1 Dimensionamento modulazione e roll-off

Data una banda a radio frequenza $\bar{B}_{RF}$, determinare la minima costellazione M-QAM/M-PSK e roll-off $\alpha > 0$ che è necessario impiegare per trasmettere un flusso dati pari a R_b

Imponiamo che la banda occupata a radiofrequenza $B_{RF} = R_S(1+\alpha)$ sia inferiore o uguale alla banda disponibile $\bar{B}_{RF}$. Dato che $R_S = R_b/\log_2 M$ si ha

$$B_{RF} = R_b \cdot (1+\alpha)/\log_2 M \leq \bar{B}_{RF}$$

da cui

$$M \geq 2^{R_b(1+\alpha)/\bar{B}_{RF}}$$

In particolare il problema ha i seguenti vincoli $M \in \{2,4,8,16,64,256\}$, $\alpha \in [0,1]$

Suggerimento per la soluzione

1) Si cerca la minima (con efficienza spettrale inferiore) modulazione $\bar{M}$ per cui $\bar{M} \in \{2,4,8,16,64,256\}$ e $\bar{M} > 2^{R_b/\bar{B}_{RF}}$ (con $\alpha = 0$)

2) Si sceglie il massimo roll-off tollerabile $\bar{\alpha}$ imponendo $\bar{M} = 2^{R_b(1+\bar{\alpha})/\bar{B}_{RF}}$

La modulazione scelta e' quindi $\bar{M}$-QAM (se $\bar{M} \in \{2,4,16,64,256\}$) o $\bar{M}$-PSK (se $\bar{M} = 8$) con roll-off pari a $\bar{\alpha}$

2 Dimensionamento potenza trasmessa con vincolo su probabilita' di errore p

Dimensionare la potenza trasmessa P_T (per propagazione in spazio libero e senza fading da multipercorso) in modo che $P_b(E) \leq p$

a) Dimensionamento dal vincolo sul rapporto E_S/N_0

Si supponga che la modulazione scelta sia $\bar{M}$-QAM (il caso di M-PSK e' analogo ma con espressioni diverse della probabilita' di errore). Si impone il vincolo della probabilita' di errore

$$P_b(E) = \varsigma \times Q\left(\sqrt{\frac{3}{(\bar{M}-1)} \times \frac{E_S}{N_0}}\right) \leq p$$

notare che $E_g = \frac{3}{2(\bar{M}-1)}E_S$, ς dipende dalla modulazione e dal mapping specifico. Il vincolo si riscrive come

$$\frac{E_S}{N_0} \geq \beta(p) \tag{1}$$

Si esprime ora E_S in termini della potenza ricevuta P_R, quindi P_R in funzione della potenza trasmessa

$$E_S = P_R/R_S, \tag{2}$$
$$P_R = P_T \times \gamma(d) \tag{3}$$

dove $\gamma(d) = \frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2}$. Sostituendo (3) in (2) si ottiene E_S in funzione della potenza trasmessa

$$E_S = \frac{P_T \times \gamma(d)}{R_S} \tag{4}$$

Sostituendo (4) in (1) il vincolo (1) diventa

$$\frac{P_T \times \gamma(d)}{R_S N_0} \geq \beta(p)$$

quindi

$$P_T \geq \frac{\beta(p) R_S N_0}{\gamma(d)}$$

b) Dimensionamento dal vincolo sul rapporto $SNR = 2E_S/N_0$

Come prima si impone il vincolo della probabilita' di errore

$$P_b(E) = \varsigma \times Q\left(\sqrt{\frac{3}{2(\bar{M}-1)} \times SNR}\right) \leq p$$

Il vincolo si riscrive come

$$SNR \geq 2\beta(p) \tag{5}$$

dove $\beta(p)$ e' quello del punto a)

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{P_R}{P_N} \geq 2\beta(p) & (6) \\ P_N &= \frac{N_0}{2} R_S & (7) \end{aligned}$$

quindi il vincolo sulla potenza trasmessa vale

$$P_T \geq \frac{2\beta(p) P_N}{\gamma(d)} = \frac{\beta(p) R_S N_0}{\gamma(d)}$$

c) Dimensionamento dal vincolo sul rapporto E_b/N_0

Come prima si impone il vincolo della probabilita' di errore (notare che $E_S = E_b \times \log_2(\bar{M})$

$$P_b(E) = \varsigma \times Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2(\bar{M})}{(\bar{M}-1)} \times \frac{E_b}{N_0}}\right) \leq p$$

Il vincolo si riscrive come

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{\beta(p)}{\log_2(\bar{M})} \tag{8}$$

dove $\beta(p)$ e' sempre quello del punto a).

Si esprime ora E_b in termini di E_S, della potenza ricevuta P_R e infine di quella trasmessa P_T

$$E_b = \frac{E_S}{\log_2(\bar{M})} = \frac{P_R}{R_S \times \log_2(\bar{M})} = \frac{P_T \times \gamma(d)}{R_S \times \log_2(\bar{M})}, \tag{9}$$

dove si sono utilizzate le seguenti uguaglianze $E_S = E_b \times \log_2(\bar{M})$, $P_R = P_T \times \gamma(d)$. Sostituendo (9) nel vincolo (8) si ottiene

$$\frac{P_T \times \gamma(d)}{R_S \times \log_2(\bar{M})} \times \frac{1}{N_0} \geq \frac{\beta(p)}{\log_2(\bar{M})}$$

da cui semplificando

$$P_T \geq \frac{\beta(p) R_S N_0}{\gamma(d)}$$

3 Dimensionamento potenza trasmessa per canale soggetto a fading di Rayleigh con vincolo su probabilità di fuoriservizio p_{fs}

Dimensionare la potenza trasmessa P_T (per propagazione soggetta a fading da multipercorso) in modo che il vincolo sulla probabilità di errore $P_b(E) \leq p$ sia soddisfatto con probabilità maggiore di (o uguale a) $1 - p_{fs}$ (ovvero in modo che la probabilità di fuori servizio $\Pr[P_b(E) \geq p]$ sia inferiore (o uguale) a p_{fs}.

Si ricorda che la fluttuazione casuale della potenza ricevuta indica una fluttuazione casuale della probabilita' di errore $P_b(E)$ da cui la condizione $\Pr[P_b(E) \geq p] \leq p_{fs}$.

La potenza ricevuta per propagazione soggetta a fading è una variabile casuale con distribuzione esponenziale (nel caso di fading di Rayleigh)

$$P_R \sim \frac{1}{\bar{P}_R} \exp\left(-\frac{P_R}{\bar{P}_R}\right) \tag{10}$$

dove $\bar{P}_R = P_T\gamma(d)$ rappresenta la potenza media a seguito del dimensionamento nominale. Il rapporto segnale rumore è anch'esso casuale

$$SNR = \frac{P_R}{P_N} \sim \frac{1}{\bar{P}_R/P_N} \exp\left(-\frac{P_R}{\bar{P}_R/P_N}\right). \tag{11}$$

La probabilità di avere il collegamento fuori-servizio (la probabilità che il tasso di errore del collegamento sia maggiore di (o uguale a) p) si scrive come

$$\Pr[P_b(E) \geq p] = \Pr\left[\varsigma \times Q\left(\sqrt{\frac{3}{2(\bar{M}-1)} \times SNR}\right) \geq p\right] = \Pr[SNR \leq 2\beta(p)]$$

per $SNR = 2E_S/N_0$. Dalle densità di probabilità (11) e (10) la probabilità di fuori servizio diventa

$$\begin{aligned}\Pr[SNR &\leq 2\beta(p)] = \Pr[P_R \leq 2\beta(p)P_N] = \\ &= \int_0^{2\beta(p)P_N} \frac{1}{\bar{P}_R} \exp\left(-\frac{P_R}{\bar{P}_R}\right) dP_R = 1 - \exp\left(-\frac{2\beta(p)P_N}{\bar{P}_R}\right).\end{aligned}$$

Imponendo quindi il vincolo sulla probabilità di fuoriservizio

$$\Pr[SNR \leq 2\beta(p)] = 1 - \exp\left(-\frac{2\beta(p)P_N}{\bar{P}_R}\right) \leq p_{fs}$$

e ricordando che $\bar{P}_R = P_T \times \gamma(d)$ e $P_N = R_S N_0/2$, il vincolo da imporre alla potenza in trasmissione vale

$$1 - \exp\left(-\frac{\beta(p)R_S N_0}{P_T \times \gamma(d)}\right) \leq p_{fs}$$

che diventa

$$P_T \geq \frac{\beta(p)R_S N_0}{\gamma(d)} \times \frac{1}{\ln\left[(1-p_{fs})^{-1}\right]} \approx \frac{\beta(p)R_S N_0}{\gamma(d)} \times \frac{1}{p_{fs}}.$$

Il margine di potenza (fading margin) da aggiungere, rispetto al dimensionamento senza fading (si veda la sezione precedente), per far fronte alla casualità della potenza ricevuta vale $1/\ln\left[(1-p_{fs})^{-1}\right]$ sviluppato come da lezione. Assumendo $p_{fs} << 1$ il margine di fading diventa

$$\frac{1}{\ln\left[(1-p_{fs})^{-1}\right]} \approx \frac{1}{p_{fs}}$$

Si tenga presente che il dimensionamento proposto *non* tiene conto del possibile sfruttamento della ridondanza della ricezione della medesima trasmissione su tratte con affievolimenti indipendenti (noto come diversita'). La ridondanza spaziale viene ottenuta usando antenne multiple sia lato ricevitore o lato trasmettitore oppure, secondo alcune tecniche di recente sviluppo, da entrambi i lati del collegamento (sistemi MIMO). Altre forme di ridondanza sono possibili, ad esempio trasmettendo su bande di frequenza disgiunte come nel FDM (diversita' in frequenza). Si rammenta che nei sistemi con diversita' la probabilita' di fuori servizio complessiva dipende dalla probabilita' di fuori servizio di ogni singolo collegamento cosi' come visto a lezione (ad esempio, mediante la selezione del massimo).