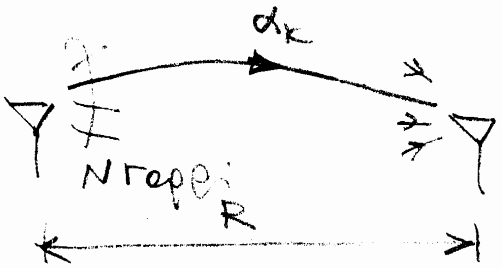
FADING & COMBINING



(vedi Haykin pp. 71-73)

$A_T \cos \omega_0 t$

$$y_R = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_T \alpha_k}{R} \cos\left[\omega_0 (t - \tau_k)\right]$$

$$P_T = \frac{A_T^2}{2}$$

$$P_R = \sum_k \frac{A_T^2 \alpha_k^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{(potenza istantanea)}$$

$$\overline{P}_R = \frac{A_T^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot N \cdot E[\alpha_k^2]$$

$$\tau_k = \frac{R_k}{c} \rightarrow \omega_0 \tau_k = 2\pi \cdot \frac{R_k}{\lambda} = \phi_k \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$$

Normalizzando le potenze ricevute (medie) al dimensionamento che si avrebbe in assenza di multipercorso si ha:

$$\overline{P}_R = P_T \cdot \frac{1}{R^2} \longrightarrow E[\alpha_k^2] = 1/N$$

$$y_R = \frac{A_T}{R} \cdot \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) =$$

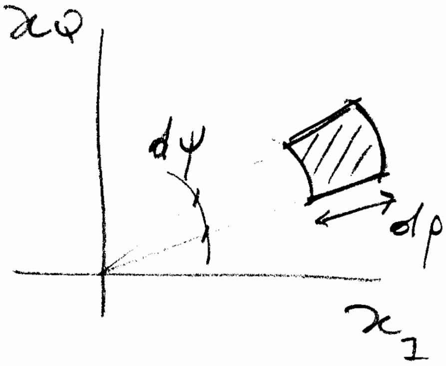
$$= \underbrace{\frac{A_T}{R}\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos\phi_k\right)}_{x_I} \cos \omega_0 t - \underbrace{\frac{A_T}{R}\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sin\phi_k\right)}_{x_Q} \sin \omega_0 t$$

$$\left.\begin{aligned} & E[x_I] = E[x_Q] = 0 \\ & E[x_I^2] = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{E[\alpha_k^2]}_{1/N} \underbrace{E[\cos^2\phi_k]}_{1/2} = 1/2 = E[x_Q^2] \end{aligned}\right\} \text{pdf gaussiane}$$

$$y_R = \frac{A_T}{R}\left[x_I \cos\omega_0 t - x_\varphi \sin\omega_0 t\right] =$$

$$= \frac{A_T}{R}\cdot\rho\cos(\omega_0 t + \psi)$$

$$\rho = \sqrt{x_I^2 + x_\varphi^2} \quad \text{(ampiezza)}$$

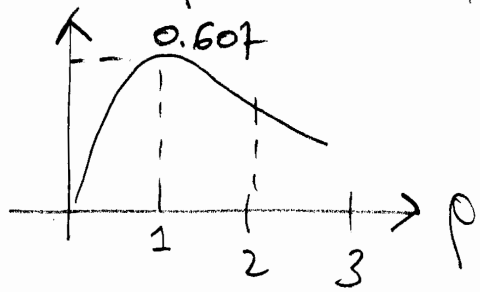


cambio di variabili:

$$f_{\rho,\psi} = f_{x_I,x_\varphi}\cdot\underbrace{\rho\, d\rho\, d\psi}_{\substack{\text{jacobiano}\\ \text{della trasf.}\\ \text{rettangolare}\to\text{polare}}}$$

$$f_{\rho,\psi} = f_\rho \times f_\psi = \underbrace{\frac{\rho}{1/2}\, e^{-\rho^2/2\times 1/2}}_{f_\rho} \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{f_\psi}$$

$$f_\rho(\rho) = 2\rho\, e^{-\rho^2}$$



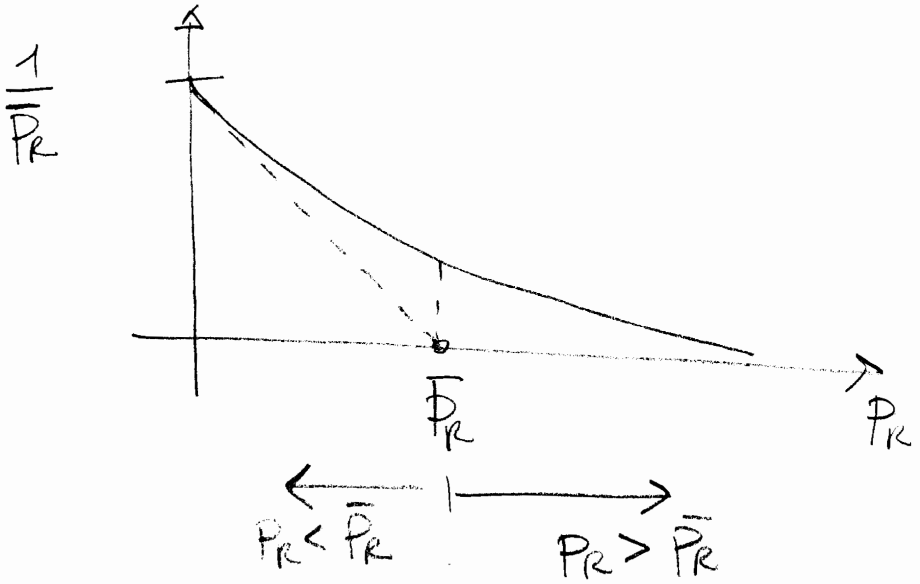
potenza istantanea

$$P_R = \frac{A_T^2}{R^2}\cdot\frac{\rho^2}{2} \qquad E[P_R] = \frac{P_T}{R^2}E[\rho^2] = \frac{P_T}{R^2}E\Big[\underbrace{x_I^2}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{x_Q^2}_{\frac{1}{2}}\Big] = \frac{P_T}{R^2}$$

$$P_R = \bar{P}_R\cdot\rho^2 \quad \text{(è una v. casuale)}$$

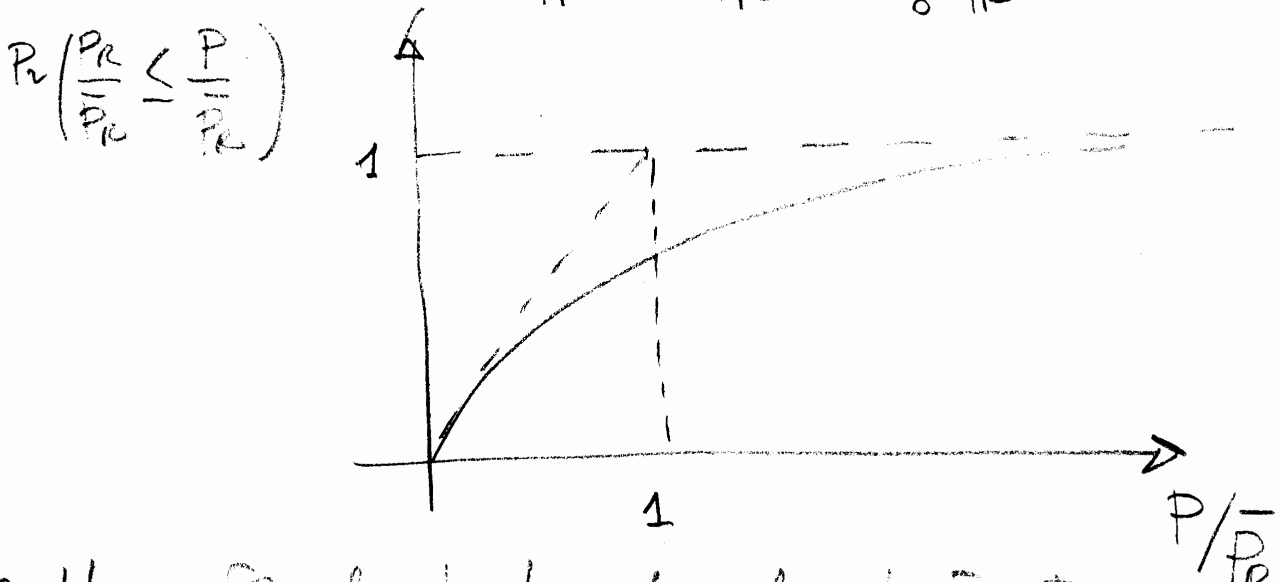
trasf. variabili (calcolo pdf):

$$f_{P_R}(P_R) = \frac{f_\rho(P_R)}{\frac{d(\bar{P}_R \rho^2)}{d\rho}} = \frac{2\cancel{\rho}\, e^{-\rho^2}}{2\cancel{\rho}\, \bar{P}_R}\Bigg|_{\rho=\sqrt{P_R/\bar{P}_R}} = \frac{e^{-P_R/\bar{P}_R}}{\bar{P}_R}$$



Funz. di distribuzione

$$P_r(P_R \leq P) = P_r\left(\frac{P_R}{\bar{P}_R} \leq \frac{P}{\bar{P}_R}\right) = \int_0^P \frac{1}{\bar{P}_R} e^{-P_R/\bar{P}_R}\, dP_R = 1 - e^{-P/\bar{P}_R}$$



rappresenta la prob. che la potenza ricevuta P_R sia più piccola di P.

Quindi la P_R può essere $\gtrless \overline{P}_R$, posso definire:

$$P_R = \overline{P}_R / \alpha$$

con α attenuazione supplementare rispetto a $\overline{P}_R$.

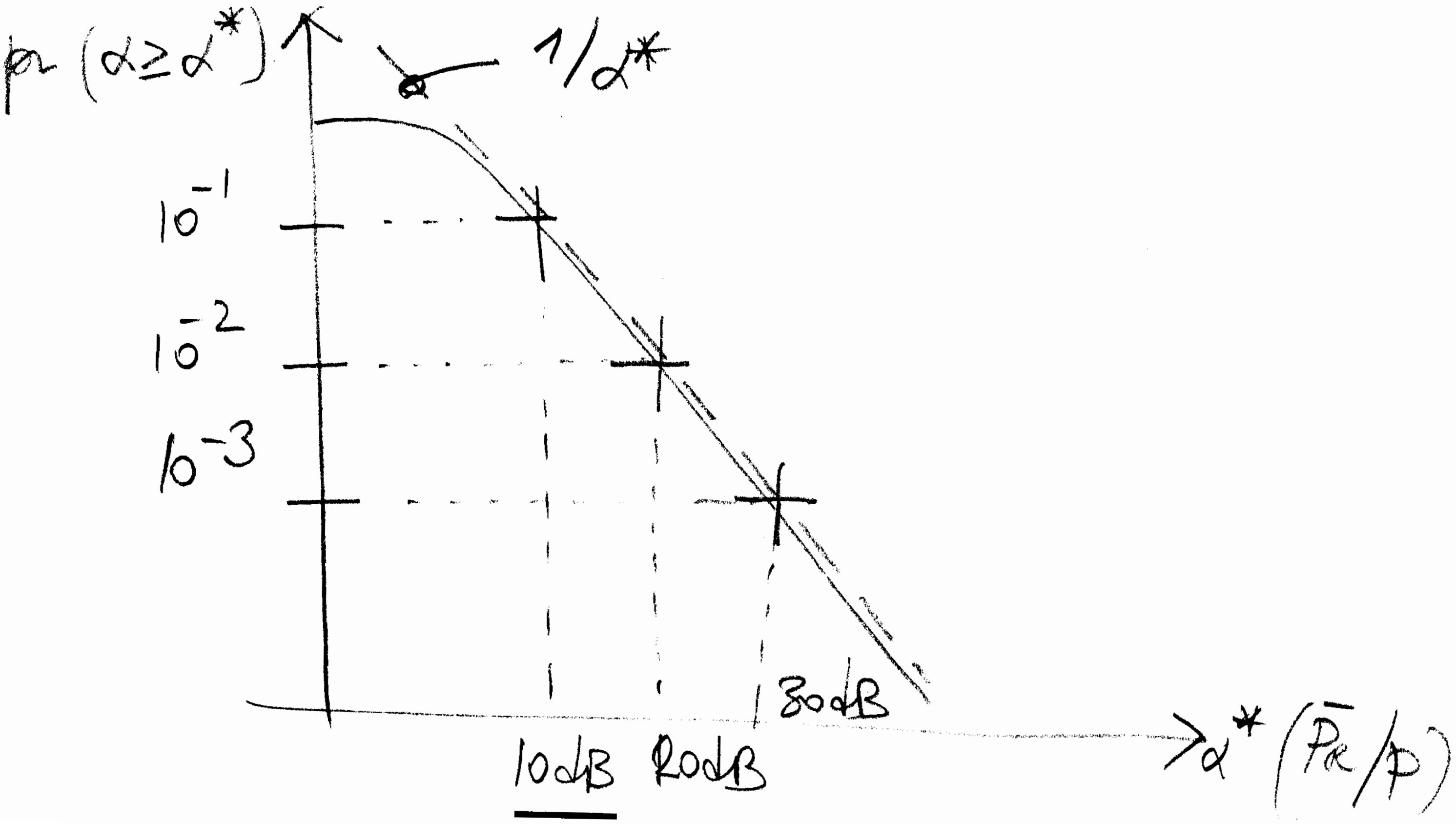
Se $\alpha > 1 \longrightarrow P_R < \overline{P}_R$ ... con una certa prob.

Se $\alpha < 1 \longrightarrow P_R > \overline{P}_R$ ... //

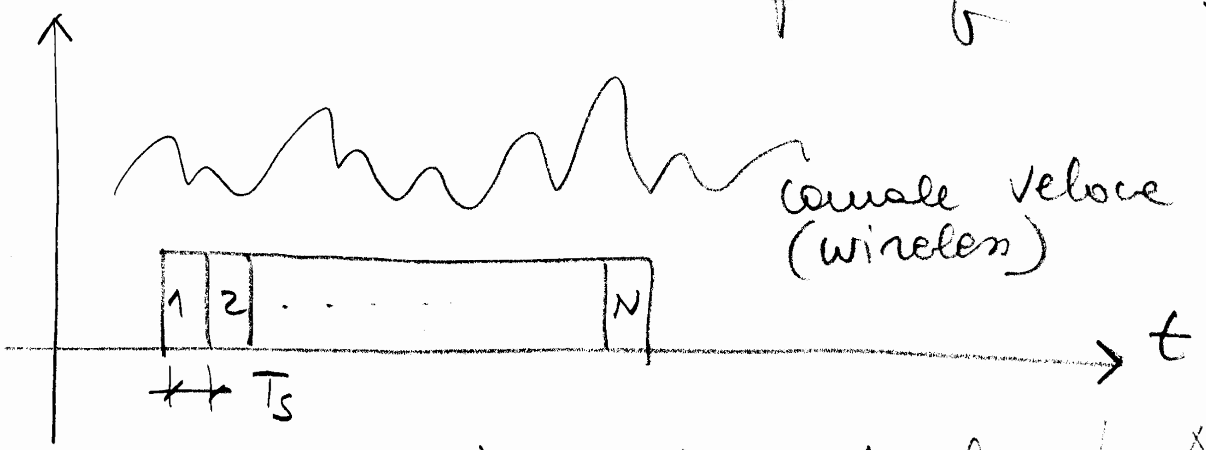
$$pr\left(\frac{P_R}{\overline{P}_R} \leq \frac{P}{\overline{P}_R}\right) = pr\left(\frac{\overline{P}_R}{P_R} \geq \frac{\overline{P}_R}{P}\right) = pr\left(\alpha \geq \alpha^*\right)$$

$$pr\left(\alpha \geq \alpha^*\right) = 1 - e^{-1/\alpha^*} \simeq \frac{1}{\alpha^*}$$

probabilità che l'attenuazione supplementare sia maggiore di α^*.



prestazioni canale con fading.



Ogni bit/simbolo entro il pacchetto di lungh. N è soggetto a fluttuazioni di potenza (rapide) e quindi le prestazioni di interesse sono calcolate come media delle prestazioni sul singolo simbolo (canale ergodico).

$$\overline{P_s}(E) = E_{P_R}\left[P_s(E|P_R)\right] = \int_0^\infty P_s(E|P_R) \times f_{P_R}(P_R)\, dP_R$$

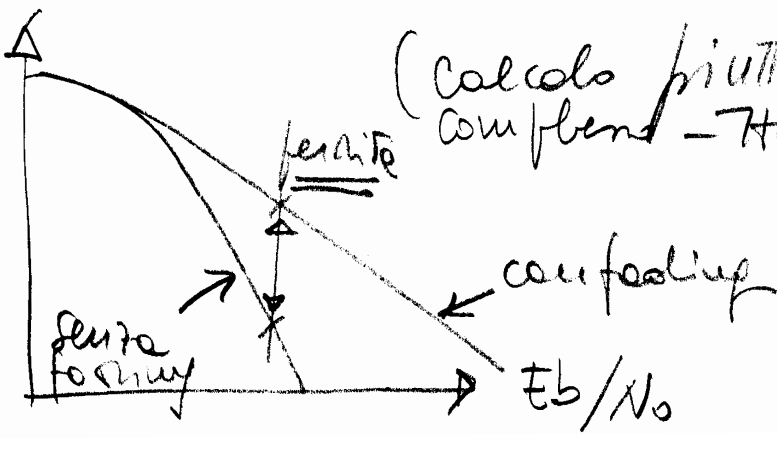
probabilità di errore media.

EX1 BPSK con fading Rayleigh

$$P_b(E|P_R) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\overline{P_R}}{N_0 R_b}\cdot\rho^2}\right)$$

$$\overline{P_b}(E) = \int_0^\infty Q\left(\sqrt{\frac{2\overline{P_R}}{N_0 R_s}\rho^2}\right)\cdot\frac{e^{-\rho^2}}{\overline{P_R}}\, d\rho^2 = \dots = \frac{1}{2\times\frac{2\overline{P_R}}{N_0 R_b}}$$

(calcolo piuttosto complesso - Haykin pag 543...)



EX2 BPSK con fading (fluttuazioni) discreta

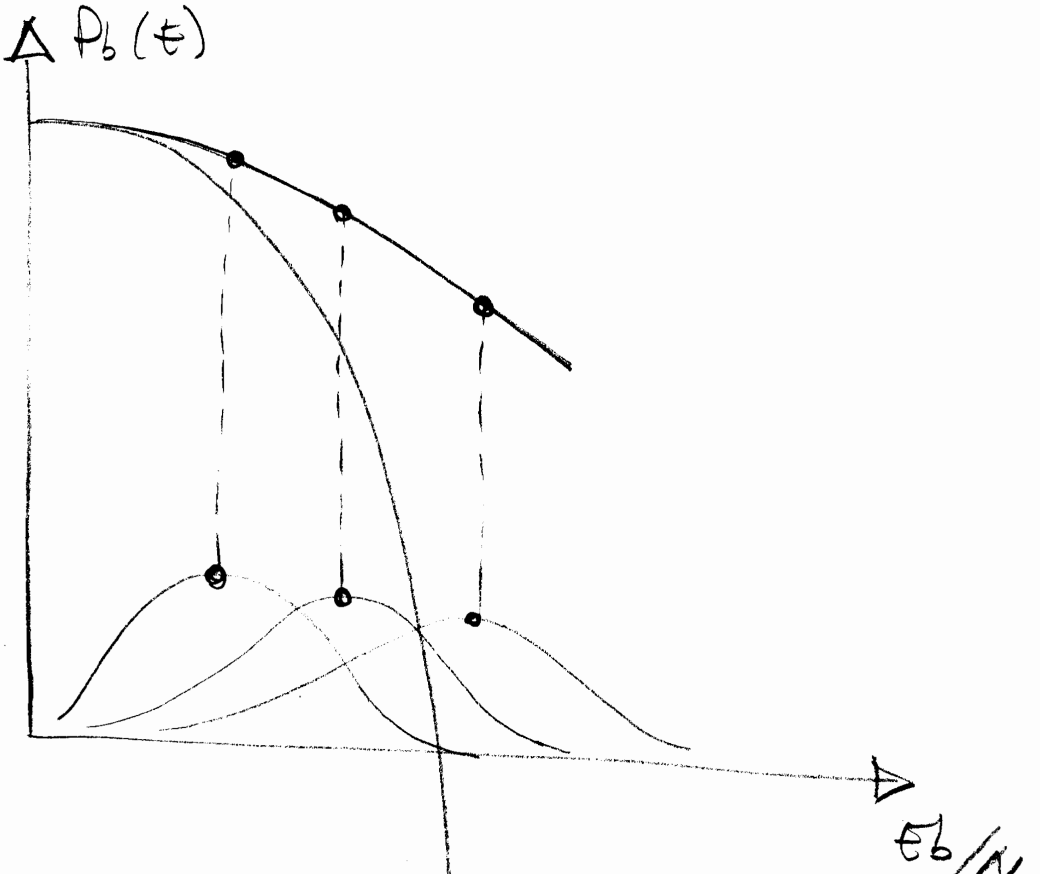
$$P_R = \overline{P_R} \cdot \rho^2 \qquad \text{prob}(\rho^2 = \rho_1^2) = p_1$$

$$\text{prob}(\rho^2 = \rho_k^2) = p_k$$

$$\overline{P_b(E)} = \sum_{l=1}^{k} p_l \times Q\left(\sqrt{\frac{2\,\overline{P_R}}{N_0 R_b}\rho_l^2}\right).$$

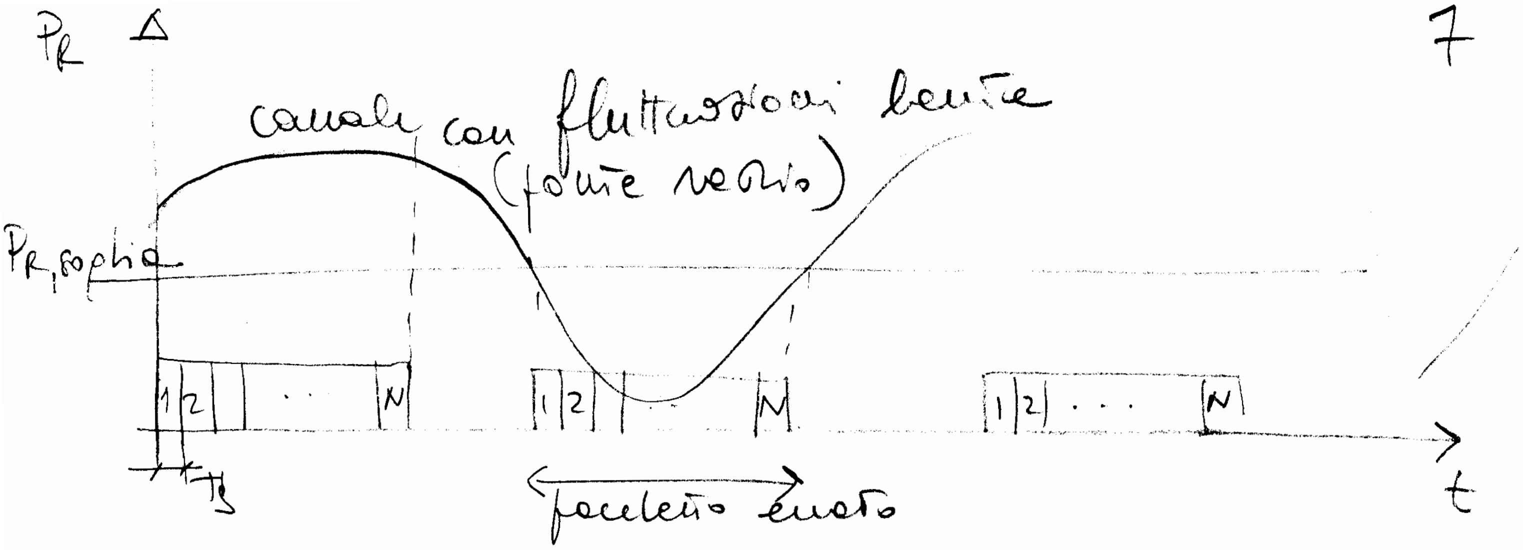
---

visualizz.



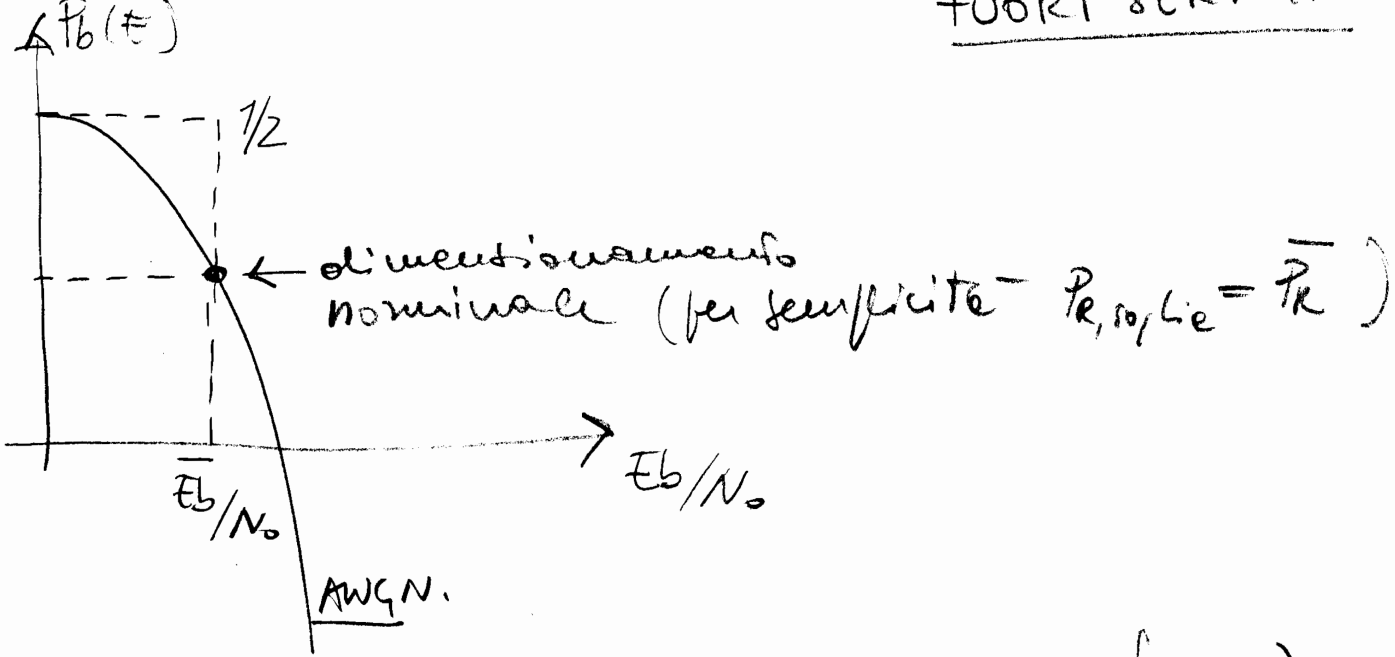
Si ha una prevalenza dei termini con prob. di errore alta. in quanto pesano maggiormente.

Si ricordi che $\frac{1}{2}\times 10^{-2} + \frac{1}{2}\times 10^{-9} \simeq \frac{1}{2}\times 10^{-2}$!



Se $P_R > P_{R,soglia} \longrightarrow P_b(E) \simeq 0$ (pacchetto ricevuto e decodificato senza errori)

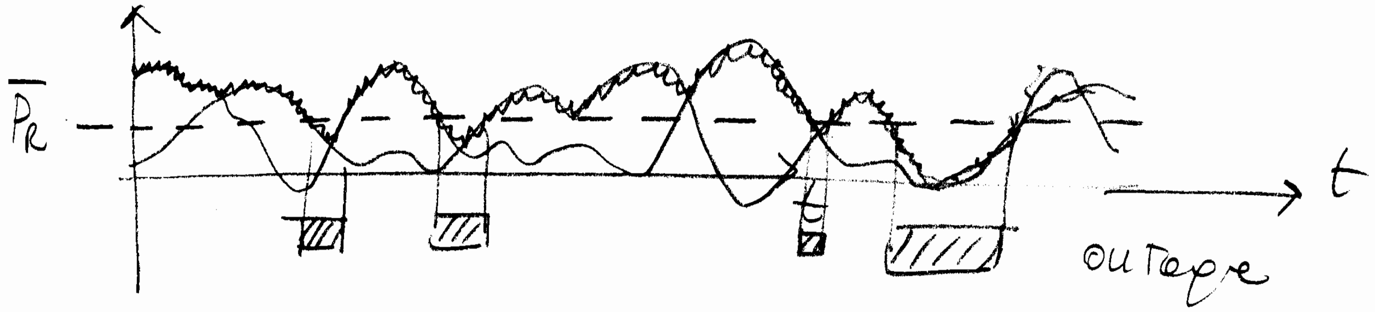
Se $P_R < P_{R,soglia} \longrightarrow P_b(E) \sim 1/2$ (pacchetto errato)
<u>FUORI SERVIZIO</u>

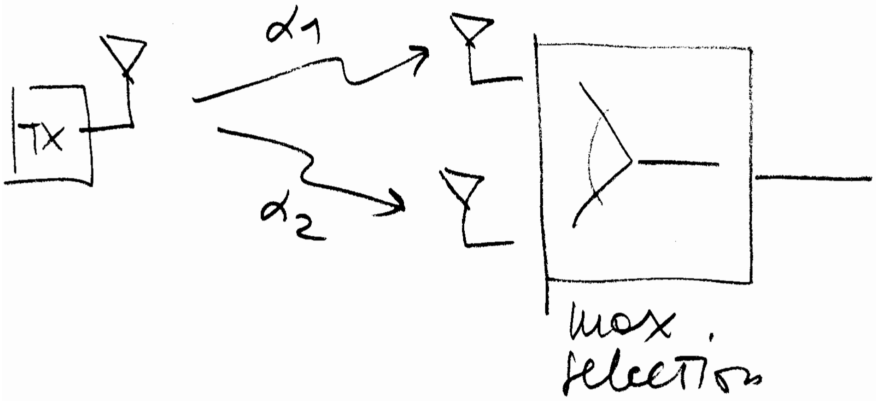


quindi $P_r(\alpha \geq \alpha^*) = P_{fs}$ (prob. fuori servizio)
ovvero la prob. che il sistema sia in fuori servizio. $\boxed{\text{margine di fading}}$

<u>EX</u> se $P_{fs} = 10^{-3}$ allora $\frac{1}{\alpha^*} \simeq 10^{-3}$ quindi
$\alpha^* = 30dB$ ovvero un affievolimento approssimato di 30dB si presenta con prob 10^{-3} ed è in grado di mandare in fuori servizio il sistema. Aumento della potenza in tx di +30dB per compensare l'affievolim.

DIVERSITA'





Diversità di spazio (ricezione)

$$P_r(\alpha_1 \geq \alpha, \alpha_2 \geq \alpha) = p_r(\alpha_1 \geq \alpha) \cdot p_r(\alpha_2 \geq \alpha) \sim \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

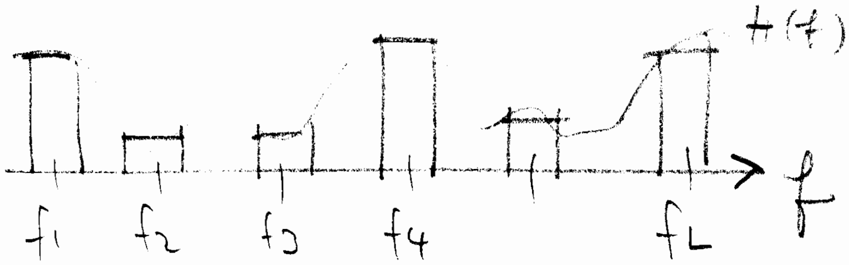
EX se $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 10^{-3} = P_{fs} \longrightarrow \alpha = 15\,dB$

In generale, se ho diversità di ordine L

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^L = P_{fs} \longrightarrow \boxed{\alpha = \sqrt[L]{1/P_{fs}}}$$

margine di fading per un sistema a diversità è notevolmente ridotto.

Diversità in frequenza



trasmissione su L frequenze dello stesso segnale (FDM oppure OFDM).

Assumendo $\alpha_1 = |H(f_1)|^2, \dots, \alpha_L = |H(f_L)|^2$

allora:

$$Pr(\alpha_1 \geq \bar{\alpha}, \dots, \alpha_L \geq \bar{\alpha}) = \left[Pr(\alpha \geq \bar{\alpha}) \right]^L = P_{fs}$$

Nota che in questo caso la potenza totale deve essere aumentata di L volte in quanto si trasmette su L frequenze indipendenti.

__EX__ $L = 8$, $P_{fs} = 10^{-3}$ calcolo margine di fading?

$$\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^8 = 10^{-3} \qquad \bar{\alpha} = \frac{30\,dB}{8} = 3,75\,dB$$

la potenza su ogni portante deve essere aumentata di $+3,75\,dB$ per garantire un fuori servizio complessivo di 10^{-3}.
tuttavia la potenza (tot) dal trasmettitore deve essere aumentata di:

$$P_T \longrightarrow P_T + \underbrace{3,75\,dB}_{\text{margine di fading}} + \underbrace{9\,dB}_{\text{presenza di 8 trasm. simultanee}} = P_T + 12,75\,dB$$