

Appunti Esercitazioni per il corso di Sistemi di Comunicazione

Parte 2

Stefano Savazzi

1 Quantizzazione uniforme

Si vogliono trasmettere 25 segnali telefonici $x(t)$ su ponte radio. I segnali telefonici hanno ciascuno una banda compresa entro $B = 4kHz$, la codifica è di tipo PCM. Calcolare il flusso risultante in bit/s

Per la codifica PCM il numero di bit per ogni campione vale $N = 8bit/campione$

$$R_b = 25 \times 2B \times N = 1.6Mbps$$

Ripetere lo stesso esercizio assumendo di trasmettere 25 segnali stereofonici sovracampionati alla frequenza di $44kHz$ con $12bit/campione$

Il segnale stereofonico è composto da due flussi (si pensi al flusso L/R), $N = 12bit/campione$

$$R_b = 25 \times 2 \times 44Kcampioni/s \times 12bit/campione = 26.4Mbps$$

Si determini il rapporto segnale-rumore dovuto al solo errore di quantizzazione per entrambi i casi: si assuma che la densità di probabilità delle ampiezze del segnale trasmesso $x(t)$ sia Gaussiana

Il rapporto segnale-rumore complessivo a valle della ricostruzione del segnale analogico (tenendo conto della probabilità di errore sul bit introdotta dal sistema di comunicazione $P_b(E)$) vale

$$SNR = \frac{E[x^2(t)]}{\frac{4}{3}V_P^2 P_b(E) + \frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}}$$

assumendo che il rumore sia dovuto al solo rumore di quantizzazione $P_b(E) \rightarrow 0$

$$SNR_q = \frac{E[x^2(t)]}{\frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}}$$

Se la densità di probabilità delle ampiezze del segnale è Gaussiana allora

$$V_P \simeq \alpha \sqrt{E[x^2(t)]}$$

dove $\alpha = 3 \div 4$ (scegliamo per convenienza $\alpha = \sqrt{12} = 3.46$)

$$SNR_q = \frac{2^{2N}}{4} \simeq 6(N - 1) \text{ [dB]}$$

ovvero $42dB$ per il segnale telefonico e $66dB$ per il segnale stereofonico.

Si noti che se la densità delle ampiezze fosse stata uniforme allora $\alpha = \sqrt{3}$, infatti

$$E[x^2(t)] = \frac{1}{2V_P} \int_{-V_P}^{V_P} x^2 dx = \frac{V_P^2}{3}$$

Si determini per entrambi i casi la massima probabilità di errore (sul bit) tollerabile dal sistema di trasmissione dati in modo che la degradazione introdotta dalla trasmissione sul canale rumoroso sia comparabile all'errore dovuto alla quantizzazione

A valle della ricostruzione del segnale analogico, l'errore quadratico medio complessivo, per un segnale a massima dinamica $\pm V_P$ vale (si veda la teoria)

$$\frac{4}{3}V_P^2 P_b(E) + \frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}$$

dove $\frac{4}{3}V_P^2 P_b(E)$ è il contributo dovuto al solo errore causato dal ricevitore rumoroso, $\frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}$ è l'errore introdotto dalla quantizzazione a valle della ricostruzione del segnale. La condizione da imporre sulla probabilità di errore $P_b(E)$ vale

$$\frac{4}{3}V_P^2 P_b(E) \approx \frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}$$

da cui

$$P_b(E) \approx \frac{1}{4 \times 2^{2N}}$$

Per i 25 segnali telefonici

$$P_b(E) \approx \frac{1}{4 \times 2^{2 \times 8}} = 3.8 \times 10^{-6}$$

Per i 25 segnali stereofonici

$$P_b(E) \approx \frac{1}{4 \times 2^{2 \times 12}} = 1.6 \times 10^{-9}$$

Si noti che le probabilità di errore calcolate per i due casi rappresentano di fatto le massime probabilità di errore tollerabili dai due sistemi di comunicazione: una probabilità di errore più elevata

$$\frac{4}{3} V_P^2 P_b(E) > \frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}$$

vanificherebbe per entrambi i casi i vantaggi (in termini di errore quadratico medio, $\frac{V_P^2}{3 \times 2^{2N}}$) derivanti dalla quantizzazione.

2 Modulazione di ampiezza analogica (Single Side Band- Suppressed Carrier) e FDM¹

Tre segnali analogici di banda $B=200kHz$ sono trasmessi a radio-frequenza nella banda compresa tra $88MHz$ e $88.6 MHz$ ($B_{RF} = 600kHz$) mediante modulazione di ampiezza analogica. Proporre lo schema a blocchi per la moltiplicazione in frequenza (FDM) dei tre segnali su canale radio.

La banda a radio-frequenza disponibile ($B_{RF} = 3B = 600kHz$) suggerisce di utilizzare per ogni segnale una modulazione di ampiezza analogica a singola sottobanda (SSB-SC) per minimizzare l'occupazione di banda a radio-frequenza. Lo schema a blocchi è riportato nelle figure 1 e 2 nel caso si utilizzino filtri Lower Side Band (LSB) oppure Upper Side Band (USB), rispettivamente. Si noti che il presente schema di modulazione è quello che consente l'occupazione di banda a radio-frequenza minima per i tre segnali.

Quanto varrebbe la banda occupata a radio-frequenza nel caso si utilizzasse modulazione Double-Sideband Suppressed Carrier (DSB-SC)?

Nel caso si utilizzi una modulazione DSB-SC si elimina la complessità aggiunta dai filtri passabanda LSB (o USB) al prezzo di una banda occupata doppia. La banda occupata a radio-frequenza vale ora $B_{RF} = 1.2MHz$, lo schema a blocchi modificato è riportato in figura 3, la banda occupata a radio-frequenza è compresa tra $88MHz$ e $89.2MHz$.

Si disegni lo schema a blocchi del ricevitore per lo schema SSB-SC con filtro LSB

Lo schema a blocchi e' riportato in figura 4

3 Impatto dell'errore di fase per modulazioni di ampiezza in quadratura

Valutare l'impatto di un errore di fase dell'oscillatore locale in ricezione sul segnale ricevuto per una modulazione analogica di ampiezza in quadratura.

Lo schema a blocchi per la modulazione analogica di ampiezza in quadratura e' riportato in figura 5) Il segnale ricevuto prima della conversione in banda base vale (si veda la figura 5)

$$z(t) = x_1(t) \cos(2\pi ft) + x_2(t) \sin(2\pi ft) + n(t)$$

dove $n(t) = n_I(t) \cos(2\pi ft) - n_Q(t) \sin(2\pi ft)$. Per la portante in fase

$$\begin{aligned} y_1(t) &= z(t) \times 2 \cos(2\pi ft + \phi) = \\ &= x_1(t) \cos(\phi) + x_2(t) \sin(\phi) + n_I(t) \cos(\phi) - n_Q(t) \sin(\phi) = \\ &= x_1(t) \cos(\phi) + x_2(t) \sin(\phi) + n_I(t) \end{aligned}$$

¹Si veda anche il tema d'esame del 19 Novembre 2004, D4

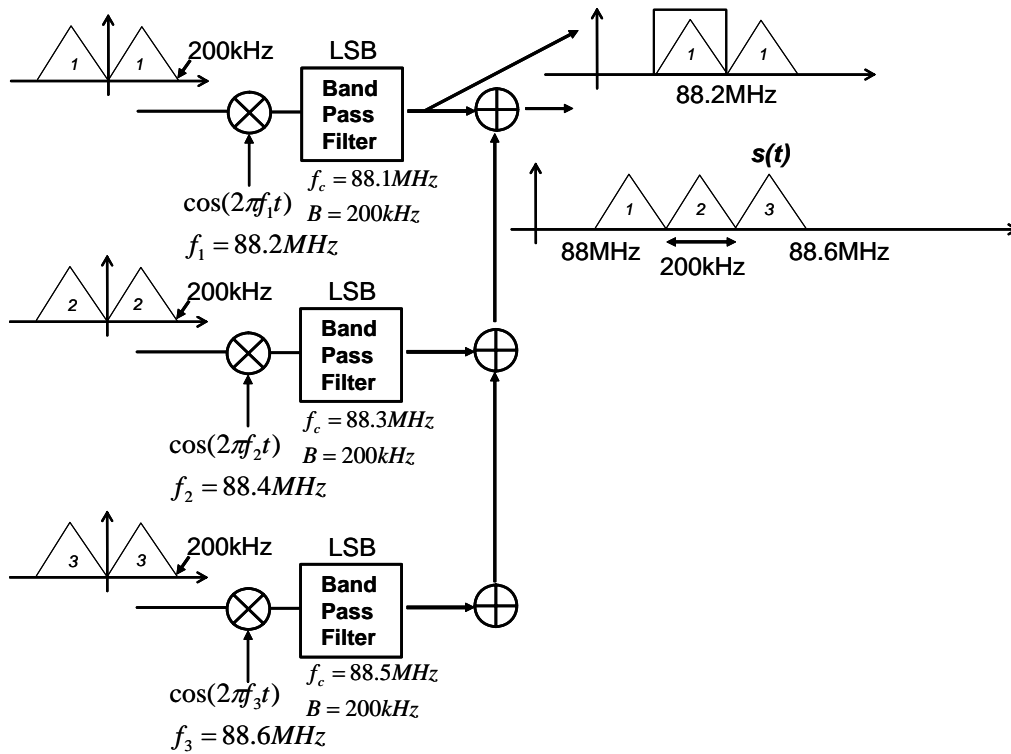


Figura 1: Multiplazione in frequenza di segnali analogici trasmessi tramite modulazione di ampiezza a singola sottobanda (LSB)

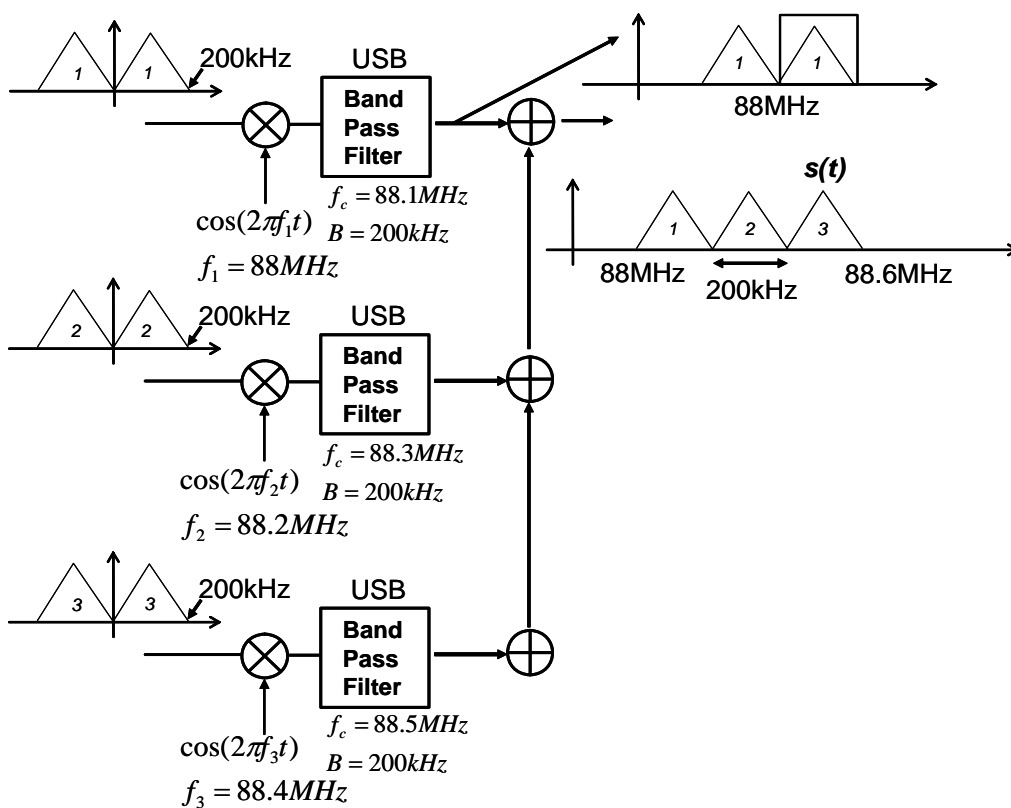


Figura 2: Multiplazione in frequenza di segnali analogici trasmessi tramite modulazione di ampiezza a singola sottobanda (USB)

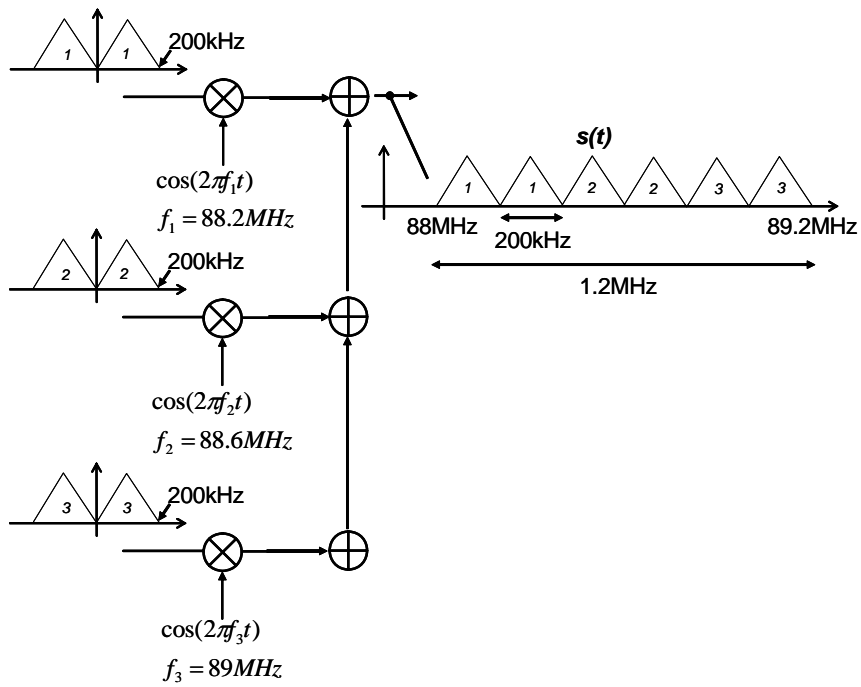


Figura 3: Multiplazione in frequenza di segnali analogici trasmessi tramite modulazione di ampiezza (DSB-SC)

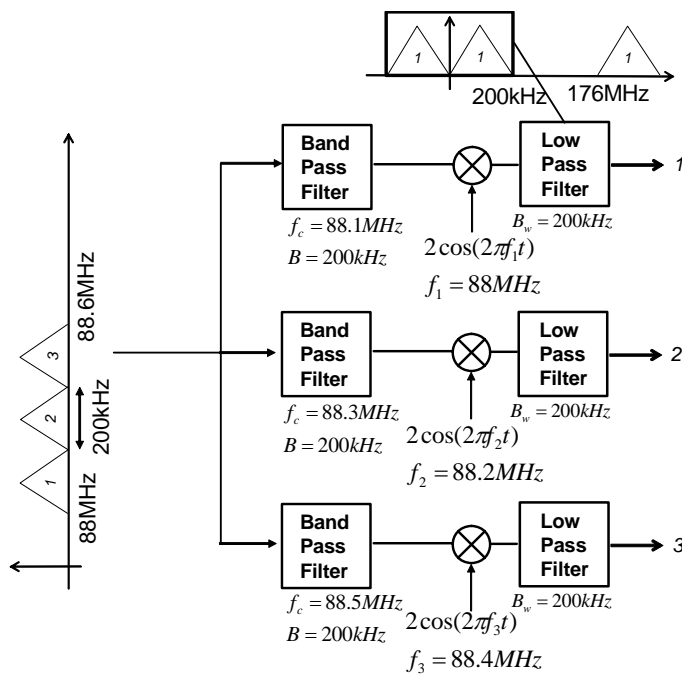
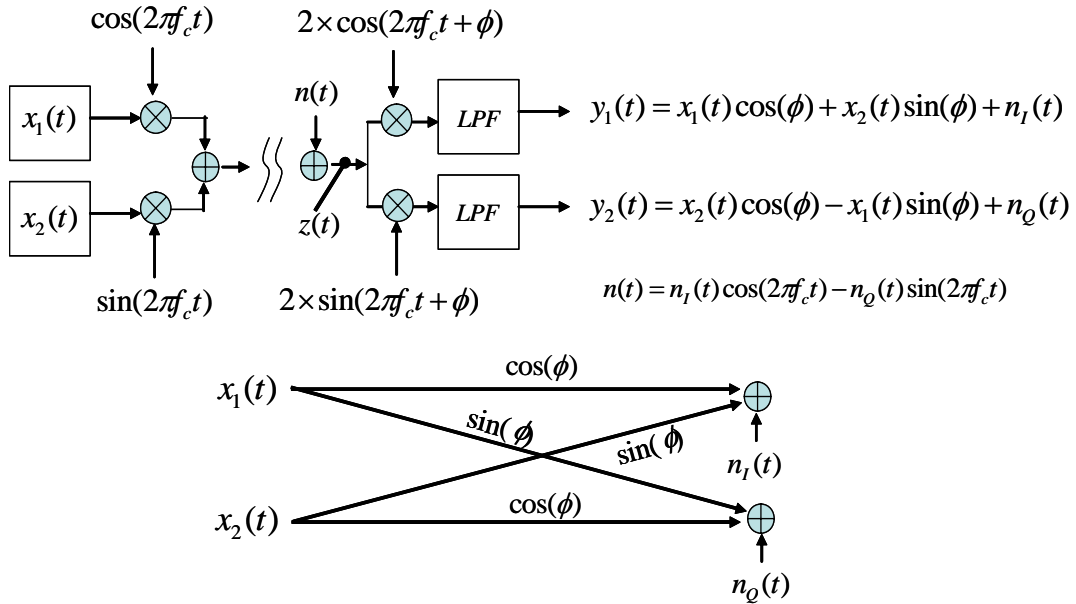


Figura 4: Schema del ricevitore FDM per filtro LSB in trasmissione.



Schema a blocchi modulazione di ampiezza analogica in quadratura con errore di fase

Figura 5:

dove si ricordi che (formule di prostaferesi)

$$\begin{aligned} 2 \cos(2\pi ft + \phi) \cos(2\pi ft) &= \cos(\phi) + \cos(4\pi ft + \phi) \\ 2 \cos(2\pi ft + \phi) \sin(2\pi ft) &= \sin(\phi) - \sin(4\pi ft + \phi) \end{aligned}$$

inoltre i termini alla frequenza $2f$ sono eliminati del filtro passa-basso (LPF). Per l'ultima uguaglianza si tenga conto che il rumore è bianco e vale

$$E[n_I^2(t)] \cos^2(\phi) + E[n_Q^2(t)] \sin^2(\phi) = E[n_I^2(t)] = E[n^2(t)]$$

Allo stesso modo per la portante in quadratura vale

$$\begin{aligned} y_2(t) &= z(t) \times 2 \sin(2\pi ft + \phi) = \\ &= x_2(t) \cos(\phi) - x_1(t) \sin(\phi) + n_Q(t) \end{aligned}$$

dove (formule di prostaferesi)

$$\begin{aligned} 2 \sin(2\pi ft + \phi) \cos(2\pi ft) &= -\sin(\phi) + \sin(4\pi ft + \phi) \\ 2 \sin(2\pi ft + \phi) \sin(2\pi ft) &= \cos(\phi) - \cos(4\pi ft + \phi) \end{aligned}$$

e, come prima, i termini alla frequenza $2f$ sono eliminati tramite il filtro passa-banda (LPF).

Si determini il rapporto segnale rumore in ricezione su entrambe le portanti e si valuti l'effetto dell'errore di fase. Si assuma i due segnali a banda B e il rumore a densità spettrale monolaterale N_0 [dBm/Hz].

Il rapporto segnale rumore è lo stesso per entrambe le portanti

$$\begin{aligned} SNR_I &= \frac{E[x_1^2(t)] \cos^2(\phi)}{E[x_2^2(t)] \sin^2(\phi) + N_0 2B} \\ SNR_Q &= \frac{E[x_2^2(t)] \cos^2(\phi)}{E[x_1^2(t)] \sin^2(\phi) + N_0 2B} = SNR_I. \end{aligned}$$

L'errore di fase compromette l'ortogonalità della portanti in fase e quadratura introducendo cross-termini responsabili di interferenza. Si noti che, nel caso il rumore sia trascurabile² e $E[x_1^2(t)] = E[x_2^2(t)]$

$$SNR_I \approx SIR = \frac{1}{\tan^2(\phi)}$$

4 Multiplazione TDM e FDM³

Si consideri la trasmissione di 2 segnali Gaussiani $x(t)$ e $y(t)$ con occupazione di banda rispettivamente $B_x = 13\text{KHz}$ e $B_y = 25\text{KHz}$. I segnali vengono campionati in modo da garantire un rapporto segnale rumore di quantizzazione pari a $SNR_{q,x} \geq 50\text{dB}$ per il segnale $x(t)$ e $SNR_{q,y} \geq 75\text{dB}$ per il segnale $y(t)$. Si valuti il flusso R_b in bit/s da garantire per i due segnali

Per un segnale $s(t)$ il rapporto segnale-rumore di quantizzazione vale

$$SNR_q = \frac{E[x^2(t)]}{E[q^2]}, \quad (1)$$

se l'errore di quantizzazione q e' approssimabile come una variabile casuale uniforme (si veda lezione)

$$E[q^2] = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V_p^2}{3 \times 2^{2N_b}} \quad (2)$$

dove $\Delta = 2V_p/2^{N_b} \ll V_p$ e' la differenza tra due livelli adiacenti (quantizzazione uniforme), V_p e' il valore massimo del segnale o valore di picco ($2V_p$ la massima dinamica del segnale), N_b e' il numero di bit associati ad ogni campione (livello).

Per un segnale Gaussiano il valore di picco V_p puo' essere convenientemente approssimato dal suo valore efficace $\sqrt{E[x^2(t)]}$, ad esempio e' possibile scegliere $V_p \simeq \sqrt{12} \times \sqrt{E[x^2(t)]}$ ⁴. Sostituendo (2) in (1) si ottiene

$$SNR_q = \frac{2^{2N_b}}{4}, \text{ ovvero } SNR_q = 6(N_b - 1) \text{ [dB]} \quad (3)$$

Vincolando il rapporto segnale-rumore di quantizzazione per ogni flusso, si vincola di fatto il minimo numero di bit da associare a ogni campione N_b , quindi, tenendo conto della banda dei due segnali, il flusso in bit/s per i due casi vale

a) Flusso $R_{b,x}$ bit/s di $x(t)$

$$\begin{aligned} 6(N_b - 1) &= 50 \\ N_b &= 10 \text{ bit/campione} \end{aligned}$$

Dal teorema del campionamento il numero minimo di campioni al secondo necessari vale $R_c = 2B_x = 26000$ campioni/s, da cui il flusso in bit/s vale

$$\begin{aligned} R_{b,x} &= R_c N_b = 26000 \text{ campioni/s} \times 10 \text{ bit/campione} = \\ &= 260 \text{Kbit/s} \end{aligned}$$

b) Flusso $R_{b,y}$ bit/s di $y(t)$

$$\begin{aligned} 6(N_b - 1) &= 75 \\ N_b &= 14 \text{ bit/campione} \end{aligned}$$

²Si veda il tema d'esame del 19 Novembre 2004

³Si veda anche TE 5 luglio 2006

⁴Nota che sarebbe stato comunque possibile scegliere $V_p \simeq 4 \times \sqrt{E[x^2(t)]}$ senza incorrere in errori. Se il segnale fosse stato sinusoidale $V_p = \sqrt{2} \times \sqrt{E[x^2(t)]}$, infine se il segnale fosse stato uniforme $V_p = \sqrt{3} \times \sqrt{E[x^2(t)]}$.

Dal teorema del campionamento il numero minimo di campioni al secondo necessari vale $R_c = 2B_y = 50000$ *campioni/s*, da cui il flusso in bit/s vale

$$R_{b,x} = R_c N_b = 50000 \text{ campioni/s} \times 14 \text{ bit/campione} = 700 \text{ Kbit/s}$$

Per trasmettere i due flussi si realizza ora un flusso numerico unico mediante moltiplicazione a divisione di tempo (TDM). Si disegni la struttura di trama e si valuti il flusso totale da trasmettere

In figura 6 e' riportato lo schema a blocchi della moltiplicazione TDM e la struttura di trama sulla destra. Il flusso totale trasmesso e' $R_b = R_{b,x} + R_{b,y} = 960 \text{ Kbit/s}$. La percentuale α della trama riservata ai bit provenienti dal flusso $x(t)$ vale

$$\alpha = \frac{R_{b,x}}{R_{b,x} + R_{b,y}} = 27\%$$

il resto della trama contiene bit provenienti dal flusso $y(t)$. Si noti che la struttura della trama (qui semplificata) puo' essere anche molto complessa e comunque rispecchia *sempre* il frazionamento 27% al flusso $R_{b,x}$ e 73% al flusso $R_{b,y}$.

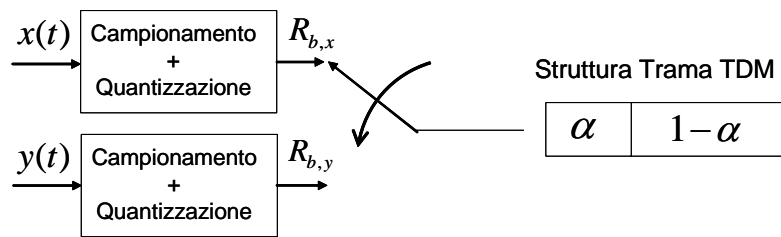


Figura 6: Struttura moltiplicazione TDM e suddivisione trama

Si realizzi lo stesso flusso utilizzando ora una moltiplicazione a divisione di frequenza (FDM) dei segnali analogici $x(t)$ e $y(t)$, si campioni questo nuovo segnale composto e si disegni quindi lo schema a blocchi di trasmettitore e ricevitore (si veda lo schema a di trasmissione e ricezione in figura 7), il flusso totale in bit/s richiesto per garantire i requisiti sull'errore di quantizzazione

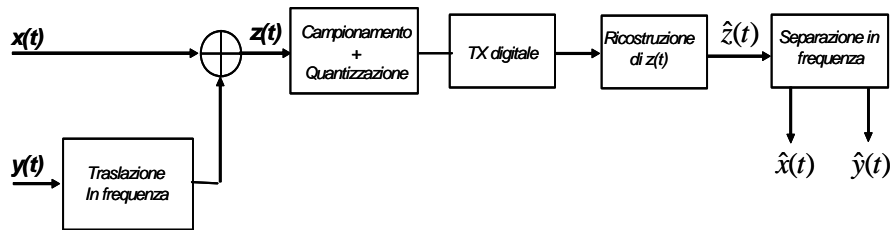


Figura 7: Moltiplicazione del segnale analogico in frequenza e successiva trasmissione digitale. Dal segnale composto $z(t)$ ricostruito si estraggono le due componenti attraverso de-multiplexing

Lo schema a blocchi che permette di generare il segnale $z(t)$ e' riportato in figura 8. Il segnale composto $z(t)$ contiene l'informazione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, il segnale $y(t)$ viene prefiltrato in modo da mantenere solo la banda LSB, riducendo la banda complessiva occupata da $z(t)$ ($B_z = B_x + B_y = 38 \text{ kHz}$)

Il segnale $z(t)$ viene ora campionato, quantizzato e trasmesso (per esempio in banda passante, utilizzando una qualunque modulazione lineare QAM/PSK). Dal teorema del campionamento il numero di campioni al secondo necessari vale $R_c = 2B_z = 2(B_x + B_y) = 76.000$ *campioni/s*. Dato che il segnale $z(t)$ contiene due flussi con diversi requisiti sul rapporto segnale-rumore di quantizzazione, il numero di bit per campione necessario e' il piu' elevato tra i due richiesti, ovvero $N_b = 14 \text{ bit/campione}$. Il flusso in bit/s complessivo per

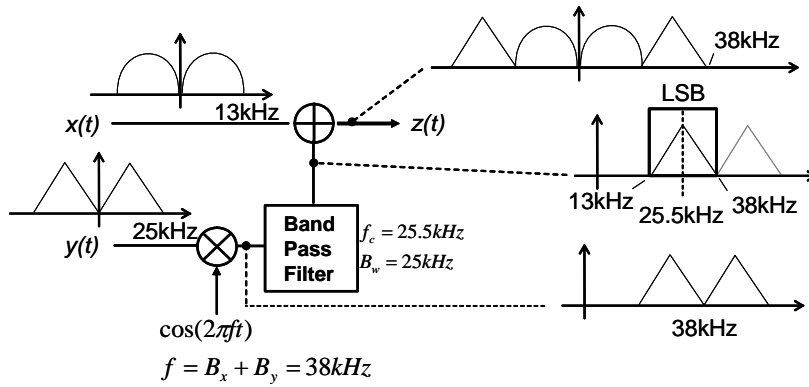


Figura 8: Schema Frequency Division Multiplexing (FDM)

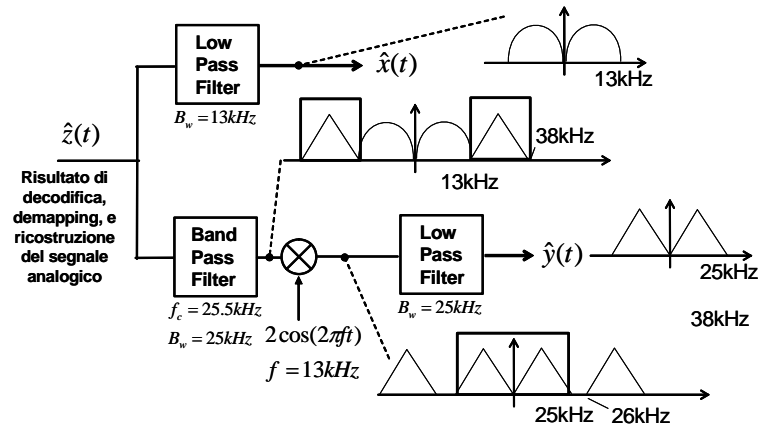


Figura 9: Ricostruzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$ a partire da una stima di $z(t)$ (a valle di decodificatore, demapping e interpolazione - ricostruzione del segnale analogico)

$z(t)$ vale

$$R_{b,z} = R_c N_b = 760000 \text{ campioni/s} \times 14 \text{ bit/campione} = 1.06 \text{ Mbit/s}$$

si noti che $R_{b,z} > R_{b,x} + R_{b,y}$.

N.B. Se non fosse stato aggiunto il filtro passa-banda (si veda la figura 8) con banda passante 25 kHz e frequenza centrale $f_c = 25.5 \text{ kHz}$ per la selezione della banda laterale unica (in questo caso LSB), la banda complessiva del segnale $z(t)$ sarebbe stata maggiore $B_z = (B_x + 2B_y) = 63 \text{ kHz}$, da cui, tramite gli stessi calcoli, $R_{b,z} = 126.000 \text{ campioni/s} \times 14 \text{ bit/campione} = 1.76 \text{ Mbit/s}$.

4) Si disegni lo schema a blocchi del ricevitore (lo stadio che separa i due segnali a partire dal segnale $z(t)$ ricostruito) assumendo modulazione FDM (nel p.to precedente)

Lo schema a blocchi del ricevitore è riportato in figura 9. In figura 10 sono mostrati gli effetti della rimozione del filtro passa-banda. Il ricevitore, privato del filtro passa-banda, non è in grado di distinguere il segnale $y(t)$ a causa della sovrapposizione dello spettro immagine di $x(t)$ ⁵

⁵Per questo esercizio si poteva comunque eliminare il filtro bassabanda (in figura 9) senza subire interferenza scegliendo però come frequenza del coseno $f = 38 \text{ kHz}$ invece di $f = 13 \text{ kHz}$. Si noti che lo schema proposto nelle figure è generale (cioè si può estendere, mantenendo la stessa struttura ma cambiando i parametri dei filtri e le frequenze dei coseni, per un numero di segnali multiplexati maggiore di 2)

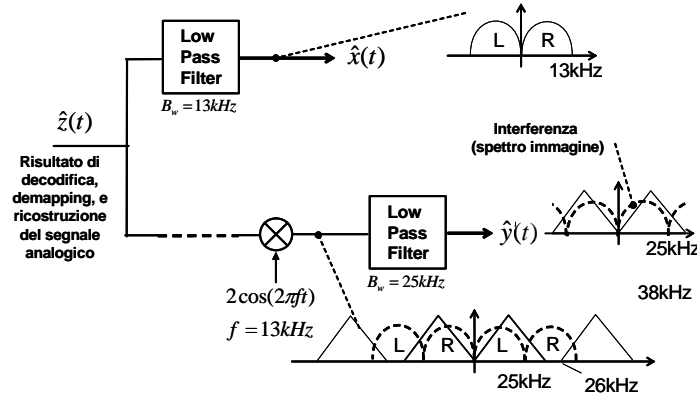


Figura 10: Interferenza generata in assenza del filtro passa-banda

5 Dimensionamento in banda passante

Sia dato un sistema numerico a $R_B = 1\text{Mbit/s}$ con $P_b(E) = 10^{-4}$. Si decide di utilizzare una modulazione M -PSK oppure M -QAM con roll-off pari a $\alpha = 0.25$. Calcolare il rapporto E_s/N_0 minimo richiesto, l'occupazione e l'efficienza spettrale per tutte le possibili scelte dei sistemi di modulazione lineari con efficienza spettrale ≤ 2 bit/s/Hz.

1) BPSK ($M = 2$)

Efficienza spettrale $\log_2(M)/2 = 1/2$ bit/s/Hz

La probabilita' di errore vale

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 9\text{dB}$$

L'occupazione spettrale $B_{RF} = R_s(1 + \alpha)$, dove $R_s = R_b/\log_2(M) = 1\text{Ms/s}$ e' il rate di simbolo, vale

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = 1.25\text{MHz}$$

2) QPSK ($M = 4$)

Efficienza spettrale $\log_2(M)/2 = 1$ bit/s/Hz

Per mapping di Gray, la probabilita' di errore sul bit vale

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 12\text{dB}$$

L'occupazione spettrale $B_{RF} = R_s(1 + \alpha)$, per $R_s = 500\text{Ks/s}$, vale

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = 625\text{KHz}$$

3) 8 PSK ($M = 8$)

Efficienza spettrale $\log_2(M)/2 = 1.5$ bit/s/Hz

Per mapping di Gray, la probabilita' di errore sul bit e' approssimabile attraverso union bound e vale

$$P_b(E) \simeq \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 17\text{dB}$$

L'occupazione spettrale $B_{RF} = R_s(1 + \alpha)$, per $R_s = 333.3\text{Ks/s}$, vale

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = 417\text{KHz}$$

4) 16 QAM ($M = 16$)

Efficienza spettrale $\log_2(M)/2 = 2$ bit/s/Hz

Per mapping di Gray, la probabilita' di errore sul bit e' approssimabile attraverso union bound e vale

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 18dB$$

L'occupazione spettrale $B_{RF} = R_s(1 + \alpha)$, per $R_s = 250Ks/s$, vale

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = 313KHz$$

5) 16 PSK ($M = 16$)

Efficienza spettrale $\log_2(M)/2 = 2$ bit/s/Hz

Per mapping di Gray, la probabilita' di errore sul bit e' approssimabile attraverso union bound e vale

$$P_b(E) \simeq \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)^2}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 22dB$$

L'occupazione spettrale $B_{RF} = R_s(1 + \alpha)$, per $R_s = 250Ks/s$, vale

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = 313KHz$$

Si noti che a pari occupazione di banda ed efficienza spettrale la modulazione 16 QAM e' da preferire a 16 PSK in quanto richiede un rapporto E_s/N_0 inferiore (4dB).

NB si ricordi che per ogni modulazione e' possibile risalire al rapporto E_b/N_0 minimo richiesto sapendo che $E_b = E_s/\log_2(M)$ e quindi utilizzando

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2(M)} \times \frac{E_s}{N_0}$$

Per le modulazioni QAM e PSK lo schema a blocchi del trasmettitore e del ricevitore sono riportati in figura 11. Alcune possibili scelte con le rispettive notazioni per i fattori moltiplicativi dei coseni (α), dei seni (β) in trasmissione e ricezione e del filtro adattato (γ) sono riportate nella figura 12. I vari modelli si differenziano solo per dei fattori di scala che, a seconda delle scelte, riflettono notazioni ampiamente adottate in diversi contesti o da diversi autori. Il parametro di interesse e' il rapporto segnale-rumore alla variabile di decisione e quindi i fattori di scala β e γ che variano simultaneamente segnale e rumore della stessa quantita', non impattano poi le prestazioni finali del sistema.

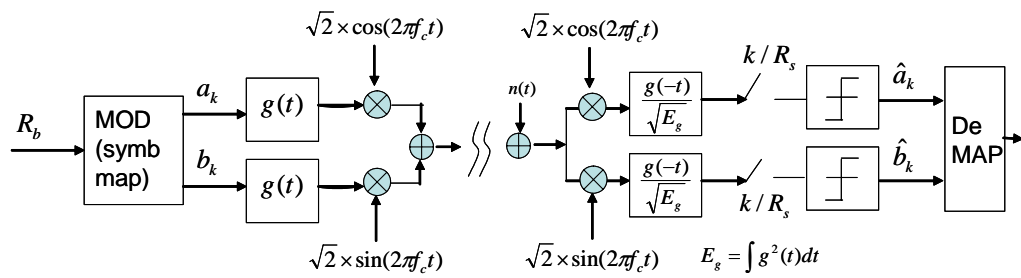


Fig 1: Schema a blocchi modulazioni QAM

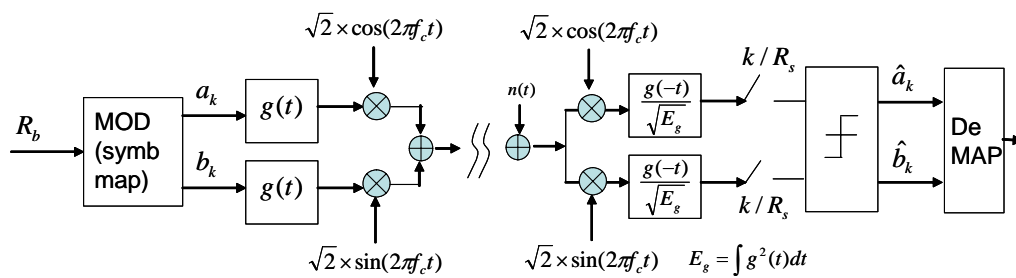
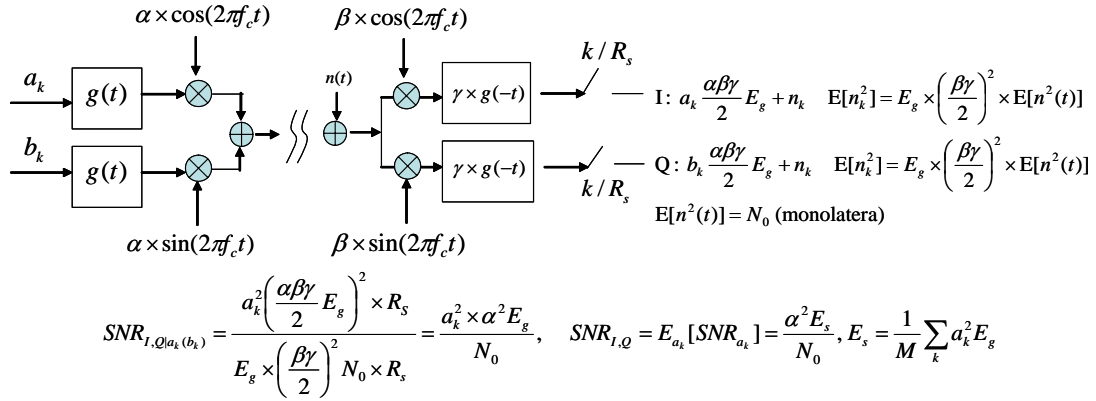


Fig 2: Schema a blocchi modulazioni PSK

Figura 11: Schema a blocchi per modulazioni QAM e PSK su frequenza portante f_c



NOTAZIONI		
<p>1) $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{E_g}}$</p> <p>I: $a_k \sqrt{E_g} + n_k \quad E[n_k^2] = \frac{N_0}{2}$</p> <p>Q: $b_k \sqrt{E_g} + n_k \quad E[n_k^2] = \frac{N_0}{2}$</p> <p>$SNR_{I,Q} = \frac{\text{Pt segnale}}{\text{Pt rumore}} = \frac{E_g R_s}{\frac{N_0}{2} R_s} = \frac{2E_g}{N_0}$</p>	<p>2) $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = 1$</p> <p>I: $a_k E_g + n_k \quad E[n_k^2] = \frac{N_0}{2} E_g$</p> <p>Q: $b_k E_g + n_k \quad E[n_k^2] = \frac{N_0}{2} E_g$</p> <p>$SNR_{I,Q} = \frac{\text{Pt segnale}}{\text{Pt rumore}} = \frac{\frac{1}{M} R_s \sum_k a_k E_g^2}{\frac{N_0}{2} E_g R_s} = \frac{2E_g}{N_0}$</p>	<p>3) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = \frac{1}{\sqrt{E_g}}$</p> <p>I: $a_k \sqrt{E_g} + n_k \quad E[n_k^2] = N_0$</p> <p>Q: $b_k \sqrt{E_g} + n_k \quad E[n_k^2] = N_0$</p> <p>$SNR_{I,Q} = \frac{\text{Pt segnale}}{\text{Pt rumore}} = \frac{E_g R_s}{N_0 R_s} = \frac{E_g}{N_0}$</p>
<p>I: $a_k \sqrt{E_g} \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = \frac{N_0}{2}$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p> <p>Q: $b_k \sqrt{E_g} \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = \frac{N_0}{2}$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p>	<p>I: $a_k E_g \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = \frac{N_0}{2} E_g$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p> <p>Q: $b_k E_g \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = \frac{N_0}{2} E_g$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p>	<p>I: $a_k \sqrt{E_g} \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = N_0$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p> <p>Q: $b_k \sqrt{E_g} \longrightarrow \oplus$</p> <p style="margin-left: 40px;">$E[n_k^2] = N_0$</p> <p style="margin-left: 40px;">\uparrow</p> <p style="margin-left: 40px;">n_k</p>

Figura 12: Notazioni utili. I vari modelli si differenziano solo per dei fattori di scala che, a seconda delle scelte, riflettono notazioni ampiamente adottate in diversi contesti o da diversi autori. Il parametro di interesse e' il rapporto segnale-rumore alla variabile di decisione. I fattori di scala β e γ non hanno impatto sulle prestazioni finali del sistema.