

Appunti Esercitazioni per il corso di Sistemi di Comunicazione

Parte 1

Savazzi Stefano

1 Temperatura di rumore

La temperatura equivalente di rumore T_{eq} di un circuito lineare permette di descrivere la densità spettrale di potenza del rumore in uscita al circuito come se fosse dovuto solo da un generatore equivalente di rumore (si pensi a un resistore) posto all'ingresso del sistema (non-rumoroso) con temperatura T_{eq} . Nota che, essendo equivalente, non corrisponde ad una temperatura fisica.

Si calcoli la temperatura equivalente di rumore complessiva della cascata di N doppi bipoli in figura 1. Si noti che per ogni doppio bipolo e' data la temperatura equivalente di rumore $T_{eq,k}$, $k = 1, \dots, N$.

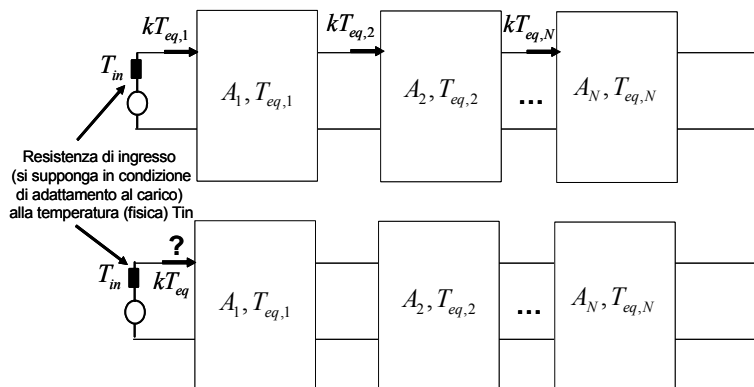


Figura 1: Cascata di doppi bipoli

La densità spettrale di rumore $S_n(f)$ a valle della cascata di doppi bipoli (e dell'ingresso) vale

$$S_n(f) = kT_{in} \prod_{k=1}^N A_k + \sum_{k=1}^N kT_{eq,k} \times \prod_{h=k}^N A_k \text{ [Watt/Hz] (oppure [Joule])}$$

dove $k = 1.38 \times 10^{-23}$ [Joule/°K]. La temperatura equivalente di rumore T_{eq} della cascata di circuiti è tale per cui (da definizione)

$$\begin{aligned} kT_{eq} \prod_{k=1}^N A_k &= S_n(f) = \\ &= kT_{in} \prod_{k=1}^N A_k + \sum_{k=1}^N kT_{eq,k} \times \prod_{h=k}^N A_k \text{ [Watt/Hz]} \end{aligned}$$

e vale

$$\begin{aligned} T_{eq} &= T_{in} + \sum_{k=1}^N T_{eq,k} \times \frac{\prod_{h=k}^N A_h}{\prod_{k=1}^N A_k} = \sum_{k=1}^N \frac{T_{eq,k}}{\prod_{h=1}^{k-1} A_h} = \\ &= T_{in} + T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{A_1} + \frac{T_{eq,3}}{A_1 A_2} + \dots + \frac{T_{eq,N}}{A_1 A_2 \cdot \dots \cdot A_N} \end{aligned}$$

Calcolare la temperatura equivalente di rumore per il sistema in figura 2, dove $T_{in} = 500K$, $G_1 = 8dB$ ($A_1 = 10^{G_1/10} = 6.3$), $F_1 = 4dB$ (F fattore di rumore), il cavo attenua il segnale di $\alpha_l = 0.1dB/m$, $G_3 = 20dB$ ($A_3 = 10^{G_3/10} = 100$), $F_3 = 8dB$

Le temperature di rumore per i 3 dispositivi (amplificatore, cavo, amplificatore) sono calcolate a partire dai fattori di rumore e dall'attenuazione (per il cavo).

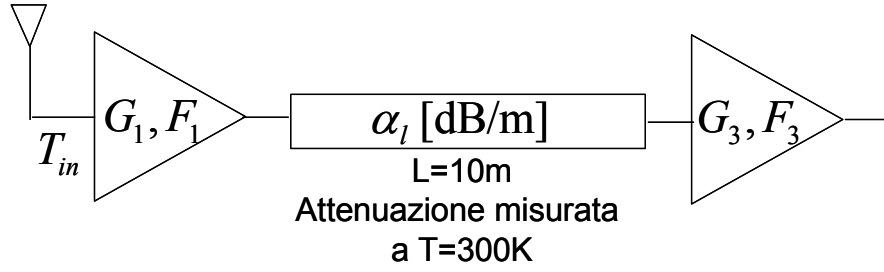


Figura 2:

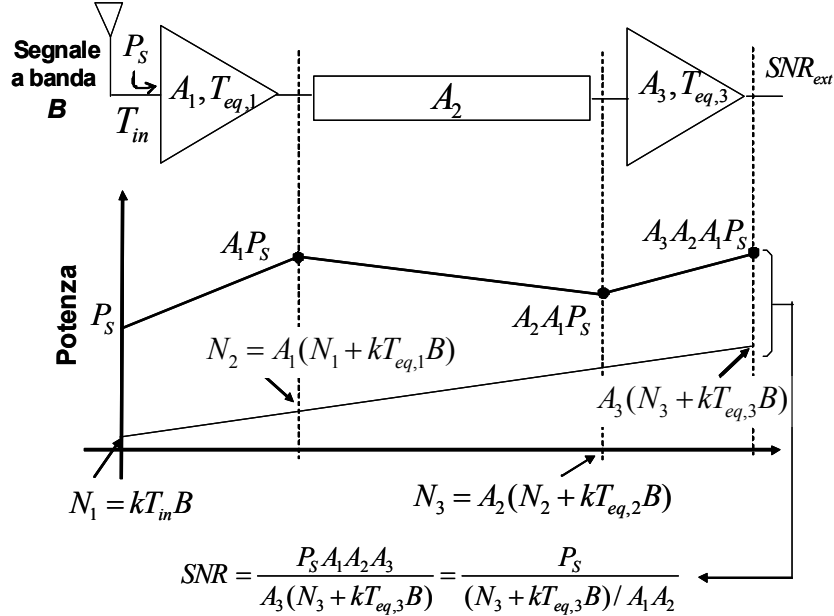


Figura 3: Andamento potenza di segnale e potenza del rumore. SNR e interpretazione della temperatura equivalente.

1) Amplificatore 1. Se non diversamente specificato si assume che le misure di guadagno dell'amplificatore vengano effettuate a una temperatura di $T_0 = 290K$, il fattore di rumore F_1 va convertito in scala lineare

$$T_{eq,1} = 290(10^{F_1/10} - 1) = 438K$$

2) Cavo 2. L'attenuazione complessiva (in dB) del cavo vale $\alpha_l \times L = 1dB$, il guadagno complessivo $G_2 = -1dB$ ($A_2 = 10^{G_2/10} \simeq 0.79$)

$$T_{eq,2} = 300 \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) = 77K$$

3) Amplificatore 3.

$$T_{eq,3} = 290(10^{F_3/10} - 1) = 1540K$$

La temperatura di rumore vale quindi (si veda esercizio precedente, tenendo conto che i dati - guadagni e fattori di rumore - sono qui espressi in scala logaritmica)

$$T_{eq} = T_{in} + T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{A_1} + \frac{T_{eq,3}}{A_1 A_2} = 1260K$$

Si assuma di ricevere un segnale utile di potenza P_S (mW) e banda B . Determinare il rapporto segnale rumore in uscita e in ingresso al circuito (si veda la figura 3).

Il rapporto segnale rumore in ingresso al circuito (a valle dell'antenna ricevente) vale

$$SNR_{ing} = \frac{P_S}{kT_{in}B}$$

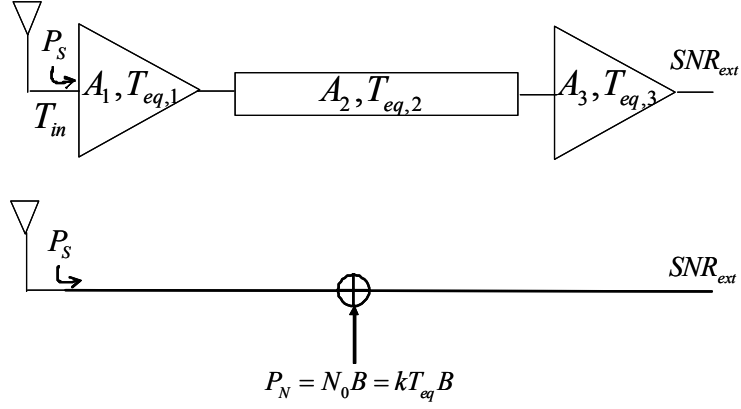


Figura 4: Interpretazione della temperatura equivalente di rumore. I due modelli in figura sono equivalenti.

dallo schema in figura 3 si puo' calcolare l'SNR all'uscita del circuito SNR_{ext} come funzione delle temperature di rumore di ogni singolo componente (in questo caso 2 amplificatori e un cavo attenuatore)

$$SNR_{ext} = \frac{P_S A_1 A_2 A_3}{A_3 (N_3 + k T_{eq,3} B)}$$

dove

$$N_3 = A_2 [A_1 (k T_{in} B + k T_{eq,1} B) + k T_{eq,2} B]$$

E' interessante fornire un ulteriore interpretazione della temperatura di rumore del ricevitore, infatti

$$SNR_{ext} = \frac{P_S A_1 A_2}{(N_3 + k T_{eq,3} B)} = \frac{P_S}{\frac{(N_3 + k T_{eq,3} B)}{A_1 A_2}} = \frac{P_S}{k T_{eq} B}$$

dove (come noto)

$$\begin{aligned} \frac{N_3 + k T_{eq,3} B}{A_1 A_2} &= k T_{eq} B = \\ &= k \times \left(T_{in} + T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{G_1} + \frac{T_{eq,3}}{G_1 G_2} \right) \times B \end{aligned}$$

La temperatura equivalente di rumore permette quindi di valutare la densita' spettrale di potenza equivalente generata dallo stadio di ricezione ai fini del calcolo del rapporto segnale rumore in uscita al ricevitore SNR_{ext} (si veda la figura 4). La densita' spettrale (monolaterale) di potenza del rumore (equivalente) in uscita N_0 si esprime in dBm/Hz

$$\begin{aligned} N_0 [dBm/Hz] &= 10 \log_{10}(k T_{eq}) = 10 \log_{10}(k \times T_0) + 10 \log_{10} \left(\frac{T_{eq}}{T_0} \right) = \\ &= -174 + 10 \log_{10} \left(\frac{T_{eq}}{T_0} \right) = -167.6 [dBm/Hz] \end{aligned}$$

si noti che $10 \log_{10}(k \times T_0) = -174 [dBm/Hz]$. Per $B = 7MHz$, la potenza di rumore (equivalente) espressa in dBm vale

$$P_N = N_0 [dBm/Hz] + 10 \log_{10}(B) \simeq -99dBm$$

dove $10 \log_{10}(B) = 68$.

Si assuma di ricevere un segnale utile con potenza $P_S = -80dBm$ e banda $B_w = B = 7MHz$. Dimensionare il primo amplificatore per avere un rapporto segnale rumore $SNR = P_S/P_N > 20dB$

L'attuale dimensionamento dell'amplificatore $G_1 = 8dB$ ($A_1 = 10^{G_1/10} = 6.3$), $F_1 = 4dB$ non consente di soddisfare i requisiti richiesti, infatti $SNR = P_S/P_N = -80dBm + 99dBm = 19dB < 20dB$. Serve una potenza

di rumore complessiva pari o inferiore a $P_N < -100dBm$, questo è il vincolo da utilizzare per dimensionare il primo amplificatore.

$$-174 + 10 \log_{10} \left(\frac{T_{eq}(F_1, A_1)}{290} \right) + 68 < -100dBm$$

$$T_{eq}(F_1, A_1) < 1154K$$

dove

$$T_{eq}(F_1, A_1) \simeq 500 + 290(10^{F_1/10} - 1) + \frac{2 \times 10^3}{A_1}$$

In generale deve essere aumentato il guadagno A_1 oppure ridotto il fattore di rumore F_1 . Lasciando inalterato il fattore di rumore dell'amplificatore, il guadagno deve aumentare di $12dB$, ovvero

$$G_1 > 20dB$$

(da cui $A_1 > 10^2$). Lasciando invece inalterato il guadagno il fattore di rumore deve soddisfare

$$290(10^{F_1/10} - 1) < 321K$$

quindi

$$F_1 < 3.2dB$$

2 Processi bianchi

Un processo bianco $w(t)$ con densità spettrale di potenza (bilatera) $N_0/2$ [dBm/Hz] viene filtrato con un filtro passabasso ideale di banda (monolatera) B . Il processo di uscita $n(t)$ è campionato a passo T_c : calcolare T_c in modo che il processo discreto in uscita sia ancora bianco.

L'autocorrelazione del processo in uscita dal filtro passabasso ideale si calcola antitrasformando la DSP in uscita

$$R_n(\tau) = E[n(t)n(t+\tau)] = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df =$$

$$= \left[\frac{N_0}{4\pi\tau j} \exp(j2\pi f\tau) \right]_{-B}^B = N_0 \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi\tau}$$

Affinchè il processo tempo-discreto sia ancora bianco la sequenza di autocorrelazione deve essere impulsiva, questo avviene campionando il segnale a passo $T_c = (2B)^{-1}$.

Calcolare l'energia di rumore in uscita assumendo un filtro a risposta impulsiva causale arbitraria $h(t)$

$$E[n^2(t)] = E \left[\int w(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \times \int w(t-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2 \right] =$$

$$= \int h(\tau_1)d\tau_1 \int E[w(t-\tau_1)w(t-\tau_2)] h(\tau_2)d\tau_2 =$$

$$= \int h(\tau_1)d\tau_1 \int R_w(\tau_1-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2 = \frac{N_0}{2} \int h^2(\tau)d\tau$$

Calcolare l'energia di rumore nel caso in cui il filtro sia quello indicato in figura 5 (si vedrà che questa situazione è di rilievo nei sistemi in banda traslata)

Il segnale in uscita dal sistema vale

$$n(t) = \int_0^T \sqrt{\frac{2}{T}} w(t) \cos(2\pi ft) dt$$

L'energia di $n(t)$

$$E[n^2(t)] = \frac{2}{T} \times \int_0^T \int_0^T R_w(t_1-t_2) \cos(2\pi ft_1) \cos(2\pi ft_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{N_0}{2} \cos^2(2\pi ft) dt = \frac{N_0}{2} = E[w^2(t)]$$

3 Filtro adattato e correlatore

Si dimostri l'equivalenza tra i due sistemi in figura 6 per la trasmissione e ricezione di un impulso $g(t)$ (si supponga per semplicità isolato) di durata T su canale AWGN. Il segnale in uscita al filtro adattato $y(t)$ si scrive come segue, definito il segnale in ingresso al filtro $x(t) = a_k g(t) + n(t)$, $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * g(T-t)/\sqrt{E_g}$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{E_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(T-t+\tau) d\tau$$

infatti $g(T-t+\tau) = g(T-(t-\tau)) = h(t-\tau)$. A valle del campionamento (in T)

$$y(T) = \frac{1}{\sqrt{E_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{E_g}} \int_0^T x(t) g(t) d\tau$$

es equivale ad eseguire la correlazione del segnale ricevuto $x(t)$ e l'impulso $g(t)$. Per un impulso isolato

$$y(T) = a_k \sqrt{E_g} + w$$

e come nel caso di filtro adattato, $w = (\sqrt{E_g})^{-1} \int_0^T n(t) g(t) d\tau$, $E[w^2] = N_0/2$. Si noti che nella pratica il correlatore è realizzato in digitale.

Nota sul calcolo numerico di correlazioni.

Una correlazione può essere realizzata in forma numerica (si veda per esempio la figura 7) come segue

$$\int_0^T f(t) d\tau \simeq \Delta\tau \times \sum f(n\Delta\tau + t_0). \quad (1)$$

I due termini coincidono evidentemente per $\Delta\tau \rightarrow 0$, tuttavia, poichè ogni funzione $f(t)$ è nella pratica limitata in banda, esiste un valore ottimale $\Delta\tau > 0$ per cui l'uguaglianza è ancora valida senza approssimazione. Dalle proprietà della trasformata di Fourier di $f(t)$, $F(f) = \int f(t) \exp(-j2\pi ft)$

$$\int_0^T f(t) d\tau = F(0)$$

metre

$$\begin{aligned} \Delta\tau \times \sum f(n\Delta\tau + t_0) &= \sum F(n/\Delta\tau) \exp(j2\pi n t_0/\tau) = \\ &= F(0) + F(1/\Delta\tau) \exp(j2\pi t_0/\tau) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Si noti infatti che la funzione $\Delta\tau \times \sum f(n\Delta\tau + t)$ è la ripetizione periodica di $f(t)$ con periodo $\Delta\tau$: la sua trasformata $F(n/\Delta\tau)$ è la discretizzazione di $F(f)$ con passo di campionamento $1/\Delta\tau$. $\Delta\tau \times \sum f(n\Delta\tau + t_0)$ è semplicemente l'antitrasformata di $F(n/\Delta\tau)$ calcolata in t_0 .

Dalla (2) appare chiaro che la condizione su $\Delta\tau$ affinché l'uguaglianza (2) sia esatta è

$$\Delta\tau < 1/B_f$$

dove B_f è la banda della funzione $f(t)$. Per questo valore infatti $F(m/\Delta\tau) = 0 \forall m \neq 0$. Nel caso del filtro adattato realizzato tramite il correlatore si ha che $f(t) = r(t)g(t)$ da cui $B_f = B_r + B_g$.

4 Probabilità di errore in presenza di ISI dovuta a errore di temporizzazione

Si calcoli la probabilità di errore per un sistema 2-PAM con impulso in trasmissione $g(t)$ e flusso in bit R_b in presenza di un errore di temporizzazione (o jitter) pari a τ . Si assuma una trasmissione di bit (simboli) equiprobabili.

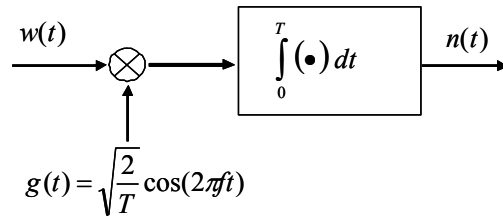
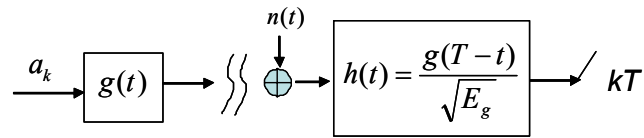
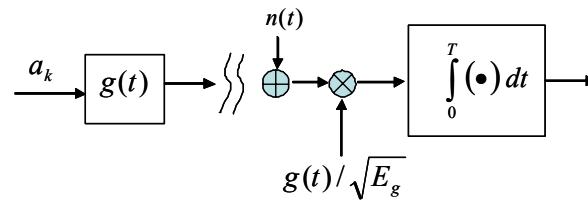


Figura 5:



1) Filtro adattato



2) Correlatore

Figura 6:

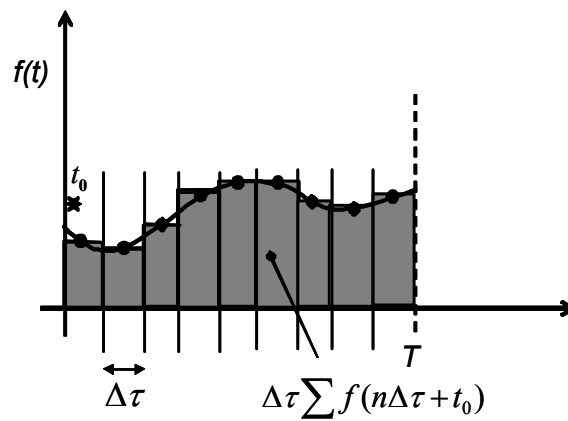


Figura 7:

Data la trasmissione di bit (simboli) equiprobabili $a_k \in \{-1, 1\}$, il segnale ricevuto a valle del filtro adattato $g(T-t)/\sqrt{E_g}$ (filtro adattato con risposta all'impulso ad energia unitaria) con

$$E_g = \int g^2(t)dt.$$

e del campionamento a passo $kT + \tau$ con $T = 1/R_b$ vale

$$y(k) = a_k p(kT + \tau) + \sum_{i \neq k} a_i p((k-i)T + \tau) + n(kT + \tau) \quad (3)$$

dove $p(t) = g(t) * g(-t)/\sqrt{E_g}$. Si noti che

$$\int p^2(t)dt. = E_g = \int g^2(t)dt.$$

Il rumore $n(t)$ e' Gaussiano a media nulla e varianza (energia) $N_0/2 = \mathbb{E}[n^2(t)]$. La presenza di ISI genera un rumore equivalente aggiuntivo

$$w_{ISI} = \sum_{i \neq k} a_i p((k-i)T + \tau)$$

la cui statistica dipende dalla probabilita' dei simboli trasmessi a_i e dall'offset τ . Assumendo il rumore dovuto all'ISI come gaussiano, la probabilita' di errore al tempo τ (per l'impulso a_k con $k = 0$) puo' ancora essere espressa tramite la funzione $Q()$ e vale

$$\Pr(E) = Q\left(\frac{\mathbb{E}[y(\tau)]}{\sqrt{\text{var}(y(\tau))}}\right) \simeq Q\left(\frac{p(\tau)}{\sqrt{\text{var}[n(\tau)] + \text{var}(w_{ISI})}}\right)$$

dove si e' trascurata la media non nulla del rumore generato dall'ISI: $\mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2] = \mathbb{E}_{a_i}[\sum_{i \neq k} a_i p((k-i)T + \tau)] \simeq 0$. Si ha che la varianza della somma dei disturbi $\text{var}[n(\tau)] + \text{var}(w_{ISI})$ dovuta al rumore causato dal disturbo Gaussiano e all' ISI e'

$$\text{var}[n(\tau)] + \text{var}[w_{ISI}] = N_0/2 + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2].$$

Imponendo l'indipendenza tra i simboli trasmessi ($\mathbb{E}[a_i a_j] = 0$ per $i \neq j$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2] &= \sum_{i \neq k} [\Pr(a_i = 1) \times p^2((k-i)T + \tau) + \Pr(a_i = -1) \times p^2((k-i)T + \tau)] = \\ &= \sum_{i \neq 0} [\Pr(a_i = 1) \times p^2(iT + \tau) + \Pr(a_i = -1) \times p^2(iT + \tau)] = \\ &= \sum_{i \neq 0} p^2(iT + \tau) \end{aligned}$$

si ricordi che e' calcolato per $k = 0$ e assumendo trasmissione di simboli equiprobabili.

Si noti che spesso solo i primi termini ($i = \pm 1, \pm 2$) contribuiscono in modo significativo alla potenza del rumore. La probabilita' di errore vale quindi

$$\Pr(E) = Q\left(\frac{p(\tau)}{\sqrt{N_0/2 + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]}}\right)$$

Si ricorda infine che il contributo di rumore dovuto all'ISI e' nullo se e solo se $\tau = 0$ e l'impulso $p(t)$ soddisfa il criterio di Nyquist (si veda l'esercizio seguente).

Si calcoli la probabilita' di errore al variare di $|\tau| < T$ (si veda la figura 8) nel caso in cui $g(t)$ sia un impulso rettangolare di durata T e ampiezza A e che in ricezione si utilizzi il filtro adattato.

Nel caso di impulso rettangolare in trasmissione,

$$p(t) = g(t) * \frac{g(T-t)}{\sqrt{E_g}} = A\sqrt{T} \left(1 - \left|\frac{t-T}{T}\right|\right)$$

nota che $E_g = A^2 T$. La probabilita' di errore al tempo $T - \tau$ (ad esempio $k = 1$) vale

$$\Pr(E) \simeq Q\left(\frac{p(T-\tau)}{\sqrt{N_0/2 + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]}}\right) = Q\left(\frac{A\sqrt{T}(1-|\tau/T|)}{\sqrt{N_0/2 + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]}}\right)$$

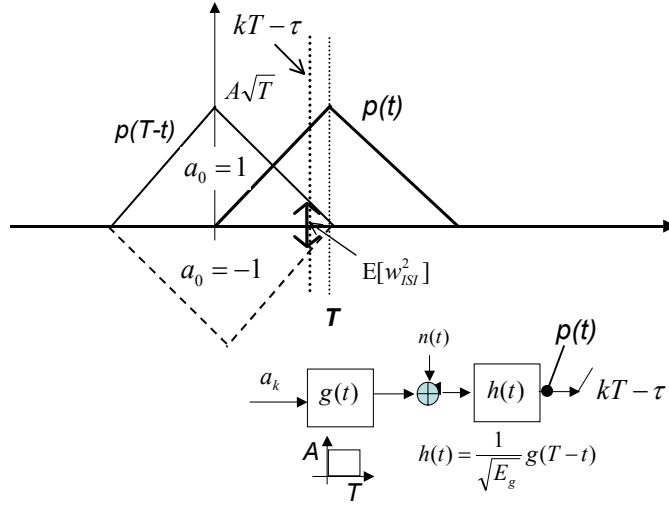


Figura 8:

Imponendo l'indipendenza tra i simboli trasmessi ($\mathbb{E}[a_i a_j] = 0$ per $i \neq j$), il contributo di ISI e' dovuto al solo il simbolo precedente a_0

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a_i} [w_{ISI}^2] &= \Pr(a_0 = 1) \times p^2(\tau) + \Pr(a_0 = -1) \times p^2(\tau) = \\ &= p^2(\tau) = A^2 T \times (\tau/T)^2 \end{aligned}$$

quindi

$$\Pr(E) \simeq Q \left(\frac{A\sqrt{T}(1 - |\tau/T|)}{\sqrt{N_0/2 + A^2 T \times (\tau/T)^2}} \right)$$

Per $A \rightarrow \infty$ (trascurando il rumore termico) si ottiene

$$\Pr(E) \approx Q \left(\frac{1 - |\tau/T|}{|\tau/T|} \right)$$

Metodo alternativo (entrambi i metodi possono ritenersi corretti).

Nel caso in cui un solo simbolo e' responsabile dell'interferenza intersimbolica, l'ipotesi di gaussianita' del rumore w_{ISI} si dimostra essere insufficiente (o troppo pessimistica). In questo caso e' possibile calcolare la probabilita' di errore esattamente: assumendo di aver trasmesso $a_1 = +1$ la probabilita' di errore dipende dal simbolo precedente a_0 , se $a_0 = +1$ il simbolo precedente non attenua il segnale utile, $\Pr(E|a_0 = +1) = Q \left([p(T - \tau) + p(\tau)] / \sqrt{N_0/2} \right) = Q \left(A\sqrt{T} / \sqrt{N_0/2} \right)$, al contrario se $a_0 = -1$ il simbolo precedente attenua il segnale utile $\Pr(E|a_0 = -1) = Q \left([p(T - \tau) - p(\tau)] / \sqrt{N_0/2} \right)$.

$$\begin{aligned} \Pr(E|a_1 = +1) &= \Pr(a_0 = 1) \times Q \left(\frac{p(T - \tau) + p(\tau)}{\sqrt{N_0/2}} \right) + \Pr(a_0 = -1) \times Q \left(\frac{p(T - \tau) - p(\tau)}{\sqrt{N_0/2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times Q \left(\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2}} \right) + \frac{1}{2} \times Q \left(\frac{A\sqrt{T}(1 - 2|\tau/T|)}{\sqrt{N_0/2}} \right) \end{aligned}$$

Si noti che la probabilita' di errore non dipende dal simbolo $a_1 = +1$, infatti

$$\Pr(E) = \Pr(E|a_1 = +1) = \Pr(E|a_1 = -1)$$

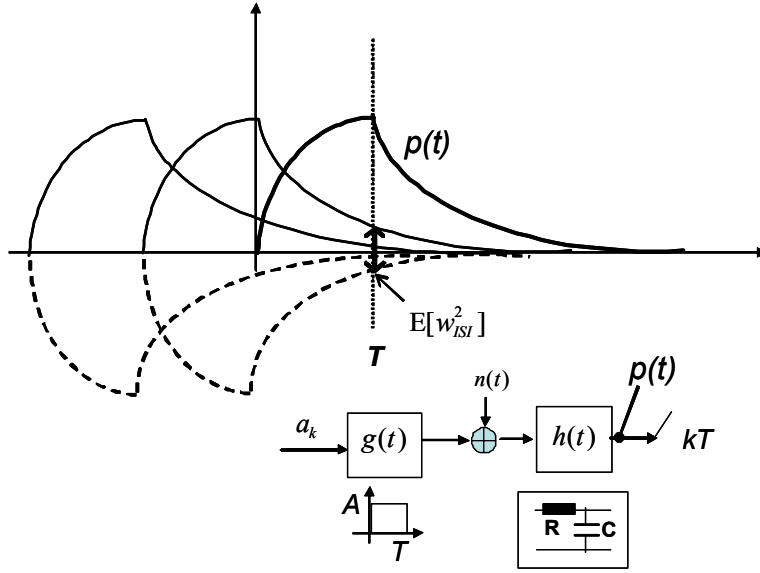


Figura 9: Interferenza intersimbolica per filtro RC (non di Nyquist)

5 Probabilità di errore con filtro RC in ricezione

Si calcoli la probabilità di errore per un sistema 2-PAM con impulso in trasmissione $g(t)$ rettangolare di ampiezza A e durata $T = 1/R_b$ e filtro in ricezione RC con risposta all'impulso $h(t) = [1/(R \times C)] \times \exp[-t/(R \times C)]$ (non è un filtro adattato alla forma d'onda in trasmissione). Si assuma una trasmissione di bit (simboli) equiprobabili soggetta a rumore $w(t)$ Gaussiano a media nulla e varianza (energia) $N_0/2$. Si trascuri l'effetto dell'interferenza intersimbolica -ISI.

Data la trasmissione di bit (simboli) equiprobabili $a_k \in \{-1, 1\}$, il segnale ricevuto a valle del filtro RC in ricezione $h(t)$ e del campionamento a passo kT vale

$$y(k) = a_k p(kT) + \sum_{i \neq k} a_i p(kT) + n(kT) \quad (4)$$

dove il contributo di rumore dovuto all'ISI¹ vale

$$w_{ISI} = \sum_{i \neq k} a_i p((k-i)T),$$

$n(t) = h(t) * w(t)$ e $p(t) = g(t) * h(t)$, in particolare

$$p(t) = \int_0^\infty g(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) h(t-\tau) d\tau =$$

quindi

$$\begin{aligned} p(t) &= A \times s(t) \text{ per } 0 \leq t \leq T \\ p(t) &= A \times s(t) - A \times s(t-T) \text{ per } t \geq T \end{aligned}$$

dove

$$s(t) = A \int_0^t h(\tau) d\tau = 1 - \exp[-t/(R \times C)]$$

Si noti che l'impulso $p(t)$ non soddisfa il criterio di Nyquist (si veda la figura 9). L'energia del rumore vale

$$\mathbb{E}[n^2(kT)] = \frac{N_0}{2} \times \int h^2(\tau) d\tau = \frac{N_0}{4R \times C}$$

¹Si noti che il contributo dovuto all'ISI non è nullo anche trascurando l'errore di temporizzazione. Come noto, questo è dovuto al fatto che la forma d'onda $p(t)$ non soddisfa il criterio di Nyquist.

La probabilita' di errore al tempo k (ad esempio $k = 1$) vale

$$\Pr(E) = Q \left(\frac{p(T)}{\sqrt{\mathbb{E}[n^2(T)] + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]}} \right) \simeq Q \left(\frac{A \left(1 - \exp \left[-\frac{T}{(R \times C)} \right] \right)}{\sqrt{\frac{N_0}{4R \times C} + \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]}} \right)$$

Trascurando l'effetto dovuto all'ISI ($\mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2] \simeq 0$) la probabilita' di errore vale

$$\begin{aligned} \Pr(E) &\simeq Q \left(\frac{A \left(1 - \exp \left[-\frac{T}{(R \times C)} \right] \right)}{\sqrt{\frac{N_0}{4R \times C}}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{4RC \times A^2 \left(1 - \exp \left[-\frac{T}{RC} \right] \right)^2}{N_0}} \right) = \\ &= Q \left(\sqrt{SNR \times \pi \phi^{-1} \times \left(1 - \exp[-2\pi\phi] \right)^2} \right) \end{aligned}$$

con $SNR = 2E_g/N_0$, $E_g = A^2T$, $\phi = f_t T$ dove $f_t = 1/(2\pi R \times C)$ e' la frequenza di taglio del filtro RC.

E' quindi possibile ottimizzare il prodotto $\phi = f_t T$ per minimizzare la probabilita' di errore, imponendo

$$\begin{aligned} \phi_{opt} &= \arg \min_{\phi} Q \left(\sqrt{SNR \times \pi \phi^{-1} \times \left(1 - \exp[-2\pi\phi] \right)^2} \right) = \\ &= \arg \max_{\phi} \phi^{-1} \times \left(1 - \exp[-2\pi\phi] \right)^2 \approx 0.2T \end{aligned}$$

(Facoltativo) Si valuti la probabilita' di errore per filtro RC in ricezione includendo anche l'effetto dell'interferenza intersimbolica

Si consideri ora il contributo dovuto all'interferenza intersimbolica

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2] &= \sum_{i>1} p^2(iT) = \\ &= A^2 \left[\exp \left(\frac{T}{R \times C} \right) - 1 \right]^2 \sum_{k=2}^{\infty} \exp \left(-\frac{k \times 2T}{R \times C} \right) = \\ &= A^2 \frac{\left[\exp \left(\frac{T}{R \times C} \right) - 1 \right]^2 \exp \left(-\frac{4T}{R \times C} \right)}{1 - \exp \left(-\frac{2T}{R \times C} \right)} \end{aligned}$$

Per $T \gg R \times C$ (in cui si vincola il tempo complessivo di carica/scarica del condensatore) la probabilita' di errore diventa:

$$\Pr(E) \approx Q \left(\frac{A \left(1 - \exp \left[-\frac{T}{(R \times C)} \right] \right)}{\sqrt{\frac{N_0}{4R \times C} + A^2 \exp \left(-\frac{2T}{R \times C} \right)}} \right) = Q(\sqrt{SINR})$$

Il rapporto segnale rumore + interferenza intersimbolica vale quindi

$$SINR \approx \frac{A^2 \left(1 - \exp \left[-\frac{T}{(R \times C)} \right] \right)^2}{\frac{N_0}{4R \times C} + A^2 \exp \left(-\frac{2T}{R \times C} \right)} = SINR \times \frac{\left(1 - \exp[-2\pi f_t T] \right)^2}{\pi T f_t + 2A^2 T \exp(-4\pi T f_t) / N_0}$$

da cui e' possibile ottimizzare la frequenza di taglio del filtro RC f_t imponendo

$$f_{t,opt} = \arg \max_{f_t} SINR(f_t) \approx \arg \max_{f_t} \left[SINR \times \frac{\left(1 - \exp[-2\pi f_t T] \right)^2}{\pi T f_t + 2A^2 T \exp(-4\pi T f_t) / N_0} \right]$$

Una frequenza di taglio elevata (che implica un rapido tempo carica/scarica) consente una riduzione significativa dell'energia di rumore dovuto all'ISI $\mathbb{E}_{a_i}[w_{ISI}^2]$ a fronte di un incremento dell'energia del rumore di fondo $\mathbb{E}[n^2(T)]$.

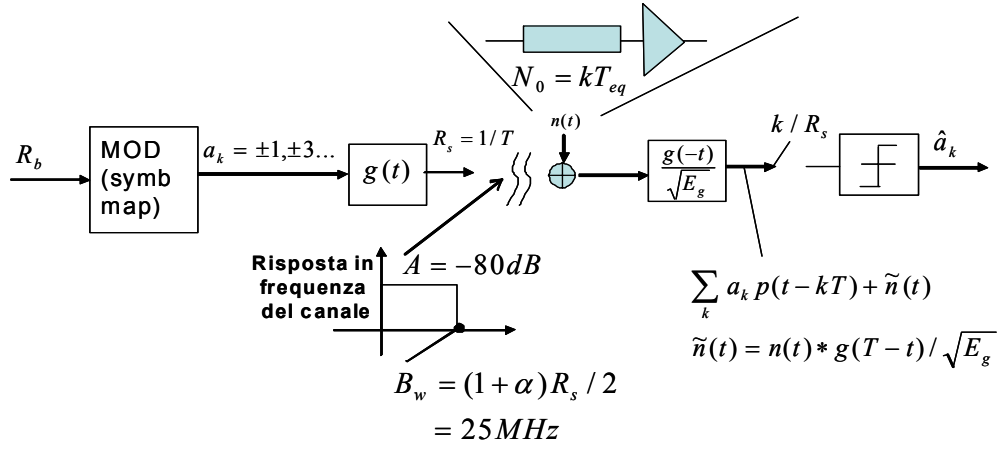


Figura 10:

6 Dimensionamento di tratta per sistemi M-PAM

Si vogliono trasmettere $R_b = 80 \text{ Mbit/s}$ garantendo una probabilità di errore sul bit $\bar{p} = 4/3 \times 10^{-6}$. Il collegamento è realizzato tramite una trasmissione M-PAM (si veda la figura 10) con banda disponibile $B_{\max} = 25 \text{ MHz}$. Determinare il (o i) numero(i) di livelli M possibili per soddisfare i vincoli richiesti e i rispettivi coefficienti di roll-off α per il filtro formatore dell'impulso $g(t)$ in trasmissione.

Il numero di bit/s è legato al flusso di simboli/s e al numero di livelli dalla relazione $R_b = R_S \log_2(M)$, il vincolo sulla banda si esprime in funzione del roll-off α come

$$B = \frac{R_S}{2}(1 + \alpha) = \frac{R_b}{\log_2 M \times 2}(1 + \alpha) \leq B_{\max}$$

da cui il vincolo sul numero di livelli deve soddisfare

$$M > \left\lceil 2^{\frac{R_b(1+\alpha)}{2B_{\max}}} \right\rceil \text{ per } \alpha \in [0, 1] \text{ e } M = 2^k, k = 1, \dots$$

con soluzioni possibili

- 1) $\alpha = 1/4, M = 4$
- 2) $\alpha = 0.875, M = 8$
- 3) $\alpha = 1, M = 16$ (impulso a coseno rialzato)

Le altre soluzioni possibili 4) $\alpha < 1/4, M = 4$; 5) $\alpha < 0.875, M = 8$; 6) $\alpha < 1, M = 16$ sono da scartare in quanto a parità di modulazione utilizzata le soluzioni 1,2,3 implementano un filtro in trasmissione con roll-off superiore (più facilmente realizzabile e meno sensibile a interferenza intersimbolica, ISI).

Verificare per ogni soluzione realizzabile individuata al punto precedente il rapporto segnale rumore (E_s/N_0) in ricezione richiesto per garantire il vincolo sulla probabilità di errore

La probabilità di errore per un sistema PAM è legata al rapporto segnale rumore e al numero di livelli M

$$P_b(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \quad (5)$$

dove $E_s = \log_2(M)E_b$ e $E_g = 3E_s/(M^2-1)$. Il numero di livelli possibili è $M = 4, 8, 16$.

Il rapporto E_s/N_0 si trova invertendo (5) e imponendo il vincolo sulla probabilità di errore $P_b(E) \leq \bar{p} = 4/3 \times 10^{-6}$ da cui

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_1 = 17 \text{ dB} \text{ (opzione 1, 4-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_2 = 23 \text{ dB} \text{ (opzione 2, 8-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_3 = 29 \text{ dB} \text{ (opzione 3, 16-PAM)} \end{aligned}$$

Supponendo che nella banda di interesse il canale attenui la potenza del segnale ricevuto di $A = 80dB$ ($A = 10^8$) e che la temperatura equivalente di rumore del ricevitore sia pari a $T_{eq} = 11310K$ (si ricorda che non e' una temperatura fisica) si scelga la migliore tra le opzioni possibili nel caso in cui la massima potenza in trasmissione $P_{T,max} = 17dBm$

Il vincolo sul rapporto segnale rumore minimo in ricezione $E_s/N_0 \geq \gamma_i$ si puo' riscrivere (per tutte le 3 soluzioni, $i = 1, 2, 3$) come vincolo sulla potenza minima in ricezione P_R (e quindi sulla potenza in trasmissione $P_T = A \times P_R$)

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_R}{R_S N_0} = \frac{P_T}{A R_S N_0} = \frac{P_T \log_2(M)}{A N_0 R_b} \geq \gamma_i$$

da cui

$$P_T \geq \gamma_i \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)}$$

Si seglierà l'opzione piu' adeguata in base alla massima potenza disponibile $P_{T,max}$. La densita' spettrale di potenza del rumore N_0 si calcola (per $T_0 = 290K$ si ha $kT_0 = -174 [dBm/Hz]$)

$$\begin{aligned} N_0 &= kT_{eq}|_{dBm/Hz} = \left(kT_0 \times \frac{T_{eq}}{T_0} \right) |_{dBm/Hz} = \\ &= kT_0 |_{dBm/Hz} + 10 \log_{10} \left(\frac{T_{eq}}{T_0} \right) = \\ &= -174 + 10 \log_{10} \left(\frac{11310}{290} \right) = -158dBm/Hz \end{aligned}$$

La minima potenza in trasmissione si scrive per le tre opzioni come

$$\begin{aligned} P_T &\geq 15dBm = \gamma_1 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 1, } M = 4 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 20dBm = \gamma_2 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 2, } M = 8 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 25dBm = \gamma_3 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 3, } M = 16 \text{ PAM)} \end{aligned}$$

da cui e' evidente che l'unica soluzione possibile per $P_{T,max} = 17dBm$ e' l'opzione (1). Ai fini dei calcoli, si noti che e' preferibile calcolare separatamente (per ogni opzione) la seguente potenza in dBm

$$P = N_0 R_b / \log_2(M) = N_0 R_S \cdot [dBm]$$

Si supponga ora di suddividere il collegamento in 4 tratte uguali con attenuazione ciascuna $A = 74dB$ ($A = 1/4 \times 10^8$ - si veda figura 11). I tre dispositivi ripetitori del segnale (1,2,3) collocati tra trasmettitore e ricevitore possono essere sia rigenerativi che non rigenerativi. Si assuma che ogni stadio di ricezione sia caratterizzato dalla stessa temperatura equivalente di rumore. Si valuti in questo caso quali delle tre opzioni precedenti e' praticabile in modo che la probabilita' d'errore al terminale RX sia garantita pari a $\bar{p} = 4/3 \times 10^{-6}$ e nel caso in cui la massima potenza in trasmissione sia $P_{T,max} = 17dBm$. (si noti che la somma delle potenze totali massime che possono essere spese dai 4 dispositivi - trasmettitore e 3 ripetitori) vale $4P_{T,max} = 23dBm$ maggiore rispetto al caso singola tratta. Si valutino i seguenti casi:

Ripetitori rigenerativi (caso 1),

Ripetitori non rigenerativi (caso 2),

Ripetitore 2 rigenerativo, gli altri (1,3) non rigenerativi (caso 3),

Ripetitore 2 non rigenerativo, mentre gli altri (1,3) rigenerativi (caso 4).

Caso 1: ripetitori rigenerativi.

La probabilita' di errore (end-to-end) tra trasmettitore e ricevitore vale (per 4 tratte)

$$P_{end} = 1 - [1 - P_b(E)]^4 \approx 4P_b(E) \leq \bar{p}$$

dove come prima $P_b(E)$ e' la probabilita' di errore sul bit per la singola tratta M-PAM (5). Per ogni opzione (1,2,3) possiamo riscrivere il vincolo sulla probabilita' di errore

$$P_b(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \leq \bar{p}/4 \quad (6)$$

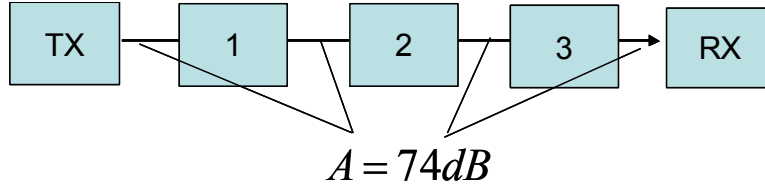


Figura 11:

Il rapporto $E_s/N_0 \geq \gamma_i$ minimo si trova invertendo (5) e imponendo il vincolo sulla probabilita' di errore (6) da cui

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_1 = 17dB \text{ (opzione 1, 4-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_2 = 23dB \text{ (opzione 2, 8-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_3 = 29dB \text{ (opzione 3, 16-PAM)} \end{aligned} \quad (7)$$

si noti che non c'e' differenza apprezzabile rispetto al caso precedente. Si ricordi che vale ancora

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_R}{R_S N_0} = \frac{P_T}{A R_S N_0} = \frac{P_T \log_2(M)}{A N_0 R_b} \geq \gamma_i$$

La minima potenza in trasmissione necessaria su ogni tratta si scrive per le tre opzioni come

$$\begin{aligned} P_T &\geq 9dBm = \gamma_1 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 1, } M = 4 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 14dBm = \gamma_2 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 2, } M = 8 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 19dBm = \gamma_3 \times \frac{A N_0 R_b}{\log_2(M)} |_{dBm} \text{ (opzione 3, } M = 16 \text{ PAM)} \end{aligned}$$

dove questa volta l'attenuazione e' inferiore di 6dB, $A = 74dB$ (grazie alla suddivisione in piu' tratte a distanze piu' brevi) da cui e' evidente che le soluzioni 1-2 sono ora possibili per $P_{T,max} = 17dBm$.

Dato che due soluzioni sono possibili si sceglia quella che utilizza in trasmissione il filtro formatore dell'impulso con roll-off maggiore (ovvero l'opzione 2 che utilizza $\alpha = 0.875$). Questo dovrebbe garantire una miglior protezione da errori di temporizzazione.

Caso 2: ripetitori non rigenerativi.

Il rumore si somma su ogni tratta, al ricevitore finale la probabilita' di errore (per 4 tratte) vale

$$P_b(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{4 \times N_0} \times \frac{3}{M^2 - 1}} \right) \quad (8)$$

Il vincolo sulla probabilita' di errore ora vale

$$P_b(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0} \times \frac{3}{M^2 - 1}} \right) \leq \bar{p} \quad (9)$$

da cui si trova il minimo rapporto $E_s/N_0 \geq \gamma_i$ per ogni opzione

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_1 = 23dB \text{ (opzione 1, 4-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_2 = 29dB \text{ (opzione 2, 8-PAM)} \\ \frac{E_s}{N_0} &\geq \gamma_3 = 35dB \text{ (opzione 3, 16-PAM)} \end{aligned}$$

si noti che e' aumentato rispetto al caso precedente (di $10 \log_{10}(4) = 6dB$) a causa della presenza dei relay non-rigenerativi.

$$\begin{aligned} P_T &\geq 15dBm = \gamma_1 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 1, } M = 4 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 20dBm = \gamma_2 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 2, } M = 8 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 25dBm = \gamma_3 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 3, } M = 16 \text{ PAM)} \end{aligned}$$

L'opzione 1 e' l'unica utilizzabile per $P_{T,\max} = 17dBm$

Caso 3:

Ai fini del solo calcolo della probabilita' di errore il sistema si comporta come se fosse costituito da 2 tratte rigenerative affette da rumore a potenza doppia (che tiene conto della presenza dei due ripetitori non rigenerativi). La probabilita' di errore end-to-end P_{end} deve soddisfare

$$\begin{aligned} P_{end} &= 1 - [1 - P_{b,eq}(E)]^2 \approx \\ &\approx 2P_{b,eq}(E) \leq \bar{p} \end{aligned}$$

dove la probabilita' di errore per le 2 tratte equivalenti vale

$$P_{b,eq}(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{2N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right)$$

Il minimo rapporto $Es/N_0 \geq \gamma_i$ per ogni opzione ($M = 4, 8, 16$) si trova risolvendo

$$\frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \leq \frac{\bar{p}}{2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{Es}{N_0} &\geq \gamma_1 = 20dB \text{ (opzione 1, 4-PAM)} \\ \frac{Es}{N_0} &\geq \gamma_2 = 26dB \text{ (opzione 2, 8-PAM)} \\ \frac{Es}{N_0} &\geq \gamma_3 = 32dB \text{ (opzione 3, 16-PAM)} \end{aligned}$$

Le potenze minime valgono

$$\begin{aligned} P_T &\geq 12dBm = \gamma_1 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 1, } M = 4 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 17dBm = \gamma_2 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 2, } M = 8 \text{ PAM)} \\ P_T &\geq 22dBm = \gamma_3 \times \frac{AN_0R_b}{\log_2(M)}|_{dBm} \text{ (opzione 3, } M = 16 \text{ PAM)} \end{aligned}$$

Dato che le opzioni (1,2) sono utilizzabili per $P_{T,\max} = 17dBm$, si sceglia' l'opzione 2 dato che il coefficiente di roll-off per gli impulsi in trasmissione vale $\alpha = 0.875$.

Caso 4:

Ai fini del solo calcolo della probabilita' di errore il sistema si comporta come se fosse costituito da 3 tratte rigenerative in cui la tratta intermedia e' affetta da rumore a potenza doppia (che tiene conto della presenza del ripetitore non rigenerativo). La probabilita' di errore end-to-end P_{end} deve soddisfare

$$\begin{aligned} P_{end} &= 1 - [1 - P_{b,1}(E)]^2 [1 - P_{b,2}(E)] \approx \\ &\approx 2P_{b,1}(E) + P_{b,2}(E) \leq \bar{p} \end{aligned}$$

dove per le due tratte esterne

$$P_{b,1}(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right)$$

mentre per la tratta intermedia il rumore e' doppio

$$P_{b,2}(E) = \frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{2N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right)$$

Il minimo rapporto $Es/N_0 \geq \gamma_i$ per ogni opzione ($M = 4, 8, 16$) si trova risolvendo numericamente la disequazione,

$$\frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} \left[Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) + Q \left(\sqrt{\frac{Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \right] \leq \bar{p} \quad (10)$$

mentre le potenze minime si trovano a partire dai γ_i utilizzando le stesse relazioni viste per i precedenti punti
(Nota) Si noti che per alto rapporto segnale rumore si potrebbe approssimare la disequazione (10) nel seguente modo

$$\frac{2(M-1)}{M \log_2(M)} Q \left(\sqrt{\frac{Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \leq \bar{p}$$

in quanto $Q \left(\sqrt{\frac{2Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right) \ll Q \left(\sqrt{\frac{Es}{N_0} \times \frac{3}{M^2-1}} \right)$.

7 Tempo di vita della rete

Si assuma la rete di comunicazione in figura 12: il nodo S trasmette un flusso di bit al nodo D attraverso un nodo di relay (ripetitore rigenerativo) R. Il nodo R ritrasmette sia i bit provenienti da S che quelli provenienti da T. I flussi in bit/s per ogni collegamento sono specificati in figura 12. Il nodo S e R dispongono di un'energia iniziale pari a 6500J (e.g., batteria da 3V e capacita' 600mAh). Il nodo T e' connesso alla rete elettrica. Per ogni bit trasmesso il nodo S e il nodo R consumano $E_b = 0.5\mu J$ Si valuti il tempo di vita della rete e il numero totale di bit trasmessi da S verso D. Si assuma ciascun collegamento senza errore.

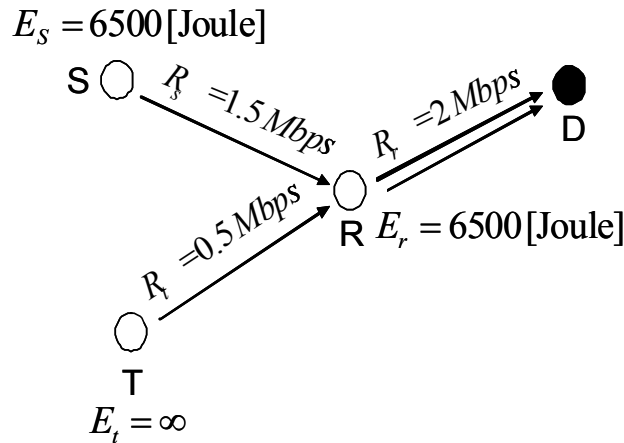


Figura 12: Topologia di rete

Il numero di bit trasmessi dal nodo S prima di terminare la propria riserva di batteria vale $E_S/E_b = 13Gbit$, il tempo impiegato dal nodo S per trasmettere i bit al nodo R dipende dalla capacita' del collegamento:

$$T_S = \frac{E_S/E_b}{R_s} = 8666 \text{ sec} \sim 2.4h$$

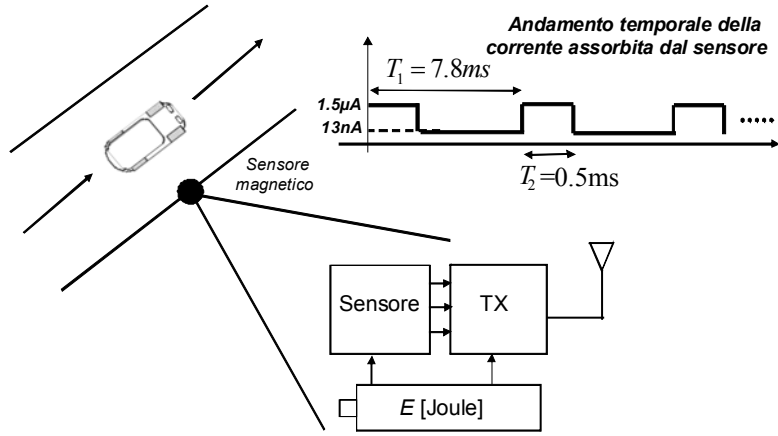


Figura 13:

Seguendo gli stessi passaggi il tempo impiegato dal nodo R per trasmettere $E_R/E_b = 13Gbit$ (prima di esaurire la propria batteria) vale

$$T_R = \frac{E_R/E_b}{R_r} = 6500 \text{ sec} \sim 1.8h$$

Si noti che la potenza P_S spesa dal nodo S vale $P_S = E_b R_s = 0.75W$, mentre quella del nodo R e' incrementata a causa del minor tempo di bit e vale $P_R = E_b R_r = 1W$. A parita' di energia iniziale il nodo R si scarica prima a causa della necessita' di gestire il traffico aggiuntivo proveniente dal nodo T.

Il tempo di vita della rete (ovvero il tempo in cui il primo nodo esaurisce le proprie riserve di energia) vale

$$T_{life} = \min\{T_S, T_R\} = T_R \sim 1.8h$$

mentre il numero di bit provenienti dal nodo S e spediti al nodo D vale

$$Bit_S = T_{life} \times R_s = 9.75Gbit$$

Si noti che al tempo T_{life} soltanto il nodo R ha esaurito la batteria, il nodo S possiede ancora energia residua per trasmettere. La perdita del nodo intermedio (di relay) R non consente il corretto funzionamento della rete.

8 Dimensionamento della batteria

Si vuole dimensionare un sistema di rilevamento del passaggio di autoveicoli su una strada (figura 13). E' installato un dispositivo a bordo corsia dotato di: 1) un sensore magnetico in grado di misurare, a partire dalla variazione del campo magnetico indotto, il passaggio del veicolo; 2) un apparato di trasmissione. In figura 13 e' mostrato l'andamento temporale della corrente assorbita dal sensore. Il sensore (alimentato a 3V) campiona il campo magnetico con una frequenza di 128Hz, la durata del campionamento e' pari a 0.5ms. Ad ogni passaggio del veicolo, il sistema di trasmissione e' dimensionato per trasmettere un segnale di durata 10ms, utilizzando una potenza pari a 1mW.

Il sensore e l'apparato di trasmissione sono alimentati da una batteria di $E_0 = 6000mAh$. Si valuti il tempo di vita del dispositivo al variare del numero medio di veicoli N in transito sulla corsia per ogni ora. Se il tempo di vita del dispositivo non puo' essere inferiore a 2 anni, qual'e' il numero massimo di veicoli in transito per ora rilevabile?

L'andamento temporale della corrente assorbita dal sensore rivela un ciclo di attivita' di durata pari a 0.5ms e corrente assorbita 1.5µA seguito da una fase di sleep di durata 6.8ms e corrente assorbita 13nA (con periodo $1/128Hz = 7.8ms$). Possiamo quindi calcolare la potenza media assorbita P_s :

$$P_s = 3V \times I_{avg} \text{ [Watt]}$$

dove I_{avg} e' la corrente assorbita in media dal sensore

$$\begin{aligned} I_{avg} &= 1.5\mu A \times \frac{0.5ms}{7.8ms} + 13nA \times \left(1 - \frac{0.5ms}{7.8ms}\right) = \\ &= 0.096\mu A + 12.2nA = 0.108\mu A \end{aligned}$$

in particolare $\frac{1ms}{7.8ms} = 6.4\%$ e' il *duty cycle* del sensore (ovvero la frazione di tempo nello stato attivo).

$$\begin{aligned} P_s &= 3V \times I_{avg} = 3V \times 0.108\mu A \\ &= 0.324\mu W \end{aligned}$$

L'energia spesa dal sensore per ogni ora di funzionamento (espressa in mWh) vale

$$E_s = P_s \times 3600 = 1.167 [mWh]$$

Ad ogni passaggio del veicolo, l'energia spesa per trasmettere il segnale di durata $10ms$ con potenza $1mW$ vale

$$E_d = 10ms \times 1mW = 0.01mJ$$

Supponendo un numero medio di veicoli in passaggio per ogni ora pari a N [veicoli/h], l'energia media spesa dall'apparato radio per ogni ora di funzionamento (espressa in mWh)

$$NE_d = N \times 10ms \times 1mW = N \times 0.01 [mWh],$$

si noti infatti che $N \times 10ms$ è la durata media di accensione dell'apparato radio in un'ora di funzionamento. Una batteria di capacità $6000mAh$ corrisponde a una capacità:

$$E_0 = 6000mAh \times 3V = 18,000 [mWh]$$

(pari a $18,000 \times 3.6 = 64,800$ Joule). E' possibile ora ricavare il numero di ore di funzionamento n_h del dispositivo al variare del numero medio di veicoli in transito per ora N :

$$\begin{aligned} \underbrace{(E_s + NE_d)}_{\text{ENERGIA SPESA}} \times n_h &= \underbrace{E_0}_{\text{ENERGIA DISPONIBILE}} \\ (1.167 + 0.01 \times N) \times n_h &= 18,000 \\ n_h &= \frac{18,000}{1.167 + 0.01 \times N} \end{aligned}$$

Se il tempo di vita del dispositivo non può essere inferiore 1 anno (pari a un numero di ore $n_h = 365 \times 24 = 8,760$) il numero medio di veicoli in transito per ogni ora deve essere inferiore a

$$N \leq \frac{18,000 - 1.167 \times n_h}{n_h \times 0.01} \Big|_{n_h=8,760} = 89 [\text{veicoli/h}]$$

Si assuma ora che la carica (mAh) disponibile E si riduca nel tempo secondo una legge lineare,

$$E = E_0 \times (1 - \alpha t)$$

Si calcoli α assumendo che la velocità di auto-scarica annuale della batteria (self-discharge rate) sia pari al 3% .

Una batteria non in uso si autoscarica a causa di perdite di vario tipo. La velocità è in genere variabile a seconda della tipologia della batteria e della temperatura. Le batterie alcaline (non ricaricabili) attualmente in commercio si scaricano di circa il 3% all'anno. Tenendo conto del modello di scarica lineare possiamo ricavare α

$$\begin{aligned} 18,000 [mWh] \times (1 - \alpha t) \Big|_{t=8,760h} &= 18,000 [mWh] \times (1 - 0.03) \\ \alpha &= \frac{0.03}{8,760h} = 3 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

α [sec⁻¹] è la percentuale di energia persa ad ogni ora di funzionamento.

Si ricalcoli il tempo di vita del dispositivo al variare del numero medio di veicoli in transito ogni ora

Il numero di ore di funzionamento n_h si ricava dal bilancio energetico (tra energia spesa e energia disponibile)

$$\underbrace{(E_s + NE_d) \times n_h}_{\text{ENERGIA SPESA}} = \underbrace{E_0 \times (1 - \alpha n_h)}_{\text{ENERGIA DISPONIBILE}}$$

da cui

$$\begin{aligned} (1.167 + 0.01 \times N) \times n_h &= \\ &= 18,000 \times (1 - 3 \times 10^{-6} \times n_h) \\ n_h &= \frac{18,000}{1.221 + 0.01 \times N} \end{aligned}$$

Se il tempo di vita del dispositivo non può essere inferiore 1 anno allora il numero medio di veicoli in transito per ogni ora deve essere inferiore a

$$N \leq \frac{18.000 - 1.221 \times n_h}{n_h \times 0.01} \Big|_{n_h=8,760} = 83 \text{ [veicoli/h]}$$

9 Probabilità di errore e ARQ

Una sequenza di messaggi generati da A vengono inoltrati verso E seguendo lo schema in figura 14 (Schema 1). Il nodo A inoltra i pacchetti a una stazione rigenerativa (relay) R. La probabilità di errore per questo collegamento vale $p_{AR} = 1/100$. Se il relay è in grado di ricevere correttamente il messaggio di A ritrasmette a sua volta verso la stazione E servendosi di un collegamento con probabilità di errore $p_{RE} = 1/50$. Nel caso in cui il relay non sia stato in grado di ricevere correttamente il messaggio - si assuma che il relay possa trasmettere al nodo A un messaggio di positive/negative acknowledgement (ACK-NACK) - il nodo A tenta una trasmissione diretta verso il nodo E con probabilità di errore $p_{AE} = 1/4$. Calcolare la probabilità di errore complessiva per un messaggio trasmesso da A e ricevuto da E

Utilizzando il teorema delle probabilità totali, la probabilità di errore complessiva P_{err} per il sistema in figura 15 vale

$$P_{err}(E) = p_{AR} \times P_{err}(E|0) + (1 - p_{AR}) \times P_{err}(E|1) \quad (11)$$

dove p_{AR} e $1 - p_{AR}$ identificano la probabilità che il relay non sia/sia in grado di decodificare il messaggio trasmesso da A, rispettivamente, $P_{err}(E|k)$ $k = 0, 1$ è la probabilità di errore complessiva condizionata alla probabilità di errore del relay (evento 0) e alla probabilità che il relay decodifichi correttamente (evento 1). In base allo schema di trasmissione illustrato

$$k = 0 \Rightarrow P_{err}(E|0) = p_{AE} \text{ (trasmissione diretta A-E nel caso nessun relay decodifichi)} \quad (12)$$

$$k = 1 \Rightarrow P_{err}(E|1) = p_{RE} \text{ (il relay ha decodificato correttamente)}$$

La probabilità di errore complessiva quindi vale

$$\begin{aligned} P_{err}(E) &= p_{AR} \times p_{AE} + (1 - p_{AR}) \times p_{RE} = \\ &\sim 2 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (13)$$

Si determini la probabilità di errore complessiva modificando lo schema di trasmissione (Schema 1) come segue (si veda lo Schema 2 in figura 14): il terminale A tenta prima di trasmettere direttamente il messaggio al nodo E con probabilità di errore $p_{AE} = 1/4$. Se la trasmissione fallisce il relay può inoltrare il pacchetto al relay (con lo stesso procedimento illustrato).

La probabilità di errore vale

$$\begin{aligned} P_{err}(E) &= p_{AE} \times p_{AR} + p_{AE} \times (1 - p_{AR}) \times p_{RE} = \\ &\sim 7.5 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (14)$$

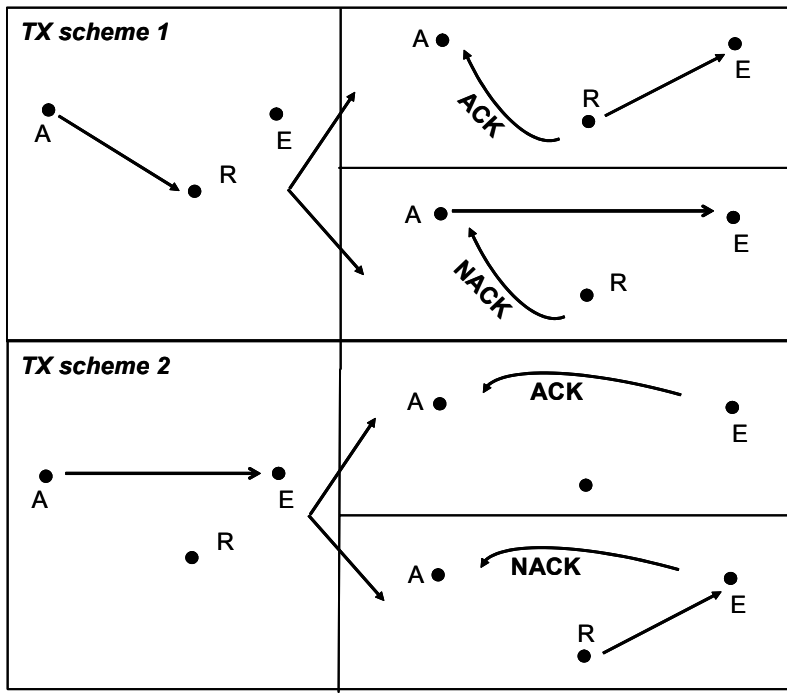
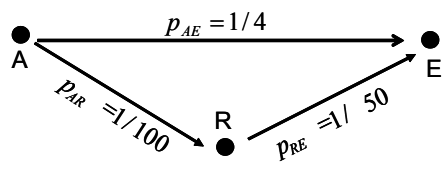


Figura 14:

si noti che questa strategia da vantaggi significativi rispetto alla precedente. Intuitivamente possiamo giustificare il risultato notando che nella prima strategia (Schema 1) il collegamento diretto non e' utilizzato nel caso in cui il collegamento relay-nodo E fallisca, nella strategia (Schema 2) qui proposta invece il nodo A esegue un primo tentativo di connessione con il nodo E, nel caso fallisca il nodo A puo' inoltrare il messaggio al relay.

Si supponga che la durata di una trasmissione (per qualunque collegamento) sia pari a T , per entrambi gli schemi si determini il tempo medio di trasmissione T_{tot} di un messaggio dal nodo A al nodo E (si trascuri per semplicita' il tempo impiegato per la trasmissione dei messaggi ACK/NACK). Si assuma che tutti i nodi trasmettano in divisione di tempo.

Schema 1: Si noti che il tempo totale vale $2T$ sec. in ogni caso

$$T_{tot} = 2T$$

Schema 2: Si noti che il tempo di trasmissione vale T sec solo se la trasmissione diretta ha successo con probabilita' $(1 - p_{AE})$, il tempo totale vale invece $2T$ nel caso in cui il collegamento con il relay fallisca con probabilita' p_{AR} , infine $3T$ se il relay puo' trasmettere

$$\begin{aligned} T_{tot} &= T \times (1 - p_{AE}) + 2T \times p_{AE} \times p_{AR} + 3T \times p_{AE} \times (1 - p_{AR}) = \\ &\sim 0.75 \times T + 5 \times 10^{-3} \times T + 0.74 \times T \sim 1.5 \times T \end{aligned}$$

Lo schema 2 e' vantaggioso anche sotto il profilo del ritardo di trasmissione.

(Esercizio piu' complesso) Si modifichino i due schemi proposti nell'esercizio precedente consentendo al nodo A di inoltrare il messaggio a tre stazioni rigenerative (relay) $R1, R2, R3$ (si veda la figura 15). La probabilita' di errore per questi collegamenti vale (come prima) $p_{AR} = 1/100$. I relay in grado di ricevere correttamente il messaggio di A ritrasmettono a loro volta verso la stazione E servendosi di un collegamento con probabilita' di errore $p_{RE} = 1/50^2$. La destinazione E riceve il messaggio con successo se almeno una trasmissione (originata dai soli relay) e' andata a buon fine. Si ricorda che lo Schema 1 (in cui ora sono disponibili tre relay) prevede prima una trasmissione diretta ai relay, nel caso di fallimento il nodo A puo' tentare la connessione diretta con probabilita' di errore $p_{AE} = 1/4$. Per lo Schema 2 in nodo A tenta prima una connessione diretta, successivamente nel caso di fallimento inoltra il messaggio ai tre relay. Si assume che ogni relay possa trasmettere al nodo A un messaggio di positive/negative acknowledgement (ACK-NACK). Calcolare la probabilita' di errore complessiva per un messaggio trasmesso da A e ricevuto da E per entrambi gli schemi e il tempo totale medio di trasmissione.

Schema 1: probabilita' di errore. Utilizzando il teorema delle probabilita' totali, la probabilita' di errore complessiva P_{err} per il sistema in figura 15 vale

$$P_{err}(E) = \sum_{k=0}^3 \Pr(k) \times P_{err}(E|k) \tag{15}$$

dove $\Pr(k)$ e' la probabilita' che $k = 0, \dots, 3$ relays siano in grado di decodificare il messaggio trasmesso da A, ovvero

$$\Pr(k) = \binom{3}{k} (1 - p_{AR})^k p_{AR}^{3-k}$$

e $P_{err}(E|k)$ e' la probabilita' di errore complessiva condizionata al numero k di relay in grado di ricevere correttamente il messaggio di A. In base allo schema di trasmissione illustrato $P_{err}(E|k)$ assume valori diversi a seconda del numero di relay che decodificano:

- $k = 0 \Rightarrow P_{err}(E|0) = p_{AE}$ (trasmissione diretta A-E nel caso nessun relay decodifichi)
- $k = 1 \Rightarrow P_{err}(E|1) = p_{RE}$ (un solo relay ha decodificato correttamente)
- $k = 2 \Rightarrow P_{err}(E|2) = p_{RE}^2$ (due relay hanno decodificato correttamente)
- $k = 3 \Rightarrow P_{err}(E|3) = p_{RE}^3$ (tre relay hanno decodificato correttamente)

²Si assume che i relay organizzino le trasmissioni in modo da non interferire tra loro (per esempio in divisione di tempo o di frequenza).

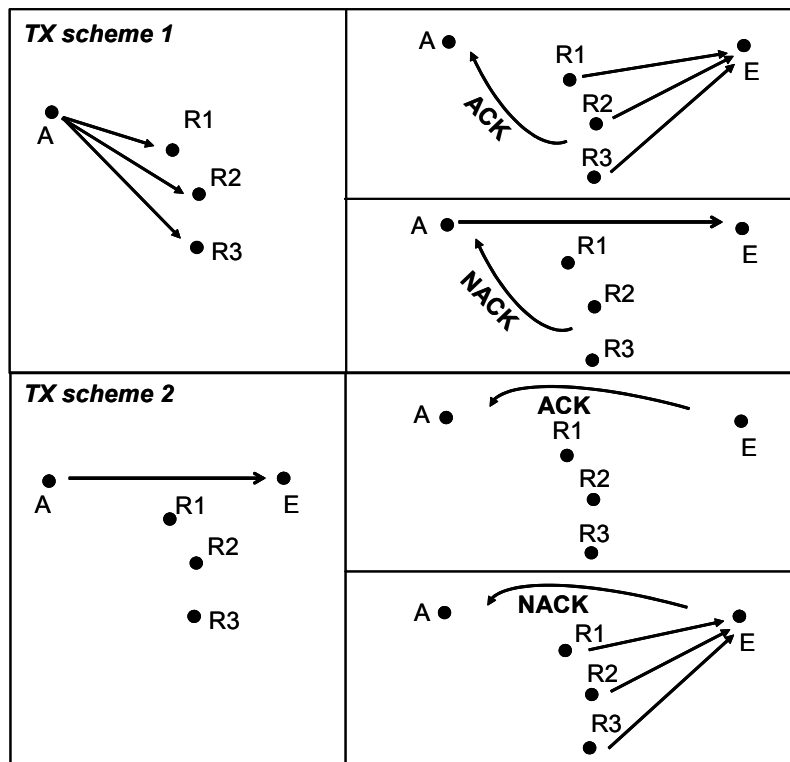
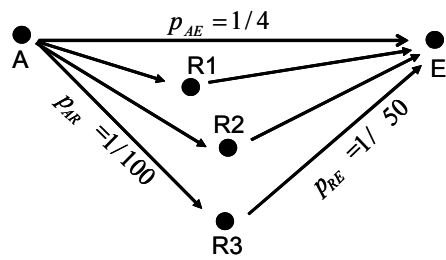


Figura 15:

Si noti che se $k > 1$ la stazione E ha almeno 2 relay a disposizione per decodificare il messaggio trasmesso da A. Se k relays hanno decodificato con successo il messaggio di A E non e' in grado di ricevere correttamente il messaggio se e solo se tutti i k collegamenti con i relay sono in errore, da cui $P_{err}(E|k) = p_{RE}^k$ per $k > 0$. Dalla (15) la probabilita' di errore complessiva quindi vale

$$\begin{aligned} P_{err}(E) &= p_{AR}^3 \times p_{AE} + \sum_{k=1}^3 \binom{3}{k} (1 - p_{AR})^k p_{AR}^{3-k} \times p_{RE}^k = \\ &\sim 2.6 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Schema 1: tempo medio totale di trasmissione. Si noti che $3T$ sec sono necessari per inoltrare il messaggio ai 3 relay:, se nessun relay e' in grado di decodificare con probabilita' $\Pr(0)$ il tempo totale e' $4T$ (in cui si tiene conto del tempo impiegato per la trasmissione diretta), se k relay decodificano con probabilita' $\Pr(k)$ il tempo totale e' $T_{tot}(\cdot|k) = (3T + kT)$.

$$\begin{aligned} T_{tot} &= \sum_{k=0}^3 \Pr(k) \times T_{tot}(\cdot|k) = 4T \times \Pr(0) + \sum_{k=1}^3 (3T + kT) \times \Pr(k) = \\ &= 4T \times p_{AR}^3 + \sum_{k=1}^3 (3T + kT) \binom{3}{k} (1 - p_{AR})^k p_{AR}^{3-k} \sim 5.7 \times T \end{aligned}$$

Schema 2: probabilita' di errore. La probabilita' di errore vale (si noti che anche in questo caso $P_{err}(E|0) = 1$)

$$P_{err}(E) = p_{AE} \times \sum_{k=0}^3 \Pr(k) \times P_{err}(E|k) = \tag{16}$$

$$= p_{AE} \times p_{AR}^3 + p_{AE} \times \sum_{k=1}^3 \binom{3}{k} (1 - p_{AR})^k p_{AR}^{3-k} \times p_{RE}^k \sim \tag{17}$$

$$\sim 6.7 \times 10^{-6} \tag{18}$$

si noti che questa strategia da vantaggi significativi rispetto alla precedente. Intuitivamente possiamo giustificare il risultato notando che nella prima strategia (Schema 1) il collegamento diretto non e' utilizzato nel caso in cui il collegamento relay-nodo E fallisca, nella strategia (Schema 2) qui proposta invece il nodo A esegue un primo tentativo di connessione con il nodo E, nel caso fallisca il nodo A puo' inoltrare il messaggio ai relay.

Schema 2: tempo medio totale di trasmissione. Si noti che il tempo minimo di trasmissione vale T sec solo se la trasmissione diretta ha successo con probabilita' $(1 - p_{AE})$, per gli altri casi il tempo totale e' $T_{tot}(\cdot|k) = T + 3T + kT = 4T + kT$ con probabilita' $p_{AE} \times \Pr(k)$.

$$\begin{aligned} T_{tot} &= T \times (1 - p_{AE}) + p_{AE} \times \left[T + \sum_{k=0}^3 \Pr(k) \times T_{tot}(\cdot|k) \right] = \\ &= T \times (1 - p_{AE}) + p_{AE} \times \sum_{k=0}^3 (4T + kT) \binom{3}{k} (1 - p_{AR})^k p_{AR}^{3-k} \sim \\ &\sim 0.75 \times T + 0.25 \times 6.8T = 2.45 \times T \end{aligned}$$

Lo schema 2 e' vantaggioso anche sotto il profilo del ritardo di trasmissione.