Sistemi di Comunicazione (prof.U.Spagnolini) Esame dell'8 Settembre 2004

L'allievo é invitato a dare una risposta ragionata e succinta a tutti gli argomenti proposti al fine di dimostrare il livello di preparazione globale. Nel progetto si suggerisce di sviluppare i calcoli in forma numerica. Si consiglia una lettura attenta del testo degli esercizi. Per esiti e soluzioni si usi l'indirizzo Internet del corso, per contattare il docente via e-mail: spagnoli@elet.polimi.it.

Si suggerisce di riportare in modo ordinato procedimenti e schemi/disegni e di evidenziare (ove richiesto) i valori numerici soluzione del problema. Al fine di favorire l'autovalutazione si riporta la distribuzione *indicativa* dei punteggi sui singoli esercizi. Si presti attenzione allo svolgimento visto che alcuni valori numerici potrebbero essere superflui o non strettamente necessari.

Progetto *(foglio bianco - 22 punti)*

Si vuole dimensionare un sistema di comunicazione che trasmette su ponte-radio un flusso di 1000 segnali telefonici in TDMA dopo campionamento a 8KHz e quantizzazione a 8bit.

a. punti:2) Si valuti il massimo valore di prob. di errore sul bit $P_b(E)$ che è tollerabile dal sistema di comunicazione in modo che a valle del collegamento la degradazione introdotta dalla trasmissione sia comparabile alla degradazione dalla quantizzazione. Si specifichi sinteticamente quali sono le ipotesi adottate per ricavare $P_b(E)$.

b. punti:2) Dalla banda a radio frequenza $B_{RF} = 27MHz$ alla frequenza di $f_c = 5$GHz si indichi la costellazione ad inviluppo costante M-PSK e lo smussamento spettrale con il parametro di roll-off α che è necessario impiegare per trasmettere il flusso dati di cui al punto precedente occupando tutta la banda disponibile.

c. punti: 6) Si calcoli la massima lunghezza di tratta ammissibile ℓ noti i parametri del collegamento: antenne in trasmissione e ricezione identiche con guadagno guadagno $G_R = G_T = 15dB$, temperatura equivalente di rumore in ingresso all'antenna $T_{in} = 600K$, amplificatore in ricezione con guadagno $A = 30dB$ e fattore di rumore (misurato convenzionalmente a 290K) $F = 6dB$, potenza media trasmessa $P_T = 1W$. *(Si ricordi che $KT_0 = -174dBm/Hz$ per $T_o = 290K$)*

d. punti: 3) Si tracci lo schema a blocchi del trasmettitore e del ricevitore per il sistema appena dimensionato commentando sinteticamente la funzione e le modalità operative di ciascun blocco. *Si richiede di commentare la struttura del trasmettitore/ricevitore di questo esercizio e **NON** di un ricevitore in generale.*

e. punti:2+4) In presenza di selettività in frequenza si decide di dividere il flusso binario in trasmissione in 3 flussi paralleli identici a divisione di frequenza su 3 bande affiancate da 9MHz ciascuna entro cui la selettivià in frequenza può essere trascurata. Si preserva il tipo di modulazione e il più possibile di quanto già calcolato.

e.1 punti 2) Si descriva lo schema blocchi del trasmettitore e del ricevitore in questo caso, magari adattandolo dal punto precedente.

e.2 punti 4) Si assuma che rispetto all'attenuazione $\bar{\gamma}$ calcolata al punto precedente per il dimensionamento del sistema in questo caso le attenuazioni nelle tre bande siano:

$$\gamma_1 = \bar{\gamma} + 3dB$$
$$\gamma_2 = \bar{\gamma} - 1dB$$
$$\gamma_3 = \bar{\gamma} - 2dB$$

si calcoli in questo caso la probabilità di errore verificando la funzionalità (o meno) del sistema. *Si assuma che la potenza di 1W venga equamente divisa (1/3 W per flusso) e che la divisione dei bit sui singoli flussi sia casuale.*

f. punti: 3) Si assuma di suddividere il collegamento al punto a-d su 2 tratte di lunghezza $\ell/2$ in cui si introduce una apparecchiatura intermedia rigenerativa $\boxed{R}$ o non-rigenerativa $\boxed{A}$ secondo i due schemi:

$$\text{schema 1} \quad : \quad \boxed{T_{rasm}} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \boxed{R_{ic}}$$
$$\text{schema 2} \quad : \quad \boxed{T_{rasm}} \rightarrow \boxed{R} \rightarrow \boxed{R_{ic}}$$

Si confrontino le due soluzioni assumendo che le apparecchiature intermedie abbiano analoghe caratteristiche del sistema originale e che i trasmettitori riducano la potenza di conseguenza (...quanto?).

Domande *(foglio azzurro/verde - 21 punti)* *indicare sul foglio la domanda a cui si sta' rispondendo, si riporti brevemente (*max *1 pagina) il procedimento e si evidenzi il risultato finale.* **Le domande con (*) DEVONO essere affrontate e superate con almeno 1/2 del punteggio complessivo.**

D1-azzurro. punti: 2.5*) Si consideri un segnale composito somma di un'onda quadra (o interferenza) a frequenza f_1 =500KHz e potenza P_1 =0dBm e una sinusoide (o segnale di interesse) a frequenza f_2 =1.5MHz e potenza P_2 =

-10dBm. Per l'estrazione del segnale di interesse alla frequenza di 1.5MHz si decida **come** filtrare il segnale composito e si indichi il miglior rapporto segnale/interferente che ci si può aspettare in questa situazione. *(Si presti attenzione alle armoniche dell'onda quadra ...)*

D2-azzurro. punti: 2) Un sistema di trasmissione con $R_b = 100Kb/s$, modulazione BPSK e $P_b(E) = 10^{-5}$ viene adattato (ovvero E_b/N_0 rimane inalterato) per allocare $L = 20$ utenti con un accesso multiplo a divisione di codice in cui a ciascun utente è assegnato un diverso codice pseudocasuale. Si calcoli il minimo fattore di espansione spettrale N (o la minima occupazione spettrale) per garantire ora una prob. di errore $P_b(E) = 10^{-2}$.

D3-azzurro. punti: 3*) In un sistema di trasmissione binario antipodale ± 1 a ritmo $R_b = 1/T = 100Kb/s$ si adotta un filtro in trasmissione con risposta rettangolare $g(t) = (1/\sqrt{T})rect(t/T)$ e in ricezione il filtro adattato alla forma d'onda in trasmissione. Si assuma che il canale sia rappresentato da due cammini con risposta all'impulso

$$h(t) = \delta(t - \tau_o) - \frac{1}{2}\delta(t - \tau_o - T/2)$$

dove τ_o rappresenta il ritardo di propagazione.

1) Si spieghi perchè ai fini del calcolo delle prestazioni del sistema il valore del ritardo τ_o è irrilevante. Come si stima τ_o in ricezione?

2) Si assuma $\tau_o = 0$, calcolare il livello di interferenza intersimbolica valutando il valore del segnale a valle del campionatore (poco prima del decisore a soglia) per la sequenza di ingresso [+1,+1,-1,-1].

3) In assenza di rumore si sarebbe avuta una degradazione della probabilità di errore per effetto dell'interferenza intersimbolica?

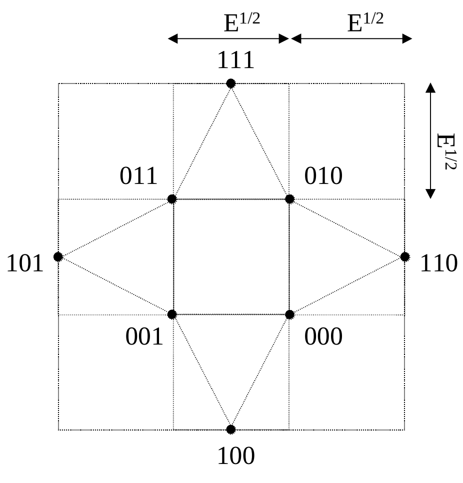
4) Cosa cambierebbe nei punti 2-3 se $\tau_o = T/2$?

D4-azzurro. punti: 2) Un sistema di trasmissione con modulazione QPSK è soggetto a fluttuazioni del SNR (p.e. a causa di interferenza o di affievolimenti di tratta) che si riperquotono sulla prob. di errore. Le fluttuazioni di SNR si presentano con probabilità note (ovvero prob($E_b/N_0 = 3dB$) $= 1/10$ indica che nella frazione 1/10 del tempo totale di collegamento il valore di E_b/N_0 è pari a 3dB), calcolare la prob. di errore **media** del collegamento.

E_b/N_0	prob(E_b/N_0)
6dB	1-(1/10+1/100)
3dB	1/10
$-\infty$dB	1/100

cambio colore foglio azzurro→verde

D5-verde.punti: 2.5+1*) Si consideri la trasmissione di bit equiprobabili mediante il mapping con la costellazione in figura, calcolare il limite superiore della probabilità di errore sul simbolo (mediante lo *union bound*) in funzione di E/N_0 (vedi figura). Si assuma $\bar{E}_s/N_0 = 10dB$ (si ricorda che $\bar{E}_s$ rappresenta l'energia media per ogni simbolo), si calcoli il valore numerico dello union bound e il bound sulla probabilità di errore sul bit. Si dia un giudizio sul mapping (buono o può essere migliorato?).



D6-verde. punti:2*) Un segnale audio con banda 10KHz viene registrato da un sistema analogico con SNR=55dB e lo si vuole trasferire su supporto ottico (si pensi ad un CD) con una capacità compessiva di 200Mbytes (=1600Mbit). A questo proposito si campiona e si quantizza il segnale audio a minima occupazione di memoria e minima degradazione. Successivamente il segnale viene codificato con un codice a rate R=3/4. Si scelgano i parametri liberi in modo da massimizzare la durata della registrazione su supporto ottico e minimizzare (o rendere impercettibile) la degradazione...quant'é la durata complessiva del segnale audio che può essere riversata su supporto ottico?

D7-verde. punti: 2) Si illustrino (max 1 pagina) le implicazioni del teorema di Shannon modificandolo ai fini della valutazione dell'efficienza spettrale di un sistema ideale.

D8-verde. punti: 4*) Si vuole trasmettere un flusso non-codificato a 100Kb/s usando una codifica a blocco con codice BCH (15,11,3) in un sistema che al ricevitore si limita a rivelare l'errore sul blocco e a richiederne la ritrasmissione quando errato (sistema ARQ). Sapendo che per ogni blocco codificato di lunghezza n=15 il codice è in grado di rivelare fino a $\ell = d - 1 = 2$ errori si vuole calcolare il flusso medio codificato comprensivo delle ritrasmissioni. A questo proposito sia $p = 5 \times 10^{-3}$ la probabilità di errore del canale binario simmetrico con errori equiprobabili sui bit e $P(i, n)$ la probabilità di avere i errori in un blocco di lunghezza n

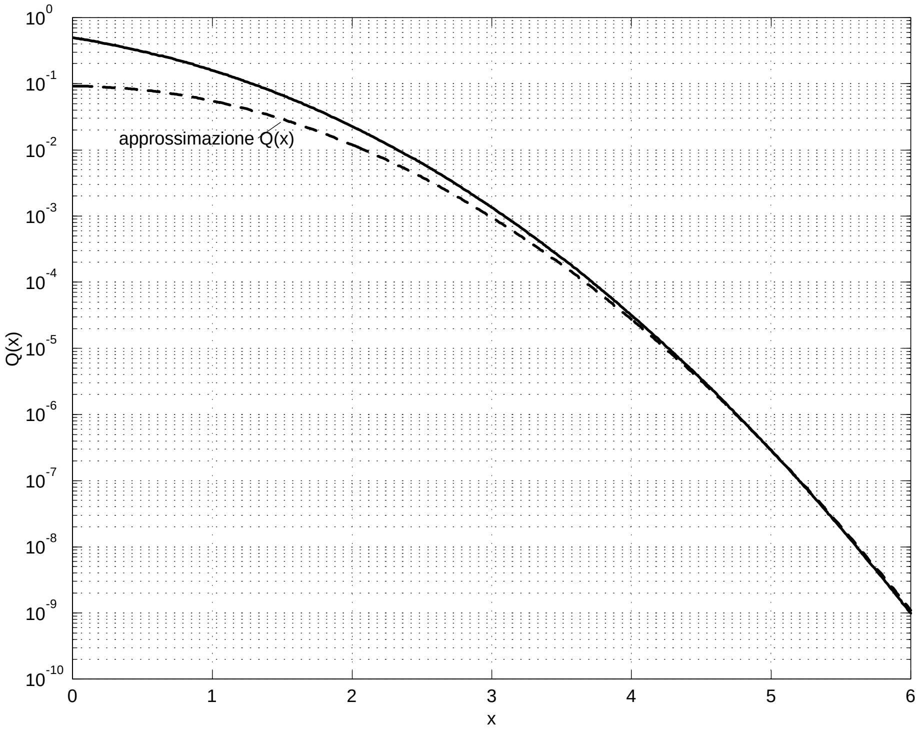
1) si calcoli la probabilità $P(0, 15)$ ovvero di NON avere errore sul blocco di lunghezza $n = 15$,

2) si approssimi la probabilità di ritrasmissione per ogni blocco P_R con la probabiltà di avere 1,2,3,... errori/blocco (l'approssimazione è valida in quanto pur avendo il codice la possibilità di rivelare fino a $\ell = 2$ errori le probabilità di avere errori multipli in qs situazione con $p = 5 \times 10^{-3}$ è sempre meno probabile all'aumentare del numero di errori ovvero $P(1, 15) \gg P(2, 15) \gg ...$)

3) si calcoli ora il flusso medio codificato comprensivo delle ritrasmissioni e si **dimostri** che il rate medio efficace è

$$R_{c,efficace} \simeq \frac{k}{n} \times \frac{1}{1 + np} = \frac{11}{15} \times \frac{1}{1 + 15 \times 5 \cdot 10^{-3}}$$

Si ricorda l'approssimazione $\log_{10} Q(x) \simeq -1.04 - 0.22x^2$ *riportata anche in figura (linea tratteggiata).*



Sol C - Brett. 04 | Nota agli studenti: Al fine di poter usare il Tema d'esame come materiale di studio le soluzioni sono più estese del dovuto

1/

$N = 1000$

$R_b = 64\ kb/s \qquad n_b = 8\ bit$

a) $P_q = \dfrac{4V_p^2/2^{16}}{12} \qquad P_e = \dfrac{4}{3} P_b(E) \cdot V_p^2$

$P_q = P_e \rightarrow P_b(E) = \dfrac{2^{-2 n_b}}{4} \sim 3.6 \times 10^{-6} \longrightarrow \boxed{P_b(E) = 10^{-7}}$

b) $R_b = N \times 64\ kb/s = 64\ Mb/s$

$\dfrac{64\ Mb/s}{\log_2 M}(1+\alpha) = B_{RF} = 27\ MHz \longrightarrow \begin{array}{l} M=8 \rightarrow 8PSK \\ \alpha = 26\% \end{array}$

c) $T_{ep} = T_{in} + T_0(F-1) = 600 + 290 \times (4-1) = 1470\ K$

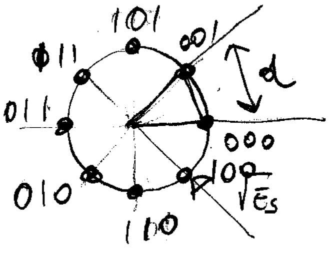
$N_0 = K T_{ep} = K T_0 \cdot \dfrac{T_{ep}}{T_0} = -174\ dBm/Hz + 10\log_{10}\dfrac{1470}{290} = -167\ dBm/Hz$

$P_R = P_T \times \overline{\gamma}$ ..

$\overline{\gamma} = G_T G_R \cdot \left(\dfrac{\lambda}{4\pi \ell}\right)^2 = \underbrace{15\ dB + 15\ dB}_{30\ dB} - \underbrace{20\log_{10} 4\pi}_{21{,}98} - 20\log_{10}(\ell/\lambda).$

$P_R = 30\ dBm + 8\ dB - 20\log_{10}(\ell/\lambda) = 38\ dBm - 20\log_{10}(\ell/\lambda).$

Ricordando che per 8-PSK si ha:



Mapping Grey

$P_s(E) \sim 2Q\left(\dfrac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\dfrac{2\sqrt{E_s}\sin\pi/8}{\sqrt{2N_0}}\right)$

$d = 2\sqrt{E_s}\sin\pi/8$

$P_b = \dfrac{P_s(E)}{3}$ (mapping gray)

$\sin\pi/8 \sim 0{,}383 \ , \ \dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\pi/8 \simeq 0{,}541$

$\dfrac{2}{3} Q\left(\sqrt{\dfrac{E_s}{N_0}}\,0{,}541\right) = 10^{-7} \xrightarrow[\text{tabelle}]{} \sqrt{\dfrac{E_s}{N_0}}\,0{,}541 \simeq 4{,}9$

$$\frac{E_s}{N_0} \sim 82 \qquad P_R = E_s \cdot \frac{1}{T_s} = E_s \cdot \frac{R_b}{3} \quad (8\ PSK)$$

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{3 P_R / R_b}{N_0} \sim 82$$

$$P_R \geq N_0 \times 82 \times \frac{R_b}{3} = -167\ \text{dBm}/\text{Hz} + 19\ \text{dB} + \underbrace{10 \log_{10} \frac{64 \times 10^6}{3}\ \text{Hz}}_{73.2}$$

$$P_R \geq -74.7\ \text{dBm}.$$

dall' eq. ⊙ $\quad +38\ \text{dBm} - 20 \log_{10}(\ell/\lambda) \geq -74.7\ \text{dBm}.$

$$20 \log_{10} \ell/\lambda \leq 112.7\ \text{dB}$$

$$\ell/\lambda \leq 10^{5.6} = 432 \times 10^3$$

$$\ell \leq \frac{3 \times 10^8\ \text{m/s}}{5 \times 10^9/\text{s}} \times 432 \times 10^3 = 25.9 \times 10^3\ \text{m}$$

$$\boxed{\ell \simeq 26\ \text{km}}$$

d) Vedi libro di testo/appunti/ecc...
Nota che è necessario riportare: mapping, recupero sync. di portante e simbolo, modulatore/demodulat. I&Q, ecc... tutto quanto per un sistema 8 PSK.

e) $P_b(E) = \frac{1}{3} P_{b,1}(E) + \frac{1}{3} P_{b,2}(E) + \frac{1}{3} P_{b,3}(E)$

sui 3 flussi.

$\gamma_1 = \bar{\gamma} + 3\text{dB} \rightarrow$ attenuazione aggiuntiva $\rightarrow \quad P_{b,1} = \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{3\text{dB}}} \times 0.541\right)$

$$= \frac{2}{3} Q\left(\underbrace{\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\, 0.541}_{4.9 \text{ dal punto c}} \times 0.707\right)$$

$$P_{b_1} = \frac{2}{3} Q(4.9 \times 0.707) = \frac{2}{3} Q(3.46) \underset{\text{(tabella)}}{\simeq} 2/3 \times 2 \times 10^{-4} \sim 1.3 \times 10^{-4} \,($$

$$P_{b,2} = \frac{2}{3} Q\Big(4.9 \times \underbrace{\sqrt{10^{1/10}}}_{1.12}\Big) \sim \frac{2}{3} Q(5,5) \underset{\text{(tabelle)}}{=} 2/3 \times 10^{-8}$$

$$P_{b,3} = \frac{2}{3} Q\Big(4.9 \times \underbrace{\sqrt{10^{2/10}}}_{1.26}\Big) \simeq \frac{2}{3} Q(6.17) \underset{\text{(Tabelle)}}{=} 2/3 \times 5 \times 10^{-10}$$

$$P_b = \frac{1}{3}\left(1.3 \times 10^{-4} + \frac{2}{3} \times 10^{-8} + 3{,}3 \times 10^{-10}\right) \sim 4 \times 10^{-5}$$

f) Rigenerative : $P_b(\mathcal{E}) \sim P_{b,1}(\mathcal{E}) + P_{b,2}(\mathcal{E})$ per cui le $P_b(\mathcal{E})$ nelle singole tratte deve essere ridotta $\times 1/2$ con variazioni delle P_T di ~~frazioni~~ di dB rispetto alle riduzioni di 6 dB per $\ell/2$

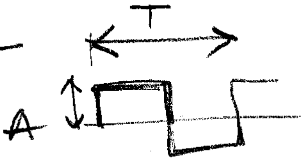
non-rigenerative: somma il rumore sulle 2 tratte da cui si ha una degradazione di 3dB sul SNR.

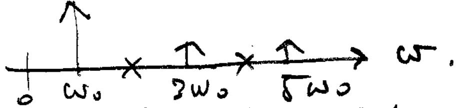
P_T singole tratte $\rightarrow$ 30 dBm.

P_T rigenerative $\rightarrow$ 24 dBm

P_T non-rig. $\rightarrow 30\,\text{dBm} - \underbrace{6\,\text{dB}}_{\text{riduzione tratte } 1/2} + \underbrace{3\,\text{dB}}_{\text{degradaz. SNR}} = 27\,\text{dBm}$

Domande





$$\Longleftrightarrow \frac{2A}{\pi}\sin\omega_0 t + \frac{2A}{3\times\pi}\sin 3\omega_0 t + \dots$$

D1) (Dalle teoria dei segnali)

$$P_1 = A^2.$$

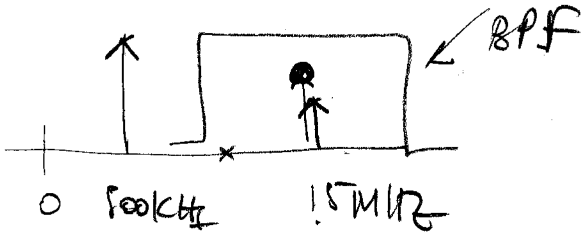
$$P_1(\omega_0) = \frac{4A^2}{\pi^2}\times\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{2}{\pi^2}}_{-7\,dB}\cdot A^2 = -7\,dBm$$

$$P_1(3\omega_0) = \underbrace{\frac{2}{\pi^2}}_{-7\,dB}\times\underbrace{\frac{1}{9}}_{-9.5\,dB}\times\underbrace{A^2}_{0\,dBm} = -16.5\,dBm.$$

$$P_2(1.5\,MHz) = -10\,dBm.$$

$$SNR = -10\,dBm + 16.5\,dBm = 6.5\,dB.$$

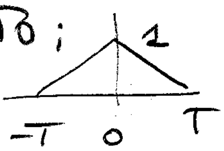
Filtro p. banda in 1.5 MHz con largh. di banda < 2 MHz.



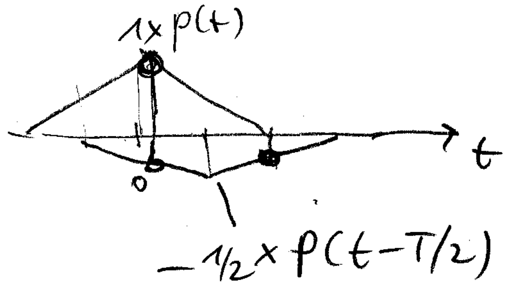
D2) Vedi temi d'esame precedenti

D3) a valle del f. adattato;

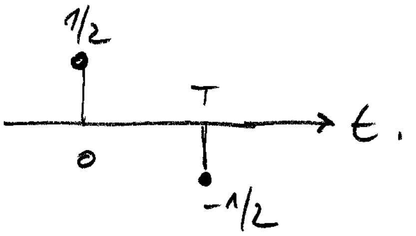
$$p(t) = g(t) * g(-t)$$



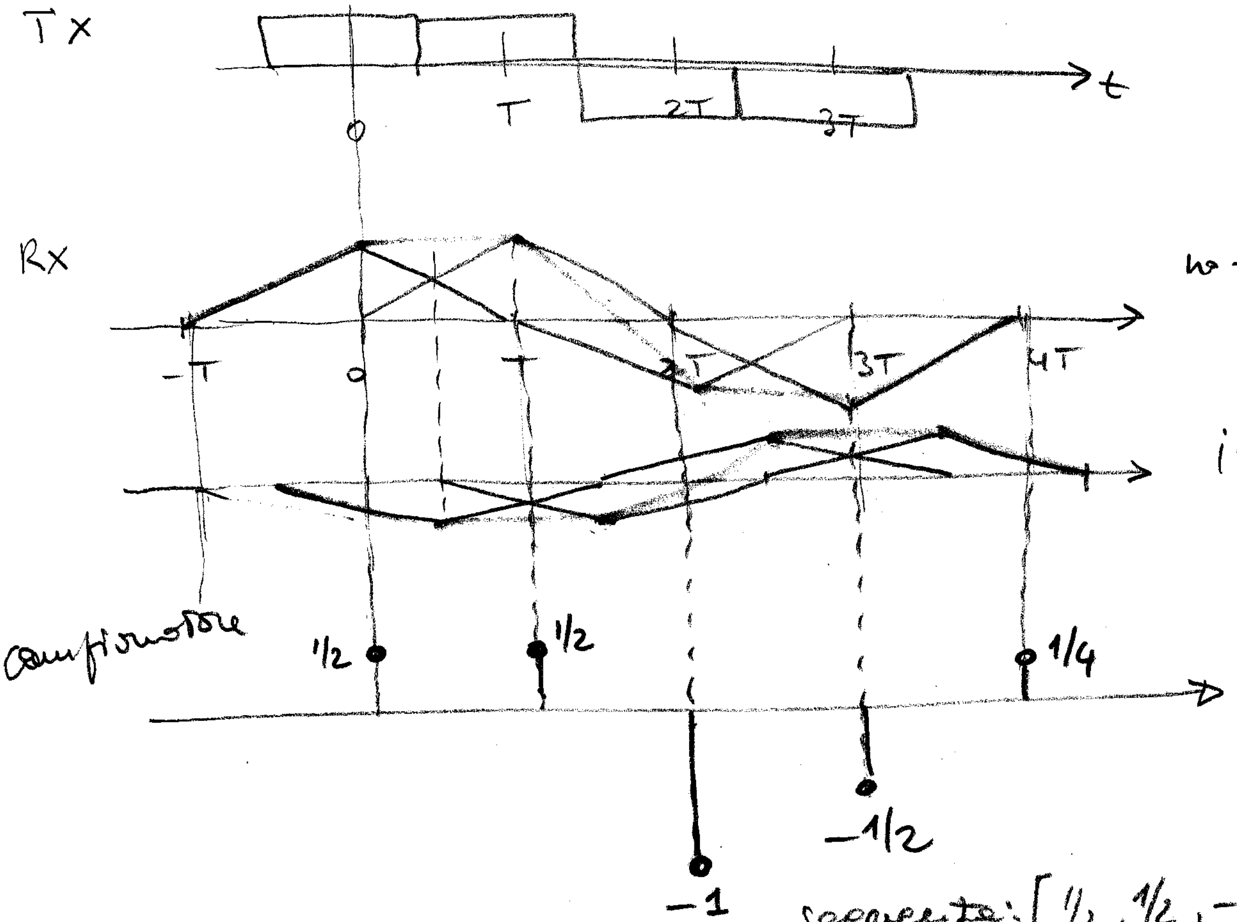
$$y(t) = x(t) * \underbrace{p(t) * h(t)}_{p_{eq}(t)}$$



risposta (campioni) a 1 impulso



oppure separando segnale utile (no-isi) e isi:



sequenza uscite: [1/2, 1/2, -1, -1/2, 1/4]

*) Anche in presenza di isi <u>in questo caso</u> (non è generale) non si ha alcuna degradazione.

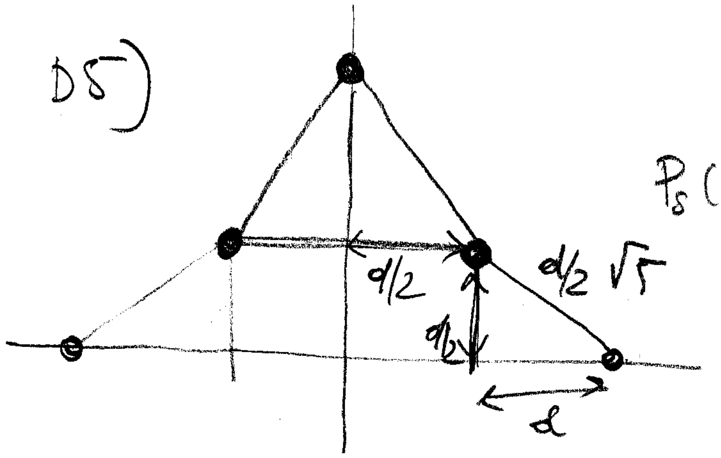
*) τ_0 si recupera con il blocco di recupero del sincronismo di simbolo.

*) Se $\tau_0 = T/2$ è come se il campionatore traslasse di $-T/2$, la sequenza di uscita è: $1/2, 1/2, -1/2, -1/2, 0, 0, \dots$ ancora senza conseguenze sulle $P_b(E)$.

D4) $P_b(\mathcal{E}) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$

$$\overline{P_b(\mathcal{E})} = \underbrace{\frac{1}{100}\times 0.5}_{5\times10^{-3}} + \underbrace{\frac{1}{10}\times \underbrace{Q(2)}_{2\times10^{-2}}}_{2\times10^{-3}} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{10}-\frac{1}{100}\right)\underbrace{Q(2\sqrt{2})}_{2\times10^{-3}}}_{1.8\times10^{-3}} \cong 8.8\times10^{-3}$$

D5)



$P_s(\mathcal{E}) =$

$000 \to 010$, $000 \to 001$

$$P_s(\mathcal{E}) \leq \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}{}' p(s_i)\, Q\left(\frac{d_{ij}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{1}{8}\Bigg(4 \times 2 \times Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) +$$

4: # punti interni; 2: # punti più vicini

$$+ 4 \times 2 \times Q\left(\frac{d/2\,\sqrt{5}}{\sqrt{2N_0}}\right) + 4\times 2\times Q\left(\frac{d/2\,\sqrt{5}}{\sqrt{2N_0}}\right)\Bigg)$$

pti esterni; $111 \to 011$, $111 \to 010$; # pti interni; transiz. $000 \to 110$, $000 \to 100$

$$= Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + 2\,Q\left(\frac{d\sqrt{5}/2}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

prob.

$$\overline{\mathcal{E}_s} = 4\times\frac{1}{8}\times\frac{d^2}{2} + 4\times\frac{1}{8}\times\frac{9}{4}d^2 = d^2\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{8}\right) = \frac{11}{8}d^2 \sim 1.38\,d^2$$

interni; esterni

$$\frac{\bar{E}_s}{N_0} = 10\,dB \rightarrow \frac{\bar{E}_s}{N_0} = 10 \rightarrow 1.38\,\frac{d^2}{N_0} = 10 \rightarrow \frac{d^2}{N_0} = 7.27$$

$$\frac{d}{\sqrt{N_0}} = 2.7$$

$$P_s(E) \le \underbrace{Q\left(\underbrace{\frac{2.7}{\sqrt{2}}}_{1.91}\right)}_{2\times 10^{-2}} + 2\,\underbrace{Q\left(\underbrace{2.7\,\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}_{2.13}\right)}_{\cancel{2}\,10^{-2}} \simeq \cancel{0.04}\ 3\times 10^{-2}$$

$$P_b(E) \cong \sum_{ij}{}' \frac{n_{ij}}{N_{tot}}\,P_s(E)\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times P_s(E)\Big(\underbrace{1}_{111\leftrightarrow 010} + \underbrace{1}_{111\leftrightarrow 011} + 2+1+2+1+ 2+1+\underbrace{1+1+1+1}_{\text{interni}}\Big)$$

l'approx. è legata al fatto che si considera identica la $P_s(E)$ per ogni punto della costellazione

$$= \frac{15}{24}\,P_s(E) \simeq 0.625\,P_s(E)$$

nota che $\quad P_s(E) \le P_b(E) \le P_s(E)/8$

quindi il mapping è abbastanza ragionevole.

D6) quantizziamo: $\quad SNR_q \sim 6N_b - 6 \rightarrow 6(N_b-1) \geq 55$

$f_c = 20\,kHz$ $\quad \boxed{N_b = 11\ bit}$

$R_b = 220\,kb/s$

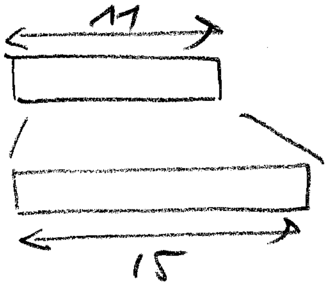
$$R_{b,codif.} = R_b/R = 220\times\frac{4}{3} = 293\,kb/s$$

$$0.293\,Mb/s \times T = 1600\,Mb \rightarrow T = \frac{1600}{0.293} \sim 5.45\times 10^3\,sec.$$

$(90.9\ \underline{min})$.

D7) Vedi testo (fig. 9.16 e sez. 9.11)

D8)



Nb: Si risolve in modo completo (non come da testo - semplificato d'esame) (8

$$P(0,n) = (1-p)^n \longrightarrow \underbrace{1-P(0,n)}_{\text{prob. di avere il blocco in errore}} = 1-(1-p)^n \sim n \cdot p$$

$$d_{min} = 3$$

$$l+1 = d_{min} \rightarrow l = 2$$

$$P_{e,\text{non rilevabile}} = \sum_{i=l+1}^{n=15} P(i,n) \simeq P(l+1,n) \sim \binom{n}{l+1} p^{l+1}$$

nello specifico:

$$P_{e,\text{non rivel.}} \simeq \binom{15}{3} \left(5\times10^{-3}\right)^3 = \underbrace{\frac{15!}{3!\,(15-3)!}}_{\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2}} \cdot 5^3 \times 10^{-9} \simeq 5.7\times10^{-5}$$

Visto che $1-P(0,n) \sim n\times p = 15\times5\times10^{-3} = 7,5\times10^{-2}$ è molto maggiore di 5.7×10^{-5} allora se si ha un errore q.s. è causato da uno o due errori sul blocco → ritrasmissione.

$$P_{re,\text{rivel.}} \simeq n\,p = 7,5\times10^{-2}$$

quindi in media per ogni blocco n vengono trasmessi un numero di bit $n\,(1+np)$ da cui:

$$R_{c,eff.} \simeq \frac{k}{n(1+np)}$$