i dalle velocità dei giunti j e k

$$h_{iii} = 0$$

Forze non conservative



Oltre alle forze gravitazionali conservative, sul manipolatore agiscono:

- coppie di attuazione τ
- coppie di attrito viscoso $-F_v \dot{q}$
- coppie di attrito statico $-f_s(q, \dot{q})$
- coppie che equilibrano le forze di contatto $-J^T(q)h$

F_v matrice diagonale di coefficienti di attrito viscoso

$f_s(q, \dot{q})$ funzione che modella l'attrito statico al giunto

h forze e momenti al contatto

Modello dinamico completo



In termini vettoriali il modello matematico del manipolatore si esprime:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}$$

dove \mathbf{C} è un'opportuna matrice $n \times n$ i cui elementi soddisfano la relazione:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

Calcolo degli elementi di C



La scelta della matrice C non è univoca. Una possibilità è la seguente:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j\end{aligned}$$

Il generico elemento di C risulta:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

dove:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad \text{Simboli di Christoffel del primo tipo}$$

Anti-simmetria di $\dot{B}-2C$



La precedente scelta della matrice C consente di dimostrare un'importante proprietà del modello dinamico del manipolatore. Definita la matrice:

$$N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{B}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

essa risulta anti-simmetrica:

$$\mathbf{w}^T N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{w} = 0, \quad \forall \mathbf{w}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2} \dot{b}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \end{aligned}$$

Anti-simmetria di $\dot{B}-2C$



Ne consegue:

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k$$

e quindi:

$$n_{ij} = -n_{ji}$$

ovvero la matrice è anti-simmetrica.

Ponendo $w = \dot{q}$ si ottiene, in particolare:

$$\dot{q}^T N(q, \dot{q}) \dot{q} = 0$$

Principio di conservazione dell'energia



L'equazione:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = 0$$

(caso particolare della precedente) è tuttavia valida qualunque sia la scelta della matrice \mathbf{C} . Infatti, dal principio di conservazione dell'energia, la derivata dell'energia cinetica bilancia la potenza generata da tutte le forze agenti ai giunti del manipolatore:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h})$$

eseguendo la derivata a primo membro, ed utilizzando l'equazione del modello:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}) \end{aligned}$$

da cui l'equazione cercata.

Linearità nei parametri dinamici



Se si assume per la funzione che definisce l'attrito statico un'espressione semplificata:

$$f_s(q, \dot{q}) = F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$$

è possibile dimostrare che il modello dinamico del manipolatore risulta lineare rispetto ad un insieme opportuno di parametri dinamici (masse, momenti primi di inerzia, momenti di inerzia).

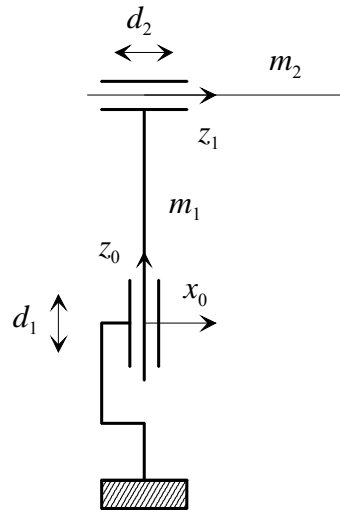
Si può in altre parole scrivere:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi$$

π : vettore di p parametri costanti

Y : matrice $n \times p$ funzione di posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti (regressore)

Manipolatore cartesiano a due bracci



Consideriamo un manipolatore cartesiano a due bracci, caratterizzati dalle masse m_1 e m_2 .

Il vettore delle coordinate generalizzate risulta:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Gli Jacobiani necessari per il calcolo della matrice di inerzia sono i seguenti:

$$\mathbf{J}_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre non ci sono contributi dovuti a velocità angolare.

Manipolatore cartesiano a due bracci



Calcolando la matrice di inerzia con la formula generale, si ottiene:

$$\mathbf{B} = m_1 \mathbf{J}_P^{(l_1)T} \mathbf{J}_P^{(l_1)} + m_2 \mathbf{J}_P^{(l_2)T} \mathbf{J}_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi che \mathbf{B} è costante. Ne consegue che $\mathbf{C}=0$, ovvero non ci sono contributi centrifughi e di Coriolis.

Inoltre, poiché:

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

il vettore dei termini gravitazionali risulta:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipolatore cartesiano a due bracci



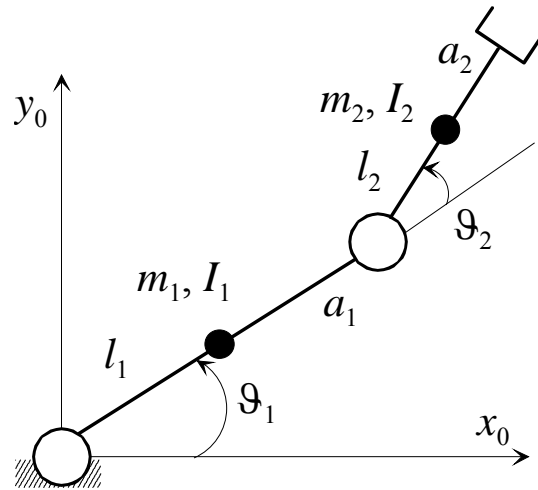
In assenza di attriti e forze all'end effector, le equazioni del moto sono le seguenti:

$$(m_1 + m_2)\ddot{d}_1 + (m_1 + m_2)g = f_1$$

$$m_2\ddot{d}_2 = f_2$$

f_1 e f_2 : forze agenti lungo le coordinate generalizzate

Manipolatore planare a due bracci



Consideriamo un manipolatore planare a due bracci, caratterizzati da:

- masse: m_1 e m_2
- lunghezze: a_1 e a_2
- distanze dei baricentri dagli assi dei giunti: l_1 e l_2
- momenti di inerzia baricentrali intorno a z_0 : I_1 e I_2

Coordinate generalizzate: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$

Gli Jacobiani necessari per il calcolo della matrice di inerzia sono i seguenti:

$$\mathbf{J}_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_O^{(l_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_O^{(l_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a due bracci



Tenendo conto che i vettori velocità angolare ω_1 e ω_2 sono allineati con z_0 le matrici di rotazione R_i sono irrilevanti, per cui il calcolo della matrice di inerzia conduce a:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = m_1 \mathbf{J}_P^{(l_1)T} \mathbf{J}_P^{(l_1)} + m_2 \mathbf{J}_P^{(l_2)T} \mathbf{J}_P^{(l_2)} + I_1 \mathbf{J}_O^{(l_1)T} \mathbf{J}_O^{(l_1)} + I_2 \mathbf{J}_O^{(l_2)T} \mathbf{J}_O^{(l_2)} = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta) & b_{12}(\vartheta) \\ b_{21}(\vartheta) & b_{22}(\vartheta) \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 c_2) + I_2$$

$$b_{12} = b_{21} = m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + I_2$$

$$b_{22} = m_2 l_2^2 + I_2$$

Manipolatore planare a due bracci



Dalla matrice di inerzia ricaviamo i simboli di Christoffel:

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_2 a_1 l_2 s_2 = h \quad h = -m_2 a_1 l_2 s_2$$

$$c_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = -m_2 a_1 l_2 s_2 = h$$

$$c_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = m_2 a_1 l_2 s_2 = -h$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

Manipolatore planare a due bracci



L'espressione della matrice C è quindi:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 & -m_2 a_1 l_2 s_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'anti-simmetria della matrice N :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{B}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 2h\dot{\vartheta}_2 & h\dot{\vartheta}_2 \\ h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2h\dot{\vartheta}_1 - h\dot{\vartheta}_2 \\ 2h\dot{\vartheta}_1 + h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} = -N^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Inoltre, poiché $\mathbf{g}_0 = [0 \ -g \ 0]^T$, il vettore dei termini gravitazionali risulta:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 a_1) g c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \\ m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a due bracci



In assenza di attriti e forze all'end effector, le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{aligned} & \left(m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 c_2) + I_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + I_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \\ & - 2m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + (m_1 l_1 + m_2 a_1) g c_1 + m_2 g l_2 c_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + I_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \\ & + m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

τ_i : coppie applicate ai due giunti

Manipolatore planare a due bracci



Per ispezione delle equazioni, possiamo ricavare i parametri dinamici rispetto a cui il modello è lineare, ovvero rispetto ai quali si può scrivere:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi$$

Risulta:

$$\pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5]^T$$

$$\pi_1 = m_1 l_1$$

$$\pi_2 = I_1 + m_1 l_1^2$$

$$\pi_3 = m_2$$

$$\pi_4 = m_2 l_2$$

$$\pi_5 = I_2 + m_2 l_2^2$$

Manipolatore planare a due bracci



$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ 0 & 0 & 0 & y_{24} & y_{25} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = gc_1$$

$$y_{12} = \ddot{\vartheta}_1$$

$$y_{13} = a_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + a_1 gc_1$$

$$y_{14} = 2a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_2 - 2a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - a_1 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + gc_{12}$$

$$y_{15} = \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2$$

$$y_{24} = a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + gc_{12}$$

$$y_{25} = \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2$$

I coefficienti di Y dipendono da ϑ_1 , ϑ_2 , dalle loro derivate prime e seconde, da g e da a_1 .

Identificazione dei parametri dinamici



La proprietà di linearità del modello dinamico rispetto ai parametri dinamici:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi$$

consente di impiegare una procedura per l'identificazione sperimentale dei parametri stessi, di norma sconosciuti o incerti.

Si eseguono opportune traiettorie di moto lungo le quali si misurano le posizioni dei giunti q , si misurano o si ricavano per derivazione le velocità \dot{q} e si ricavano per derivazione filtrata le accelerazioni \ddot{q} .

Si misurano anche le coppie τ , direttamente (con opportuni sensori) o indirettamente dalle misure di corrente nei motori.

Si supponga di avere le misure (dirette o indirette) di tutte le variabili negli istanti di tempo t_1, \dots, t_N .

Identificazione dei parametri dinamici



Con N insiemi di misure:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}(t_1) \\ \vdots \\ \bar{\tau}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ \vdots \\ Y(t_N) \end{bmatrix} \pi = \bar{Y} \pi$$

Risolvendo con una tecnica ai minimi quadrati:

$$\pi = \underbrace{(\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T}_{\text{Matrice pseudo-inversa sinistra di } \bar{Y}} \bar{\tau}$$

Sono identificabili solo gli elementi di π la cui corrispondente colonna di Y non è nulla. Inoltre alcuni parametri potrebbero essere identificabili solo in combinazione lineare con altri.

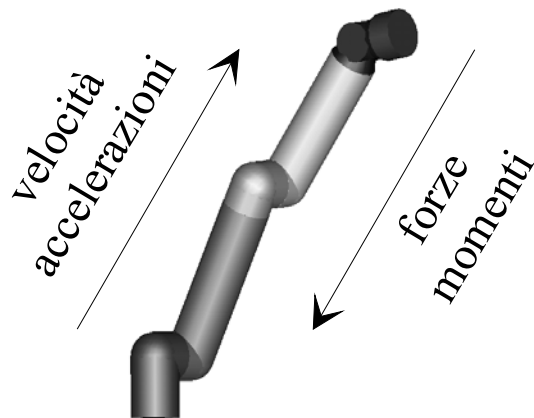
Le traiettorie da utilizzare devono essere sufficientemente ricche (buon condizionamento di $\bar{Y}^T \bar{Y}$) ma non tali da eccitare dinamiche non modellate.

Formulazione di Newton-Eulero



Una strada alternativa per la formulazione del modello dinamico del manipolatore è quella che va sotto il nome di **metodo di Newton-Eulero**. Si tratta di scrivere i bilanci di forze e momenti agenti sul singolo braccio, mettendo in evidenza le interazioni con i bracci contigui nella catena cinematica.

Si ottiene un sistema di equazioni che possono essere risolte in modo **ricorsivo**, propagando le velocità ed accelerazioni dalla base verso l'organo terminale, e le forze ed i momenti in senso opposto:

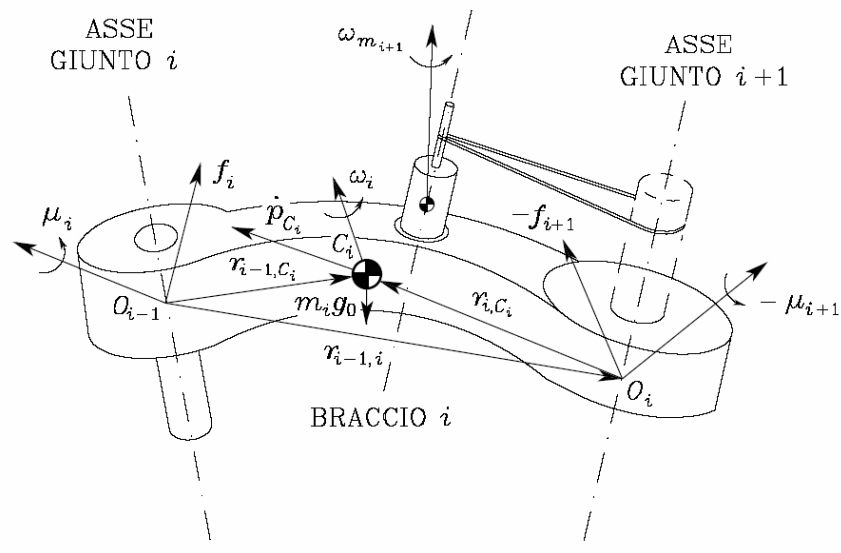


La ricorsività rende l'algoritmo di Newton-Eulero **computazionalmente efficiente**.

Definizione dei parametri



Consideriamo il generico braccio i della catena cinematica:



Il disegno è tratto dal testo:
L.Sciavicco, B.Siciliano
Robotica industriale – Modellistica e controllo di robot
manipolatori (2a ed.)
Mc Graw-Hill, 2000

Definiamo i parametri:

m_i e I_i : massa e tensore di inerzia del braccio

r_{i-1,C_i} vettore dall'origine della terna $(i-1)$ al baricentro C_i

r_{i,C_i} vettore dall'origine della terna i al baricentro C_i

$r_{i-1,i}$ vettore dall'origine della terna $(i-1)$ all'origine della terna i

Definizione delle variabili



$\dot{\mathbf{p}}_{C_i}$ velocità lineare del baricentro C_i

$\dot{\mathbf{p}}_i$ velocità lineare dell'origine della terna i

ω_i velocità angolare del braccio

$\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$ accelerazione lineare del baricentro C_i

$\ddot{\mathbf{p}}_i$ accelerazione lineare dell'origine della terna i

$\dot{\omega}_i$ accelerazione angolare del braccio

\mathbf{g}_0 accelerazione di gravità

\mathbf{f}_i forza esercitata dal braccio $i-1$ sul braccio i

$-\mathbf{f}_{i+1}$ forza esercitata dal braccio $i+1$ sul braccio i

$\boldsymbol{\mu}_i$ momento esercitato dal braccio $i-1$ sul braccio i rispetto all'origine della terna $i-1$

$-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ momento esercitato dal braccio $i+1$ sul braccio i rispetto all'origine della terna i

Tutti i vettori si intendono espressi in terna base.

Equazioni di Newton e Eulero



Equazione di Newton (moto traslazionale baricentro)

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_0 = m_i \ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$$

Equazione di Eulero (moto rotazionale)

$$\boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1, C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i, C_i} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)$$

si dimostra effetto *giroscopico*

Forza generalizzata al giunto i :

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} & \text{giunto prismatico} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{z}_{i-1} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

Accelerazioni di un braccio



Propagazione delle velocità:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{giunto prismatico} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} & \text{giunto prismatico} \\ \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

Propagazione delle accelerazioni:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{giunto prismatico} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_{i-1} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}) & \text{giunto prismatico} \\ \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}) & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_i} = \ddot{\mathbf{p}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,C_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,C_i}) \quad \text{baricentro}$$

Algoritmo ricorsivo



Si effettua una ricorsione **in avanti** di velocità ed accelerazione:

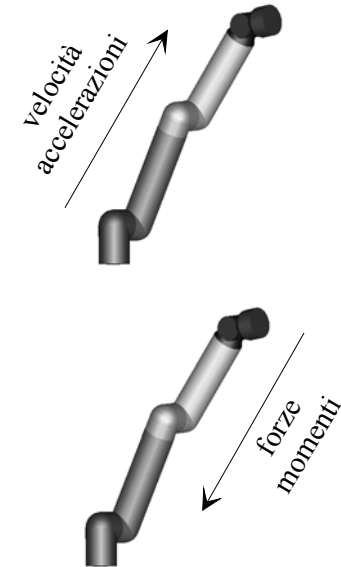
- condizioni iniziali su $\omega_0, \ddot{\mathbf{p}}_0 - \mathbf{g}_0, \dot{\omega}_0$
- calcolo di $\omega_i, \dot{\omega}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_{Ci}$

Si effettua una ricorsione **all'indietro** di forze e momenti:

- condizioni terminali su \mathbf{f}_{n+1} e $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$
- calcolo di:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i+1} + m_i \ddot{\mathbf{p}}_{Ci}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i = -\mathbf{f}_i \times (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,C_i}) + \boldsymbol{\mu}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i} + \mathbf{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathbf{I}_i \omega_i)$$



Si calcola la forza generalizzata al giunto i :

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + F_{vi} \dot{d}_i + f_{si} & \text{giunto prismatico} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + F_{vi} \dot{\theta}_i + f_{si} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

contributi di attrito

Sistemi di riferimento locali

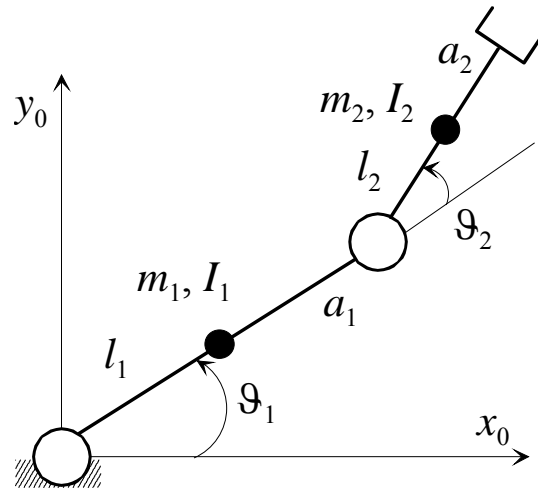


Finora si è supposto che tutti i vettori fossero riferiti alla terna base. In realtà risulta più conveniente riferire i vettori alla terna di coordinate corrente sul braccio i .

In questo modo infatti i vettori $\mathbf{r}_{i-1,i}$ e \mathbf{r}_{i,C_i} ed il tensore di inerzia \mathbf{I}_i sono costanti, il che rende l'algoritmo computazionalmente più efficiente.

Le equazioni risultano modificate in alcuni termini (occorre moltiplicare i vettori per opportune matrici di rotazione) ma non cambia la natura del metodo.

Manipolatore planare a due bracci



Consideriamo nuovamente un manipolatore planare a due bracci con giunti rotoidali, il cui modello è già stato ricavato con il metodo di Lagrange:

- masse: m_1 e m_2
- lunghezze: a_1 e a_2
- distanze dei baricentri dagli assi dei giunti: l_1 e l_2
- momenti di inerzia baricentrali intorno a z_0 : I_1 e I_2

Condizioni iniziali per la ricorsione di velocità ed accelerazioni:

$$\ddot{\mathbf{p}}_0^0 - \mathbf{g}_0^0 = [0 \quad g \quad 0]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_0^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = \mathbf{0}$$

Condizioni iniziali per la ricorsione di forze e momenti:

$$\mathbf{f}_3^3 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mu}_3^3 = \mathbf{0}$$

Definizione vettori e matrici



Riferiamo tutte le quantità alla terna corrente sul braccio. Si hanno i seguenti vettori costanti:

$$\mathbf{r}_{1,C_1}^1 = \begin{bmatrix} l_1 - a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0,1}^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,C_2}^2 = \begin{bmatrix} l_2 - a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,2}^2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici di rotazione sono:

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricorsione in avanti: braccio 1



$$\boldsymbol{\omega}_1^1 = \mathbf{R}_1^{0T} (\boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\vartheta}_1 \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 = \mathbf{R}_1^{0T} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \ddot{\vartheta}_1 \mathbf{z}_0 + \dot{\vartheta}_1 \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_1^1 = \mathbf{R}_1^{0T} \ddot{\mathbf{p}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 \times \mathbf{r}_{0,1}^1 + \boldsymbol{\omega}_1^1 \times (\boldsymbol{\omega}_1^1 \times \mathbf{r}_{0,1}^1) = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\vartheta}_1^2 + g s_1 \\ a_1 \ddot{\vartheta}_1 + g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_1}^1 = \ddot{\mathbf{p}}_1^1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 \times \mathbf{r}_{1,C_1}^1 + \boldsymbol{\omega}_1^1 \times (\boldsymbol{\omega}_1^1 \times \mathbf{r}_{1,C_1}^1) = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\vartheta}_1^2 + g s_1 \\ l_1 \ddot{\vartheta}_1 + g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricorsione in avanti: braccio 2



$$\boldsymbol{\omega}_2^2 = \mathbf{R}_2^{1T} (\boldsymbol{\omega}_1^1 + \dot{\vartheta}_2 \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 = \mathbf{R}_2^{1T} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 + \ddot{\vartheta}_2 \mathbf{z}_0 + \dot{\vartheta}_2 \boldsymbol{\omega}_1^1 \times \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_2^2 = \mathbf{R}_2^{1T} \ddot{\mathbf{p}}_1^1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 \times \mathbf{r}_{1,2}^2 + \boldsymbol{\omega}_2^2 \times (\boldsymbol{\omega}_2^2 \times \mathbf{r}_{1,2}^2) = \begin{bmatrix} a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - a_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12} \\ a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_2}^2 = \ddot{\mathbf{p}}_2^2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 \times \mathbf{r}_{2,C_2}^2 + \boldsymbol{\omega}_2^2 \times (\boldsymbol{\omega}_2^2 \times \mathbf{r}_{2,C_2}^2) = \begin{bmatrix} a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - l_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12} \\ a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + l_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricorsione all'indietro: braccio 2



$$\mathbf{f}_2^2 = \mathbf{R}_3^2 \mathbf{f}_3^3 + m_2 \ddot{\mathbf{p}}_{C_2}^2 = m_2 \ddot{\mathbf{p}}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} m_2 \left(a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - l_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12} \right) \\ m_2 \left(a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + l_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_2^2 &= -\mathbf{f}_2^2 \times (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{2,C_2}^2) + \mathbf{R}_3^2 \boldsymbol{\mu}_3^3 + \mathbf{R}_3^2 \mathbf{f}_3^3 \times \mathbf{r}_{2,C_2}^2 + \mathbf{I}_2^2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 + \boldsymbol{\omega}_2^2 \times (\mathbf{I}_2^2 \boldsymbol{\omega}_2^2) = \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (I_2 + m_2 l_2^2) (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2 a_1 l_2 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \boldsymbol{\mu}_2^{2T} \mathbf{R}_2^{1T} \mathbf{z}_0 = \\ &= (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 c_2)) \ddot{\vartheta}_1 + (I_2 + m_2 l_2^2) \ddot{\vartheta}_2 + m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{aligned}$$

(coincidente con quanto trovato con il metodo di Lagrange).

Ricorsione all'indietro: braccio 1



$$\mathbf{f}_1^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{f}_2^2 + m_2 \ddot{\mathbf{p}}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} -m_2 l_2 s_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) - m_1 l_1 \dot{\vartheta}_1^2 - m_2 a_1 \dot{\vartheta}_1^2 - m_2 l_2 c_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g s_1 \\ (m_1 l_1 + m_2 a_1) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 l_2 c_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) - m_2 l_2 s_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_1^1 = -\mathbf{f}_1^1 \times (\mathbf{r}_{0,1}^1 + \mathbf{r}_{1,C_1}^1) + \mathbf{R}_2^1 \boldsymbol{\mu}_2^2 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{f}_2^2 \times \mathbf{r}_{1,C_1}^1 + \mathbf{I}_1^1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 + \boldsymbol{\omega}_1^1 \times (\mathbf{I}_1^1 \boldsymbol{\omega}_1^1) =$$

$$= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (I_1 + m_2 a_1^2 + m_1 l_1^2 + m_2 a_1 l_2 c_2) \ddot{\vartheta}_1 + (I_2 + m_2 a_1 l_2 c_2 + m_2 l_2^2) (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + \\ + m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 - m_2 a_1 l_2 s_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 l_1 + m_2 a_1) g c_1 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\mu}_1^{1T} \mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{z}_0 =$$

$$= (I_1 + m_1 l_1^2 + I_2 + m_2 (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 c_2)) \ddot{\vartheta}_1 + (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 c_2)) \ddot{\vartheta}_2 \\ - 2m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 + (m_1 l_1 + m_2 a_1) g c_1 + m_2 l_2 g c_{12}$$

(coincidente con quanto trovato con il metodo di Lagrange).

Lagrange vs. Newton-Eulero



Formulazione di Lagrange

- è *sistematica* e più facilmente comprensibile
- fornisce le equazioni del moto in *forma analitica compatta*, mettendo in evidenza la matrice di inerzia, i termini centrifughi e di Coriolis, ed i termini gravitazionali. Questi elementi sono utili ai fini del progetto di un controllore basato sul modello.
- si presta all'introduzione nel modello di *effetti dinamici più complessi* (deformabilità ai giunti o nei link)

Formulazione di Newton-Eulero

- è un metodo *ricorsivo*, efficiente dal punto di vista computazionale

Dinamica diretta ed inversa



$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v\dot{q} + f_s(q, \dot{q}) = \tau$$

Dinamica diretta

Assegnate le coppie ai giunti $\tau(t)$, determinare le accelerazioni ai giunti $\ddot{q}(t)$ e, note le posizioni iniziali $q(t_0)$ e le velocità iniziali $\dot{q}(t_0)$, le posizioni $q(t)$ e le velocità $\dot{q}(t)$.

- Problema la cui soluzione è utile per la **simulazione numerica** della dinamica
- È risolubile sia con l'approccio di Lagrange sia con l'approccio di Newton-Eulero

Dinamica inversa

Assegnate le accelerazioni $\ddot{q}(t)$, le velocità $\dot{q}(t)$ e le posizioni $q(t)$ determinare le coppie ai giunti $\tau(t)$ necessarie alla generazione del movimento.

- Problema la cui soluzione è utile per la **pianificazione della traiettoria** e per il **controllo** basato sul modello.
- Si può risolvere efficientemente con l'approccio di Newton-Eulero

Calcolo della dinamica diretta ed inversa



Il calcolo della dinamica inversa si conduce facilmente sia con il metodo di Lagrange sia con quello di Newton-Eulero.

Per quanto riguarda il calcolo della dinamica diretta, riscriviamo il modello dinamico del manipolatore in questi termini:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = \tau$$

dove:

$$n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v\dot{q} + f_s(q, \dot{q})$$

Si tratta pertanto di integrare numericamente il sistema di equazioni differenziali esplicito:

$$\ddot{q} = B(q)^{-1}(\tau - n(q, \dot{q}))$$

in cui tutti gli elementi necessari per costruire il sistema sono direttamente calcolati dal metodo di Lagrange.

Calcolo della dinamica diretta ed inversa



Come calcolare la dinamica diretta con il metodo di Newton-Eulero?

Con i valori correnti di \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$, si esegue una prima iterazione del metodo ponendo $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. In questo modo le coppie τ calcolate dal metodo forniscono direttamente il vettore \mathbf{n} .

Successivamente si pone $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ (per eliminare gli effetti gravitazionali) e $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ (per eliminare gli effetti di Coriolis, centrifughi e di attrito). Si eseguono quindi n iterazioni del metodo con $\ddot{q}_i = 1$ e $\ddot{q}_j = 0, j \neq i$. In questo modo si costruisce, per colonne, la matrice \mathbf{B} e si hanno tutti gli elementi per costruire il sistema di equazioni.

In alternativa si può utilizzare un solutore numerico in grado di integrare sistemi di equazioni differenziali impliciti o, più in generale, sistemi di equazioni DAE (equazioni algebrico-differenziali).

Modello dinamico nello spazio operativo



Può essere di interesse formulare il modello dinamico del manipolatore nello spazio operativo, anziché nello spazio dei giunti.

Faremo riferimento ad un manipolatore a sei gradi di libertà, in configurazione non singolare.

Trascurando gli attriti, dal modello dinamico nello spazio dei giunti otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1} \left[-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h} \right]$$

Derivando la relazione cinematica differenziale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

Poniamo inoltre: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\gamma}_A$, $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h} = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_A$

$\boldsymbol{\gamma}_A$: forze e momenti equivalenti all'organo terminale

Modello dinamico nello spazio operativo



Sostituendo in $\ddot{\mathbf{x}}$ l'espressione di $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} + \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J}_A^T (\gamma_A - \mathbf{h}_A)$$

Poniamo ora:

$$\mathbf{B}_A = \left(\mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J}_A^T \right)^{-1} = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{B} \mathbf{J}_A^{-1}$$

$$\mathbf{C}_A \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{g}$$

Il modello dinamico nello spazio operativo è il seguente:

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_A(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_A(\mathbf{x}) = \gamma_A - \mathbf{h}_A$$

Il modello risulta formalmente valido anche per un manipolatore *ridondante*: in questo caso però le \mathbf{x} non costituiscono un insieme di coordinate generalizzate.