

# *Lezione 8*

## Stabilità dei sistemi di controllo

## Poli di un sistema di controllo

Riprendiamo lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione:

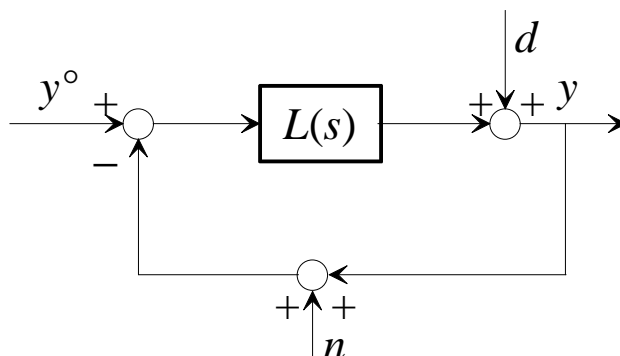


Fig. 1 : Sistema di controllo

Essendo la stabilità una proprietà del sistema, indipendente dagli ingressi, possiamo considerare il sistema di controllo privo dei disturbi:

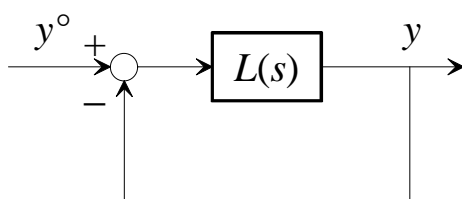


Fig. 2 : Sistema di controllo privo di disturbi

Espressa la funzione di trasferimento d'anello come rapporto di polinomi:

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

la funzione di trasferimento da  $y^\circ$  a  $y$  assume l'espressione:

$$\frac{c(s)}{c^\circ(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}.$$

Definiamo il denominatore di questa funzione di trasferimento **polinomio caratteristico in anello chiuso**:

$$\chi(s) = N(s) + D(s).$$

Le radici di tale polinomio sono quindi i **poli** del sistema in anello chiuso.

**Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa.**

### **Esempio**

Sia

$$L(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} .$$

Poiché il polinomio caratteristico in anello chiuso:

$$\chi(s) = s^2 - s + 1 + s^3 + s^2 + s + 1 = s^3 + 2s^2 + 2$$

non soddisfa la condizione necessaria perché le sue radici abbiano tutte parte reale negativa, il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

---

Se nel formare il prodotto  $L(s)$  tra  $R(s)$  e  $G(s)$  intervengono cancellazioni tra poli (o zeri) di  $R(s)$  e zeri (o poli) di  $G(s)$ , i poli cancellati non compaiono più come radici del polinomio caratteristico. Ricordando tuttavia la discussione fatta nella Lezione 5 riguardo gli effetti delle cancellazioni tra poli e zeri sulla stabilità dei sistemi interconnessi, osserviamo che, se i poli cancellati non hanno parte reale negativa, il sistema nel suo complesso non può dirsi asintoticamente stabile, dal momento che nasce una instabilità (o, comunque, una non asintotica stabilità) interna.

Poiché zeri e poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  sono da ritenersi assegnati, le considerazioni precedenti conducono alle seguenti **conclusioni**:

- a) Se il sistema sotto controllo  $G(s)$  ha un polo a parte reale positiva o nulla, tale polo non può essere cancellato da un corrispondente zero di  $R(s)$ .
- b) Se il sistema sotto controllo  $G(s)$  ha uno zero a parte reale positiva o nulla, tale zero non può essere cancellato da un corrispondente polo di  $R(s)$ .

## Il criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico di stabilità molto generale e di più immediata utilità del criterio del polinomio caratteristico ai fini della sintesi del controllore.

In questo corso ci si limiterà a dare l'enunciato del criterio, senza entrare in ulteriori approfondimenti.

Il criterio di Nyquist si basa sul tracciamento del cosiddetto **diagramma di Nyquist** associato alla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ : si tratta del diagramma polare della risposta in frequenza di  $L$ , orientato nel senso delle  $\omega$  crescenti, cui si aggiunge il simmetrico rispetto all'asse reale del piano complesso. Occorre poi introdurre due quantità:

$P_d$ : numero di poli a parte reale strettamente positiva di  $L(s)$

$N$ : numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto  $-1$  dell'asse reale, contati positivamente in senso antiorario. Se il diagramma passa per il punto  $-1$ ,  $N$  si dice non definito.

**Il criterio afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se  $N$  è ben definito e risulta:**

$$N = P_d$$

### Esempio

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^2} .$$

Il diagramma polare si traccia sulla base dei diagrammi di Bode asintotici (il modulo parte da 10 e decresce monotonicamente, la fase parte da 0 e decresce monotonicamente fino a  $-180^\circ$ ). Dal diagramma polare è immediato tracciare il diagramma di Nyquist:

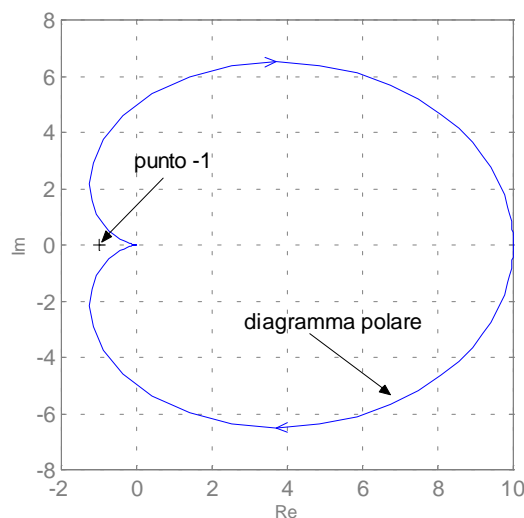


Fig. 3 : Diagramma di Nyquist di  $L$

Si osservi che  $P_d=0$ , e che il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto  $-1$ , per cui  $N=0$ . Poiché  $N=P_d$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1+s)^2 = s^2 + 2s + 11,$$

ed ha entrambe le radici:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{10}$$

nel semipiano sinistro.

Se invece:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3},$$

il diagramma di Nyquist qualitativo si può tracciare di nuovo facilmente (si osservi che ora la fase della risposta in frequenza termina con il valore  $-270^\circ$ ).

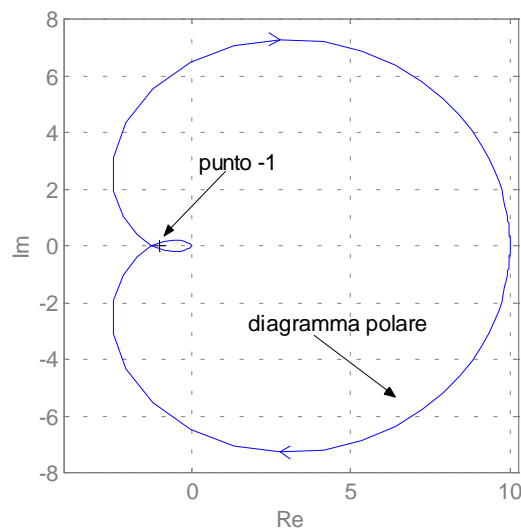


Fig. 4 : Diagramma di Nyquist di  $L$

Anche in questo caso  $P_d=0$ , mentre per determinare il valore di  $N$  occorre stabilire dove si trova il punto  $P$  in cui il diagramma attraversa l'asse reale. Tale punto può essere caratterizzato come quello in cui la parte immaginaria della risposta in frequenza si annulla o come quello in cui la fase della risposta in frequenza vale  $-180^\circ$ . Seguendo quest'ultima strada, e denominando  $\omega_p$  la pulsazione cui è associato il punto  $P$ , ricaviamo  $\omega_p$  dall'equazione:

$$\angle L(j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow -3\angle(1+j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow \arctan(\omega_p) = 60^\circ \Rightarrow \omega_p = \sqrt{3}.$$

Poiché:

$$\left|L(j\omega_p)\right| = \frac{10}{|1+j\omega_p|^3} = \frac{10}{\left(\sqrt{1+\omega_p^2}\right)^3} = \frac{10}{8} > 1,$$

il punto  $P$  si trova a sinistra del punto  $-1$ , attorno al quale il diagramma compie quindi due giri in senso orario. Pertanto  $N = -2 \neq P_d$  ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1+s)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 11,$$

ed ha due radici:

$$s_{1,2} = 0.07 \pm j1.86, \quad s_3 = -3.15$$

nel semipiano destro.

## Il criterio di Bode

Si consideri nuovamente il sistema in anello chiuso di Fig. 2.

Introduciamo le seguenti *ipotesi* sulla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ :

1.  $L(s)$  non ha poli a parte reale positiva.
2. Il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB una e una sola volta.

Diamo le seguenti *definizioni*:

**Pulsazione critica**  $\omega_c$  : pulsazione alla quale il diagramma di  $|L(j\omega)|_{dB}$  taglia l'asse a 0 dB, ossia:  $|L(j\omega_c)|=1$ ;

**Fase critica**  $\phi_c$  : fase di  $L(j\omega)$  in corrispondenza della pulsazione critica, ossia  $\phi_c = \angle L(j\omega_c)$ ;

**Margine di fase**  $\phi_m$  : differenza tra  $180^\circ$  e la fase critica, presa in modulo, ossia:  $\phi_m = 180^\circ - |\phi_c|$ ;

**Guadagno d'anello**  $\mu_L$  : guadagno (generalizzato) di  $L(s)$ .

Il **criterio di Bode** afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile **se e solo se** il guadagno d'anello ed il margine di fase sono entrambi positivi:

$$\begin{cases} \mu_L > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$$

### *Esempio*

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^2} .$$

Il diagramma di Bode asintotico del modulo di  $L$  è riportato in figura:

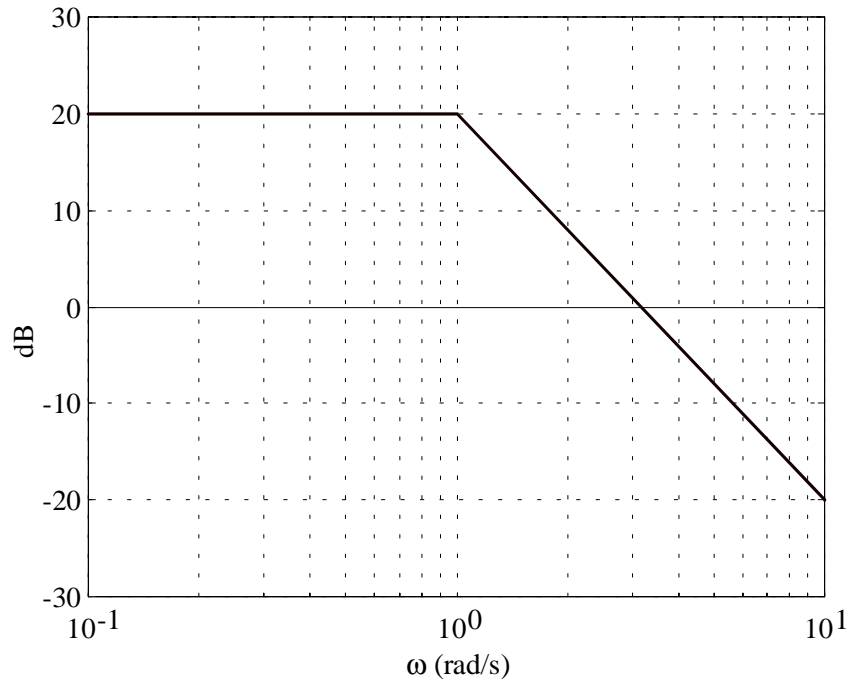


Fig. 5 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L|$

La pulsazione critica vale  $\omega_c \approx 3$  rad/s. La fase critica può essere calcolata analiticamente o con il regolo delle fasi. Risulta:

$$\phi_c = -2 \arctan(3) = -2 \times 72^\circ = -144^\circ.$$

Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 36^\circ > 0.$$

Poiché anche il guadagno d'anello (pari a 10) è positivo, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist.

Se invece:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3},$$

il diagramma asintotico del modulo di  $L$  è il seguente:

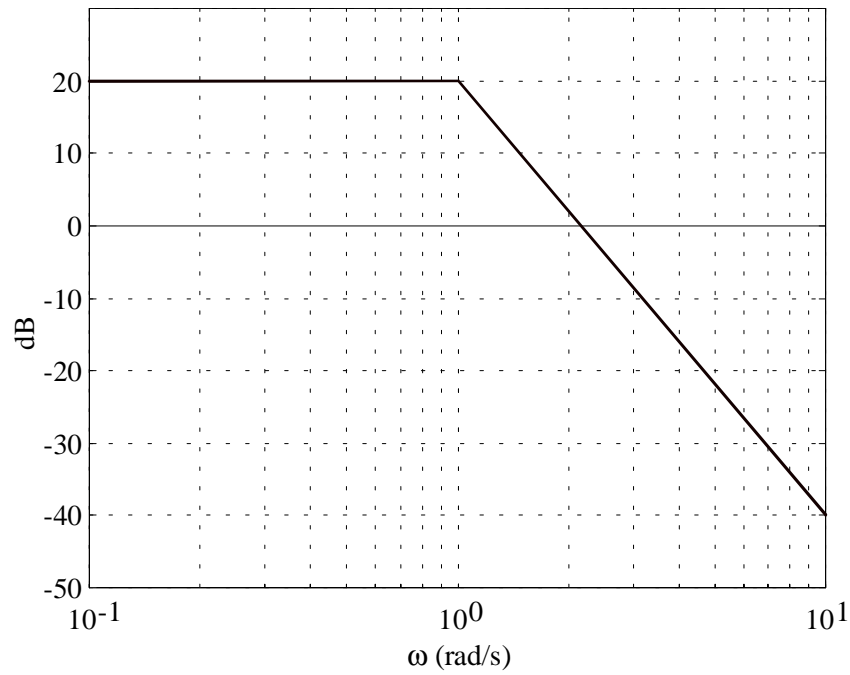


Fig. 6 : Diagramma di Bode di  $|L|$

La pulsazione critica vale  $\omega_c \approx 2$  rad / s. La fase critica:

$$\phi_c = -3 \arctan(2) = -3 \times 64^\circ = -192^\circ.$$

Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -12^\circ < 0.$$

Pertanto il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist

## Osservazioni sul criterio di Bode

### 1) Giustificazione

Il criterio di Bode è un caso particolare del criterio di Nyquist: non è infatti difficile verificare che nelle condizioni di applicabilità del criterio di Bode (che corrispondono a  $P_d = 0$ ), le condizioni sul guadagno d'anello e sul margine di fase espresse dal criterio equivalgono a garantire l'assenza di giri del diagramma di Nyquist intorno al punto  $-1$  ( $N = 0$ ).

Rispetto al criterio di Nyquist, il criterio di Bode ha il vantaggio di richiedere il tracciamento dei diagrammi di Bode, di norma più agevole del tracciamento del diagramma di Nyquist.

---

### 2) Uso dei diagrammi asintotici

La pulsazione critica può essere stimata con buona precisione utilizzando il diagramma di Bode asintotico del modulo, a patto che non vi siano cambiamenti di pendenza nelle vicinanze della pulsazione critica stessa. Occorre quindi tenere presente che più vicini alla pulsazione critica sono i cambiamenti di pendenza, più inaccurata sarà la stima della pulsazione critica.

Inoltre gli eventuali poli o zeri complessi e coniugati devono essere ad alto smorzamento, altrimenti i diagrammi asintotici possono scostarsi sensibilmente da quelli reali.

---

### 3) Sistemi a fase minima

Un sistema dinamico si dice a **fase minima** se ha guadagno positivo e tutte le singolarità (poli e zeri) sono nel semipiano sinistro chiuso del piano complesso. Tale dizione deriva dal fatto che, se si tracciano i diagrammi di Bode della fase di tutte le funzioni di trasferimento a guadagno positivo e con poli nel semipiano sinistro chiuso, aventi lo stesso diagramma del modulo della funzione di trasferimento a fase minima, in quella a fase minima la fase si trova, per ciascuna pulsazione, ad un valore di ordinata superiore (e quindi, se le fasi come spesso avviene sono negative, la fase è più piccola in modulo).

Per un sistema a fase minima, ad ogni polo corrisponde un decremento unitario della pendenza del diagramma del modulo ed un decremento di  $90^\circ$  del valore della fase, e viceversa per gli zeri. Ne consegue che il diagramma asintotico della fase si può immediatamente ottenere da quello del modulo, semplicemente moltiplicandone in ogni tratto la pendenza per  $90^\circ$ .

Se allora il diagramma asintotico del modulo, in corrispondenza al **taglio** dell'asse a 0 dB ha **pendenza  $-1$** , e non vi sono cambiamenti di pendenza nelle immediate vicinanze della pulsazione critica, allora la fase critica sarà prossima al valore asintotico ( $-90^\circ$ ). Ne consegue che il sistema in anello chiuso, essendo il margine di fase ampiamente positivo, sarà asintoticamente stabile.

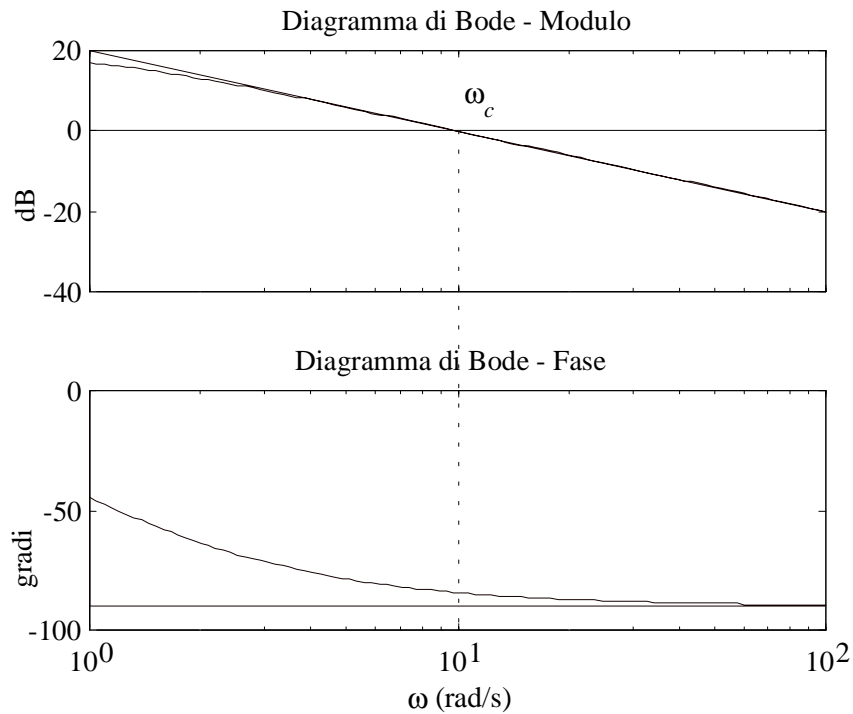


Fig. 7 : Taglio dell'asse a 0 dB con pendenza  $-1$  per un sistema a fase minima

#### 4) Sistemi con ritardo

Un sistema in cui ad ogni istante l'uscita ha il valore assunto dall'ingresso  $\tau$  istanti prima:

$$y(t) = u(t - \tau) ,$$

prende il nome di **ritardo** (si ricordi l'esempio del nastro trasportatore nella Lezione 2).

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri dell'equazione si ha:

$$Y(s) = e^{-s\tau}U(s) ,$$

per cui la **funzione di trasferimento** del ritardo è la seguente:

$$G(s) = e^{-s\tau} .$$

La **risposta in frequenza** associata a questa funzione di trasferimento è quindi:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau) .$$

Poiché risulta:

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1 ,$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega\tau} = \arctan(-\sin(\omega\tau)/\cos(\omega\tau)) = -\omega\tau ,$$

il diagramma di Bode del modulo coincide con l'asse a 0 dB, mentre la fase decresce linearmente con  $\omega$  (sulla scala logaritmica si ha una curva monotona decrescente).

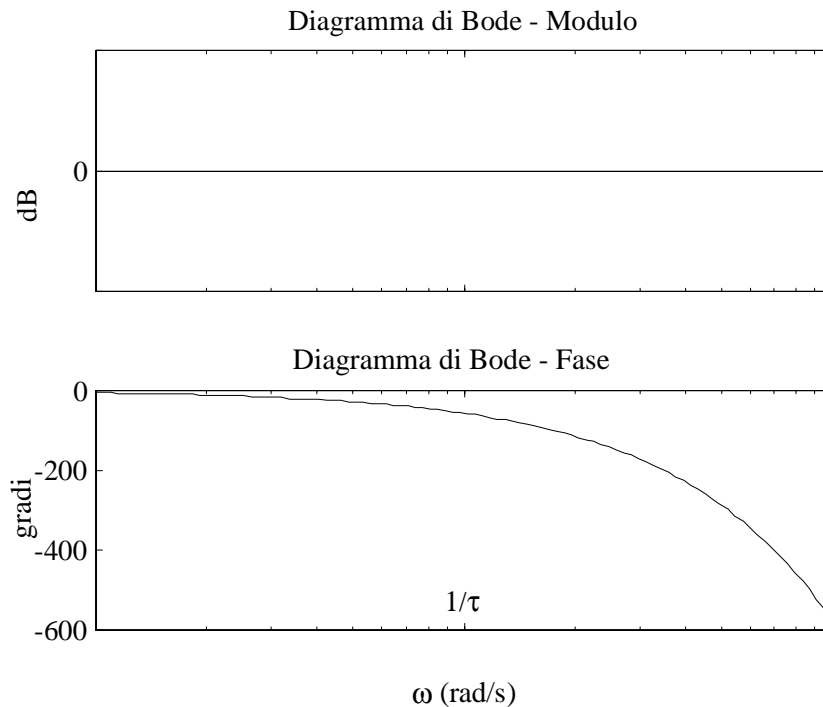


Fig. 8 : Diagrammi di Bode del ritardo

E' poi molto comune il caso in cui la funzione di trasferimento d'anello sia il prodotto di una funzione di trasferimento razionale  $L_r(s)$  e della funzione di trasferimento del ritardo:

$$L(s) = L_r(s)e^{-s\tau} .$$

Si dimostra che, se il criterio di Bode è applicabile per la funzione di trasferimento  $L_r(s)$  (cioè se tale funzione di trasferimento ne rispetta le ipotesi), allora rimane applicabile anche per la funzione di trasferimento  $L(s)$ .

Osservando poi che risulta:

$$|L(j\omega)| = |L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau}| = |L_r(j\omega)| |e^{-j\omega\tau}| = |L_r(j\omega)| ,$$

$$\angle L(j\omega) = \angle(L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau}) = \angle L_r(j\omega) + \angle e^{-j\omega\tau} = \angle L_r(j\omega) - \omega\tau ,$$

si conclude che la presenza del ritardo non altera il diagramma di Bode del modulo, per cui la pulsazione critica si può ricavare direttamente dall'analisi della funzione di trasferimento priva di ritardo. Per quanto riguarda la fase critica, al termine dovuto alla parte razionale della funzione di trasferimento occorrerà sommare un termine pari a:

$$-\omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} .$$

Si osservi la conversione da radianti a gradi, necessaria per rendere questo termine sommabile alle fasi espresse in gradi.

### Esempio

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)} e^{-s\tau}, \quad \tau > 0.$$

Il diagramma di Bode del modulo è riportato in figura.

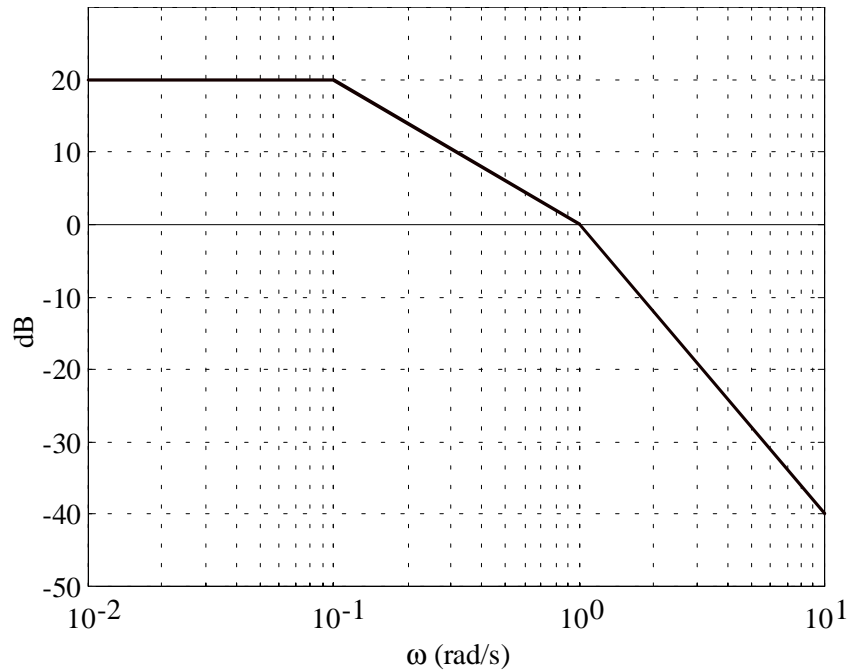


Fig. 9 : Diagramma di Bode asintotico del modulo di  $L$

La pulsazione critica vale approssimativamente  $\omega_c = 1$  rad/s.

La fase critica risulta:

$$\varphi_c \approx -\arctan\left(\frac{1}{0.1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \approx -84^\circ - 45^\circ - 57^\circ \tau = -129^\circ - 57^\circ \tau .$$

Il margine di fase vale quindi:

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - |-129^\circ - 57^\circ \tau| = 180^\circ - (129^\circ + 57^\circ \tau) = 51^\circ - 57^\circ \tau .$$

Pertanto se, per esempio,  $\tau = 0.1$ , il margine di fase è positivo ed il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; se  $\tau = 2$ , il margine di fase è negativo ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

## Margine di guadagno

Il margine di fase, oltre a dare un'indicazione binaria sull'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso, quantifica anche la **robustezza della stabilità**, ossia il margine di sicurezza con cui possiamo tollerare incertezze sul modello senza compromettere l'asintotica stabilità. Più alto è il margine di fase, più robusto è il sistema. Vi sono tuttavia casi in cui il margine di fase non costituisce un indicatore attendibile, come riportato nell'esempio in figura:

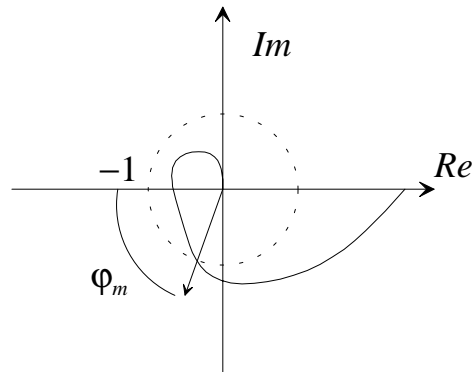


Fig. 10 : Diagramma polare di  $L$  ad alto margine di fase ma bassa robustezza

Pur essendo il margine di fase elevato, il diagramma polare passa molto vicino al punto  $-1$ , rendendo il sistema scarsamente robusto a fronte di incertezze di modello.

Un indicatore da usare in congiunzione con il margine di fase è il margine di guadagno. Sempre nell'ipotesi  $P_d=0$ , si supponga che il diagramma polare di  $L$  attraversi il semiasse reale negativo in uno e un solo punto:

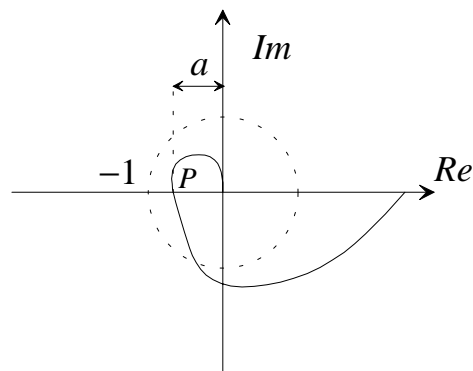


Fig. 11 : Diagramma polare di  $L$  con indicazione della distanza del punto  $P$  dall'origine

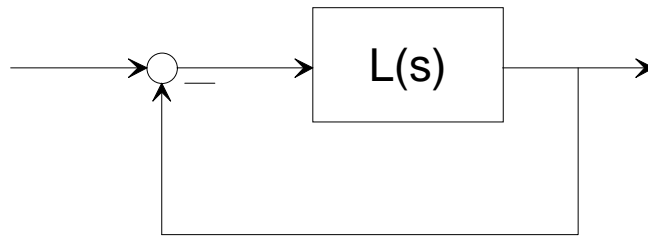
Un indice di robustezza è la distanza del punto  $P$  di intersezione dal punto  $-1$ , ovvero la vicinanza del punto  $P$  all'origine. Detta allora  $a$  la distanza del punto dall'origine, definiamo **margine di guadagno** la quantità:

$$k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}, \quad \text{con } \angle L(j\omega_p) = -180^\circ.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se  $k_m > 1$ , ed è tanto più robusto quanto maggiore è  $k_m$ .

## Esercizi

### Esercizio 8.1



Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si dica per quali delle seguenti espressioni della funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$  è applicabile il criterio di Bode per l'analisi di stabilità del sistema in anello chiuso:

$$L_1(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$L_2(s) = \frac{10}{(1-s)(1+0.1s)}$$

$$L_3(s) = \frac{0.1}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$L_4(s) = 0.5 \frac{(1+s)}{(1+0.1s)^2}$$

$$L_5(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)} e^{-0.1s}$$

$$L_6(s) = 10 \frac{(1-s)}{(1-s^2)}$$

### Esercizio 8.2

Si valuti il margine di fase per i sistemi dell'esercizio 8.1 per i quali sia applicabile il criterio di Bode.

### Esercizio 8.3

Si discuta la stabilità in anello chiuso per i sistemi dell'esercizio 8.1 per i quali non sia applicabile il criterio di Bode.

### Esercizio 8.4

Con riferimento ad un sistema retroazionato in cui  $L(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t-1)$$

$$y(t) = 10x_1(t)$$

si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso.

### Esercizio 8.5

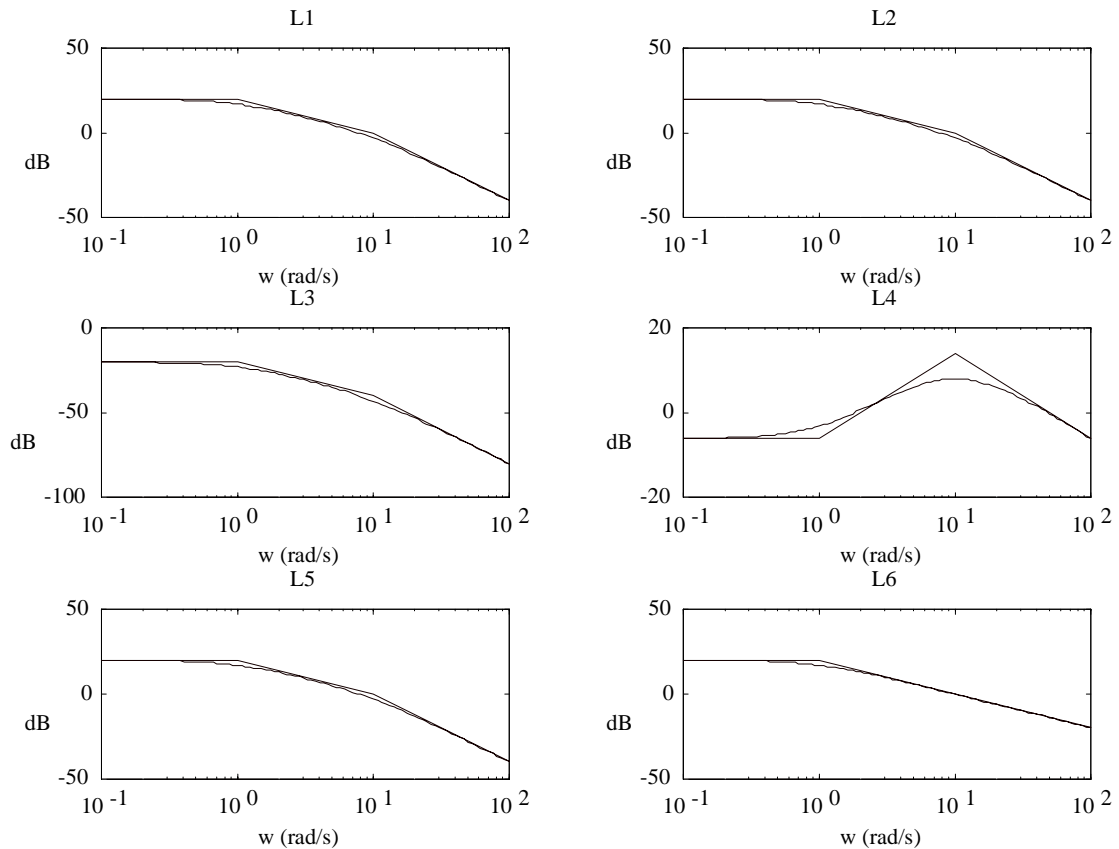
Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso quando la funzione di trasferimento  $L(s)$  assume una delle seguenti espressioni:

$$L_1(s) = -\frac{10}{(1+s)^2} \quad L_2(s) = \frac{10}{1-s^2} \quad L_3(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \quad L_4(s) = \frac{10}{(1-s)^2}$$

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 8.1

I diagrammi di Bode del modulo per le 6 funzioni di trasferimento d'anello sono riportati in figura:



$L_1$ : il criterio di Bode è applicabile

$L_2$ : il criterio di Bode non è applicabile (c'è un polo nel semipiano destro)

$L_3$ : il criterio di Bode non è applicabile (il diagramma non taglia l'asse a 0 dB)

$L_4$ : il criterio di Bode non è applicabile (il diagramma taglia due volte l'asse a 0 dB)

$L_5$ : il criterio di Bode è applicabile

$L_6$ : il criterio di Bode non è applicabile (c'è un polo nel semipiano destro)

### Esercizio 8.2

$$L_1: \omega_c \approx 10, \quad \phi_c = -84^\circ - 45^\circ = -129^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 51^\circ.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$$L_5: \omega_c \approx 10, \quad \phi_c = -84^\circ - 45^\circ - 10 \times 0.1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -129^\circ - 57^\circ = -186^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -6^\circ$$

Il sistema in anello chiuso è instabile.

### **Esercizio 8.3**

$L_2$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 10 + (1-s)(1+0.1s) = -0.1s^2 - 0.9s + 11$$

ed ha radici nel semipiano destro. Pertanto il sistema in anello chiuso è instabile.

$L_3$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 0.1 + (1+s)(1+0.1s) = 0.1s^2 + 1.1s + 1.1$$

ed ha tutte le radici nel semipiano sinistro. Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$L_4$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 0.5(1+s) + (1+0.1s)^2 = 0.01s^2 + 0.7s + 1.5$$

ed ha tutte le radici nel semipiano sinistro. Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$L_6$ : la funzione di trasferimento d'anello presenta un polo nel semipiano destro cancellato da uno zero. Pertanto sia il sistema in anello aperto che quello in anello chiuso sono instabili.

### **Esercizio 8.4**

Trasformando secondo Laplace le equazioni del sistema si ottiene:

$$sX_1(s) = X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -X_1(s) - 2X_2(s) + e^{-s}U(s)$$

$$Y(s) = 10X_1(s)$$

da cui:

$$L(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1+s)^2} .$$

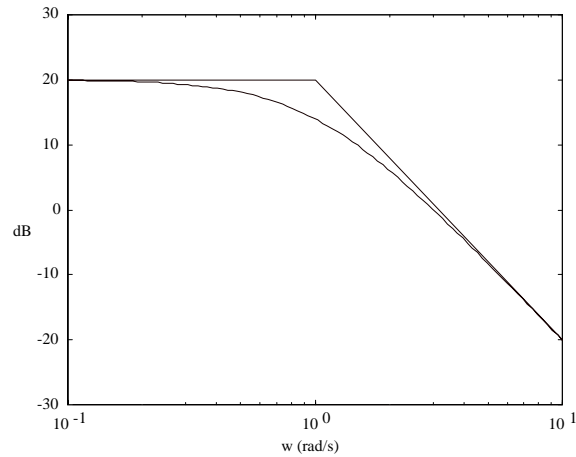
Tracciato il diagramma di Bode del modulo di  $L$  (si veda la figura relativa all'esercizio 8.5) si ricava:

$$\omega_c \approx 3, \quad \phi_c = -2 \times 72^\circ - 3 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -144^\circ - 172^\circ = -316^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -136^\circ$$

Il sistema in anello chiuso è quindi instabile.

### **Esercizio 8.5**

Tutte e quattro le funzioni di trasferimento hanno lo stesso diagramma di Bode del modulo, uguale a quello riportato di seguito:



$L_1$ : il sistema in anello chiuso è instabile (dal criterio di Bode, essendo il guadagno d'anello negativo)

$L_2$ : il sistema in anello chiuso è instabile (il criterio di Bode non è applicabile, ma si può studiare il polinomio caratteristico in anello chiuso)

$L_3$ : il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode, essendo il margine di fase positivo)

$L_4$ : il sistema in anello chiuso è instabile (il criterio di Bode non è applicabile, ma si può studiare il polinomio caratteristico in anello chiuso).