

L'allievo è invitato a dare una risposta ragionata e succinta a tutti gli argomenti proposti al fine di dimostrare il livello di preparazione globale. Nel progetto si suggerisce di sviluppare i calcoli in forma numerica. Si consiglia una lettura attenta del testo degli esercizi. Per esiti e soluzioni si usi l'indirizzo Internet del corso, per contattare il docente via e-mail: spagnoli@elet.polimi.it.

Si suggerisce di riportare in modo ordinato procedimenti e schemi/disegni e di evidenziare i valori numerici soluzione del problema. Al fine di favorire l'autovalutazione si riporta la distribuzione *indicativa* dei punteggi sui singoli esercizi. Si presti attenzione allo svolgimento visto che alcuni valori numerici potrebbero essere superflui o non strettamente necessari.

Domanda di ammissione (obbligatoria) (foglio VERDE con nome)

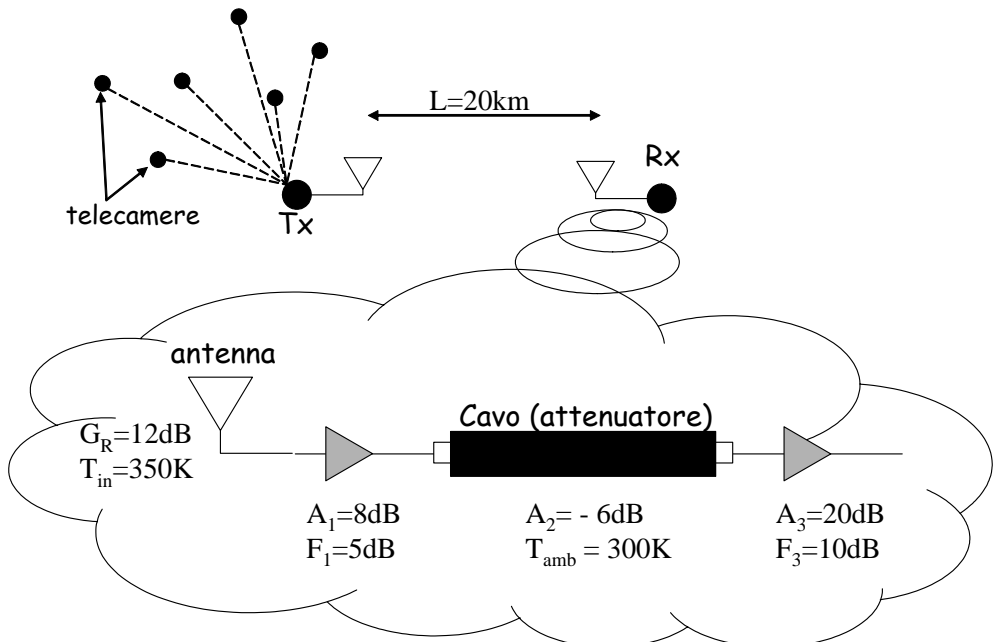
Si consideri un segnale $x(t)$ somma di quattro segnali sinusoidali alle frequenze f_i , potenze P_i e sfasamenti θ_i come riportato di seguito. Si calcoli la potenza (in dBm) del segnale somma $x(t)$.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_3 = 5MHz, & f_2 &= f_4 = 2 \times 5MHz = 10MHz \\
 P_1 &= P_2 = 0dBm, & P_3 &= P_4 = 3dBm \\
 \theta_4 &= \theta_3 + \pi/2, & \theta_2 &= \theta_4 - \pi, & \theta_2 &= \theta_1 + \pi/2
 \end{aligned}$$

Progetto (foglio bianco - 25 punti)

Si vuole dimensionare il collegamento mediante ponte radio in una rete di raccolta dati per il monitoraggio ambientale in figura. In particolare, si hanno 60 telecamere poste in vari punti di misura nel territorio (si pensi al controllo degli accessi nell'area del centro del comune di Milano) che raccolgono immagini con un ritmo di una immagine ogni 10secondi, risoluzione 800×600 pixel in bianco e nero per ogni immagine e quantizzazione 8bit/pixel. Il flusso dati complessivo viene convogliato nel nodo di raccolta e trasmesso a distanza $L=20$ km al centro per l'elaborazione e il controllo delle targhe.

Il flusso complessivo R_b viene trasmesso con una modulazione M-QAM su una banda $B_{RF} = 4.2MHz$ alla frequenza della portante di $f_c = 4GHz$, le antenne di trasmissione e ricezione sono identiche con guadagno di 12dB mentre la sezione radiofrequenza dell'apparato di ricezione è riportata in figura (i fattori di rumore sono riferiti alla temperatura di $T_0 = 290K$, si ricorda poi che $KT_0 = -173dBm/Hz$).



1) Valutare la dimensione della modulazione M -QAM e il massimo roll-off α compatibile con l'occupazione di banda B_{RF} .

2) Tracciare lo schema a blocchi **completo** per il **solo apparato di ricezione** che segue a valle della sezione RF in figura assumendo che venga fatta una conversione alla frequenza intermedia di $f_{IF} = 200MHz$ prima della demodulazione. Si richiede di descrivere sinteticamente la funzione di ogni blocco specificando con chiarezza banda passante, guadagno e forma dei filtri impiegati (quando necessari).

3) Si calcoli la massima probabilità d'errore tollerabile dal sistema $P_b(E)$.

4) Si calcoli la potenza minima necessaria in trasmissione per garantire la qualità del collegamento al punto precedente.

5) Si assuma di suddividere il collegamento su $L=20km$ in 4 tratte non-rigenerative con uguali apparati di ricezione e trasmissione, si valuti ora la minima potenza per ciascuno dei trasmettitori.

La tratta di collegamento è ora affetta da affievolimento casuale con densità di probabilità di Rayleigh. Si richiede di confrontare due soluzioni possibili:

6) Si decide di aumentare la potenza di trasmissione di 10dB e di inserire un sistema per diversità spaziale con 2 antenne in ricezione, si calcoli la probabilità di fuori servizio in questo caso.

7) Si decide di volta in volta di trasmettere con modulazione BPSK solo una¹ delle $N=60$ immagini acquisite scelta a caso preservando la medesima potenza di trasmissione nel dimensionamento al punto 4 (usando quindi la eventuale maggiore potenza per compensare gli affievolimenti). Si valuti ora la probabilità di ricevere correttamente la singola immagine come composizione della scelta casuale dell'immagine (operata al trasmettitore) e del fuori servizio della tratta.

8) Quante immagini sarebbe stato possibile allocare con modulazione BPSK a parità di banda B_{RF} e come si sarebbe modificata la probabilità di ricevere correttamente la singola immagine.

Domande (fogli giallo - 18 punti) indicare sul foglio la domanda a cui si sta' rispondendo, si riporti brevemente (max 1 pagina) il procedimento e si evidenzi il risultato finale.

D1-giallo. punti: 5)

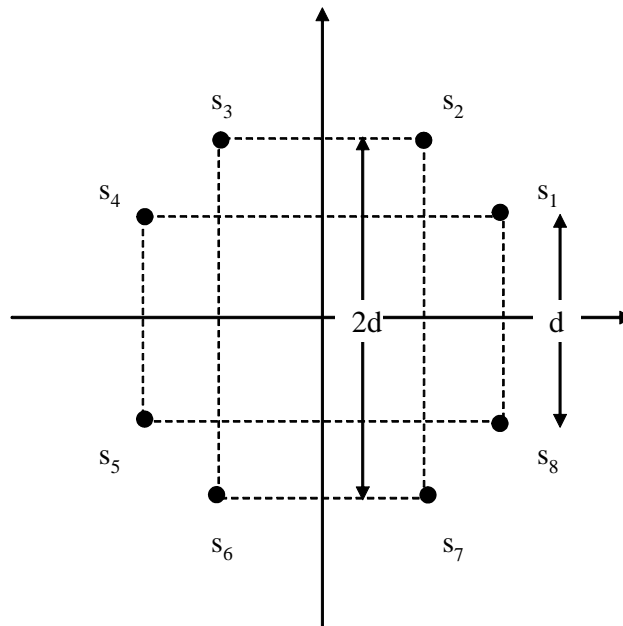
In una trasmissione binaria antipodale in banda base (2PAM) a ritmo $R_b = 1/T_b$ il trasmettitore ha una sagomatura con impulsi rettangolari di durata T_b , il canale è ideale e il ricevitore è ottimo. In queste condizioni il sistema ha una probabilità di errore di $P_b(E) = 10^{-6}$. Ora il canale si modifica, non è più ideale ma ha una risposta all'impulso

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - T_b)$$

si calcoli in questo nuovo caso la probabilità di errore conteggiando l'effetto dell'interferenza (se presente). Come si potrebbe estendere il risultato sopra se il canale fosse $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t - T_b)$?

D2-giallo. punti: 4)

Per la trasmissione di simboli equiprobabili si consideri nello spazio dei segnali la costellazione riportata in figura. Si assegni un mapping ragionevole e si calcoli la probabilità di errore sul bit assumendo che $E_s/N_0 = 12dB$.



¹In realtà se ne potrebbero trasmettere di più a parità di banda occupata ma per semplicità si adotta questa soluzione *didattica*.

D3-azzurro. punti: 9)

Un sistema di comunicazione a frequenza di 10Mb/s modulazione BPSK è dimensionato in modo da avere una probabilità di errore $P_b(E) = 10^{-3}$ in assenza di codifica. Si vogliono confrontare due diversi schemi di codifica a blocco BCH e decodifica bit-a-bit (decodifica hard) aggiunti al sistema pre-esistente caratterizzati dai seguenti parametri (n,k,d) : primo codice $(n_1, k_1, d_1) = (15, 11, 3)$ mentre per il secondo $(n_2, k_2, d_2) = (511, 475, 9)$.

a) Si valuti nei due casi la prob. di errore adottando il medesimo modulatore/demodulatore dimensionato per garantire $P_b(E) = 10^{-3}$ nel sistema senza codifica (con i relativi parametri) e si valuti il flusso netto garantito.

b) Tra i due schemi di codifica si scelga quello con la probabilità di errore maggiore di cui al punto precedente e si valuti il valore del rapporto E_b/N_0 che garantisce $P_b(E) \leq 10^{-12}$.

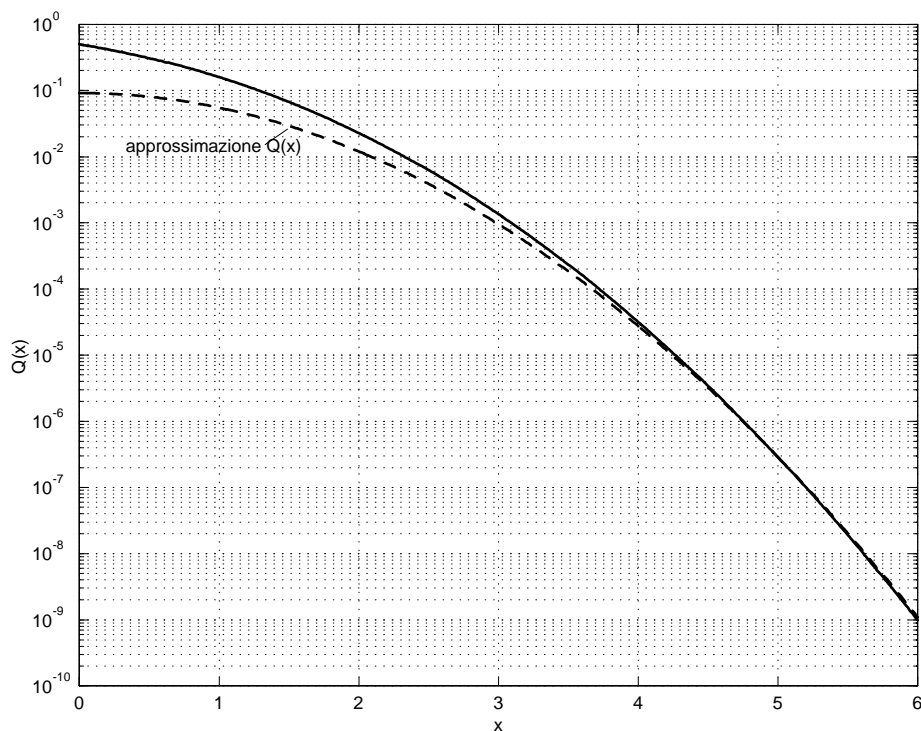
c) In caso di decodifica ottima (soft) si valuti (in forma approssimata) il valore di E_b/N_0 che garantisce $P_b(E) \leq 10^{-12}$.

d) Si descriva brevemente il significato delle grandezze E_b ed E_s nei sistemi codificati.

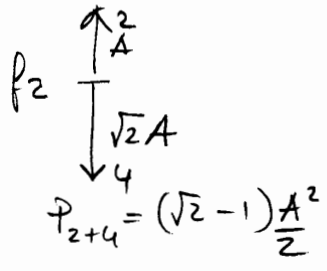
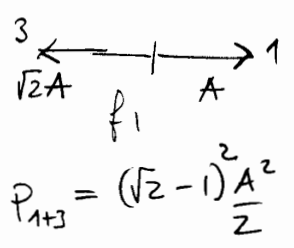
e) Discutere sinteticamente vantaggi/svantaggi della decodifica hard e soft.

f) Si indichi quale sarebbe il valore minimo del rapporto E_b/N_0 per garantire la trasmissione di cui sopra con la medesima efficienza spettrale di un BPSK.

Si ricorda l'approssimazione $\log_{10} Q(x) \simeq -1.04 - 0.22x^2$ riportata anche in figura (linea tratteggiata).



Ammissione (olivero dal Tema 13/2/08!):



$$P_{tot} = P_{1+2} + P_{3+4} = 2 \times (\sqrt{2}-1)^2 \cdot \frac{A^2}{Z} =$$

(somma per $f_1 \neq f_2$)

$$= 0,34 \text{ mW} = -4,6 \text{ dBm}$$

proprietà $800 \times 600 \times 60 \times 8 = 230 \text{ Mb/secondo} \rightarrow R_b = 23 \text{ Mb/s}$

64QAM $\rightarrow R_s = R_b/6 \approx 3,8 \text{ Ms/s}$

$\delta \approx 10\%$

Apparati convertere \rightarrow veri filino rimozione spettro immagine (circuito D2 - Tema 28/2/07)

$$P_b(f) \leq \frac{Z^{-1/6}}{4} \rightarrow P_b(f) \sim 10^{-7}$$

Profiling Gray: $\frac{4}{2} \log_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 E_s}{(M-1) N_0}} \right)$

$\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \frac{1}{21} \sim 5 \rightarrow \frac{E_s}{N_0} \sim 525 = 27,2 \text{ dB}$

$\frac{4}{6} Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \frac{1}{21} \right) = 10^{-7}$

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_s R_s}{N_0 R_s} = \frac{P_R}{N_0 R_s} = 27,2 \text{ dB} \rightarrow P_{R, \text{min}} = 27,2 \text{ dB} + 10 \log_{10}(N_0 R_s)$$

$$T_{ep} = 350 + 290 \times (3,16^{-1}) + 200 \times (4-1) \frac{1}{6,31} + 290 \times (10-1) \times \frac{4}{6,31} \approx 2770 \text{ K}$$

$F_1 = 50 \text{ dB}$ attenuat. -6 dB $F_3 = 100 \text{ dB}$

$$k T_{ep} = k T_0 \cdot \frac{T_{ep}}{T_0} = -173 \text{ dBm/Hz} + 10 \log_{10} \frac{2770}{290} \approx -163 \text{ dBm/Hz}$$

$$P_R = P_T \cdot \gamma \quad \lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 10^9 \text{ 1/s}} = 6 \text{ cm} \quad \gamma = \frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (L/\lambda)^2}$$

$24 \text{ dB} - 21 \text{ dB} - 20 \log_{10} \frac{L}{\lambda} = 110 \text{ dB}$

$$P_{R, \text{min}} = 27,2 \text{ dBm} - 163 + 10 \log_{10}(3,8 \times 10^6) = -70 \text{ dBm} \quad \gamma = -107 \text{ dB}$$

$$P_{T, \text{min}} = -70 \text{ dBm} + 107 \text{ dB} = 37 \text{ dBm} (\sim 5 \text{ W})$$

4 tratte non-interferitive: $P_T = 37 \text{ dBm} + 6 \text{ dB} + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 31 \text{ dBm}$

aumento x 4 trasmissioni $L \rightarrow L/4$ (-12 dB)

ModB = α = maxime fading, $P_{fs} = \frac{1}{\alpha^2} = 10^{-2}$ (olivero $\alpha = 2$)

$$R_b = 800 \times 600 \times \frac{8}{10^6} = 384 \text{ kb/s}$$

$$P_b(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \leq 10^{-7}$$

$$\frac{2E_s}{N_0} \sim 5,2^2 \rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 11,3 \text{ dB}$$

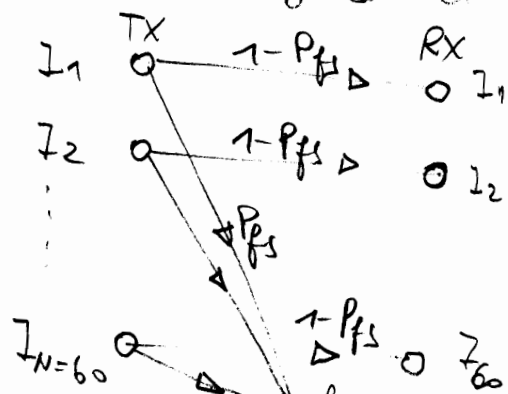
Con BPSK sarebbe stato possibile allocare fino a 10 immagini con un'eff. $\approx 9\%$ visto

$$\text{che } (1+\alpha) = \frac{4,2 \text{ M/Hz}}{10 \times 0,384} = 1,09$$

l'impedenza di $E_s/N_0 = 27,2 \text{ dB}$ (parita' di P_T) e' equivalente a un margine di fading $\alpha = 27,2 - 11,3 \approx 16 \text{ dB}$.

$$P_{fs} = \frac{1}{10^{1,6}} \sim 2,5 \times 10^{-2}$$

Si consideri ora il set di $N=60$ immagini:



$$P^2(I_{ricevuto} = I_k) = P^2(I_{ricevuto} = I_k | I_{TX} = I_k) P(I_{TX} = I_k)$$

$$P^2(I_{ricevuto} = I_k) = \frac{1}{60} (1 - 2,5 \times 10^{-2}) = 1,6 \times 10^{-2}$$

$$P^2(I_k) = \frac{1}{60} = P(I_{TX} = I_k) \quad P^2(I_{ricevuto} \neq I_k) = \frac{59}{60} (1 - 2,5 \times 10^{-2}) \approx 0,958$$

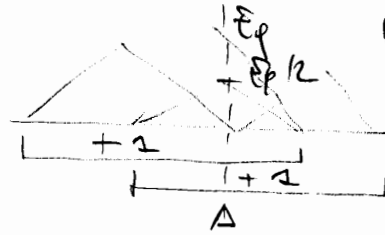
(scelta a caso)

Allocaudo ora pacchetti di 10 immagini scelte a caso; $P(I_{TX} = I_k) = \frac{10}{60}$
 e quindi $P^2(I_{ricevuto} = I_k) = \frac{10}{60} (1 - 2,5 \times 10^{-2}) \approx 10^{-1}$

D1 $P_b(\epsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = 10^{-6} \rightarrow 2E_p/N_0 = 4.8^2$ 3

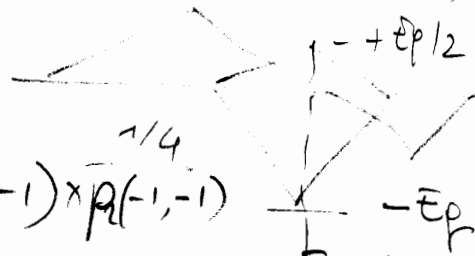
dal canale $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-T)$
 Sovrapposizione di 2 bit:

condizioni favorevoli per
 le rivelazioni: $(+1, +1)$
 $(-1, -1)$



$$E_p + \frac{E_p}{2} = \frac{3}{2} E_p$$

condizioni sfavorevoli per
 le rivelazioni $(+1, -1)$
 $(-1, +1)$



$$E_p + \frac{E_p}{2} = -\frac{E_p}{2}$$

$$P_b(\epsilon) = P_b(\epsilon | +1, +1) \times \underbrace{P(+1, +1)}_{1/4} + P_b(\epsilon | -1, -1) \times \underbrace{P(-1, -1)}_{1/4}$$

$$+ P_b(\epsilon | +1, -1) \times \underbrace{P(+1, -1)}_{1/4} + P_b(\epsilon | -1, +1) \times \underbrace{P(-1, +1)}_{1/4}$$

$$= \frac{1}{2} P_b(\epsilon | 1, 1) + \frac{1}{2} P_b(\epsilon | 1, -1) =$$

$$= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} \frac{E_p}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_p}{2} \frac{1}{N_0}}\right) =$$

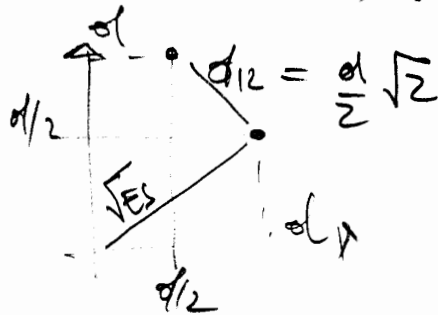
$$= \frac{1}{2} Q\left(\underbrace{4.8 \times \sqrt{\frac{3}{2}}}_{2 \times 10^{-9}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\underbrace{4.8/\sqrt{2}}_{3 \times 10^{-9}}\right) \sim 1.5 \times 10^{-9}$$

\rightarrow Parametro identico per canale $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t-T)$

D2 $\epsilon_s = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + d^2 = \frac{5}{4} d^2$

Union bound, convolution encoder (document) 4
 $S_1 \leftrightarrow S_2, S_3 \leftrightarrow S_4, S_5 \leftrightarrow S_6, S_7 \leftrightarrow S_8$

$P_s(\epsilon) \approx \frac{1}{8} \times 8 \times Q\left(\frac{d_{12}}{\sqrt{2N_0}}\right) =$



$= Q\left(\frac{d\sqrt{2}/2}{\sqrt{2N_0}}\right) =$

$= Q\left(\frac{\sqrt{4/5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\epsilon_s}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\epsilon_s}{N_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = Q(1.79) \sim 4 \times 10^{-2}$

Mapping Gray (vedi 8PSK) $P_b(\epsilon) = \frac{4}{3} \times 10^{-2}$

D3 (15, 11, 3) $\rightarrow R_1 = 11/15 \sim 0.73, t_1 = 1$

(511, 475, 9) $\rightarrow R_2 = 475/511 \sim 0.93, t_2 = 4$

$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3}$
 $E_b/N_0 \sim 6.5 \text{ dB}$

$P_{b, \text{cool } 1}(\epsilon) = \binom{t_1-1}{t_1} p^{t_1+1} = \binom{14}{1} p^2 = \frac{14 \cdot 13!}{(14-1)! 1!} (10^{-3})^2 = 1.4 \times 10^{-5}$

$R_{b,1} = 7.3 \text{ Mb/s}$

$P_{b, \text{cool } 2}(\epsilon) = \binom{t_2-1}{t_2} p^{t_2+1} = \binom{510}{4} p^5 = 2.7 \times 10^9 \times (10^{-3})^5 = 2.78 \times 10^{-6}$

$R_{b,2} = 9.3 \text{ Mb/s}$

Scoprendo (15, 11, 3):

$P_b(\epsilon) = 14 \times \left[Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot R_1}\right)\right]^2 = 10^{-12}$

$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot 0.73}\right) \approx 2.6 \times 10^{-7} \rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot 0.73} \sim 5.0$

$\frac{E_b}{N_0} \sim 12.34 \text{ dB}$

Guadagno Soft $\approx R_1 \cdot d_1 = \frac{11}{15} \times 3 \approx 3.4 \text{ dB}$
 (in questo sist. non cool'f.)

$G_{\text{hard}} \approx R_1(t_1+1) = 1.6 \text{ dB}$
 (approx)

punto f (altri punti, vedi teoria): Shannon per eff. spettrale 1 bit/s/Hz

$\frac{R_b}{B} = 1 \text{ bit/s/Hz} = \log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) = \log_2\left(1 + \frac{E_b \times R_b}{N_0 \times B}\right) = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\right) \rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 0 \text{ dB}$