Appunti Esercitazioni per il corso di Sistemi di Comunicazione
Stefano Savazzi
Parte 3

1 Probabilità di errore sul simbolo e sul bit per costellazioni arbitrarie[1]

Si consideri la trasmissione di simboli e di bit equiprobabili mediante il mapping con le costellazioni in figura 1 (2 casi). Calcolare (per ogni caso, separatamente) il limite superiore della probabilità di errore sul simbolo e sul bit (mediante union bound) in funzione di E/N_0. Si assuma quindi $E_s/N_0 = 10dB$, dove E_s è l'energia media per ogni simbolo, il valore numerico dell'union bound sulla probabilità di errore sul bit (per il mapping indicato).

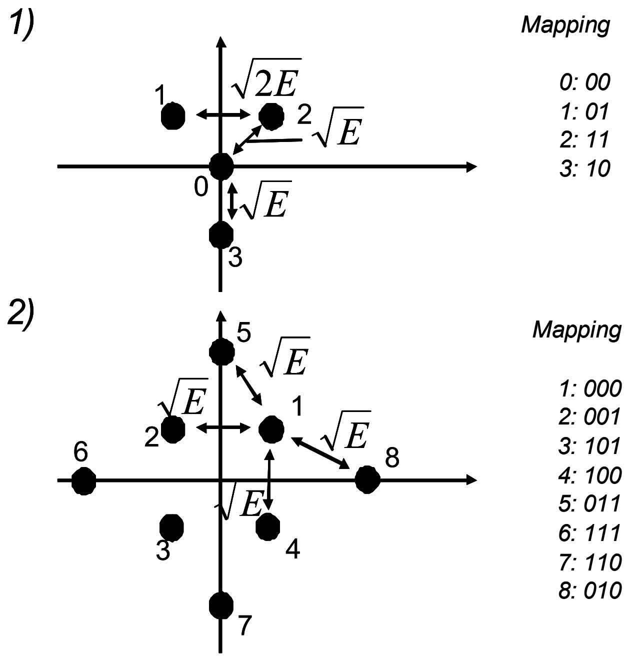

Figura 1:

a) Probabilità di errore sul simbolo

La probabilità di errore sul simbolo si calcola (assumendo una generica costellazione di M simboli) tramite union bound come segue

$$P_S(E) \leq \sum_{i=1}^{M} \Pr(i) \sum_{j \in N_i} P_S(E|i \to j)$$

dove $\Pr(i)$ è la probabilità di trasmettere il simbolo i, con $i = 1, ..., M$, N_i è l'insieme dei simboli concorrenti (o confinanti) per il simbolo i,

$$P_S(E|i \to j) = Q\left(\frac{d_{i,j}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

la probabilità di sbagliare il simbolo i con il simbolo j, dove $d_{i,j}$ è la distanza nello spazio dei segnali tra il simbolo i e il simbolo j.

b) Probabilità di errore sul bit

La probabilità di errore sul bit si calcola come segue

$$P_b(E) \leq \sum_{i=1}^{M} \Pr(i) \sum_{j \in N_i} P_S(E|i \to j) \times b_{i,j}$$

[1] Si vedano ad esempio i temi d'esame 7 Settembre 2006, 8 Settembre 2004, 30 Gennaio 2004

dove $b_{i,j}$ è la probabilità di avere un bit errato dato che, per effetto del rumore, ho ricevuto il simbolo j invece del simbolo i. In generale

$$b_{i,j} = \frac{\text{Numero di } bit \text{ diversi tra simbolo } i \text{ e simbolo } j \text{ (in base al mapping selezionato)}}{\log_2(M)}$$

si noti che per mapping di Gray $b_{i,j} = 1/\log_2(M)\ \forall i, j$.

Caso 1. $M = 4$ simboli $i = 0, 1, 2, 3$ equiprobabili. Si noti che il simbolo 0 ha energia nulla

$$P_S(E) \leq \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j \in N_i} P_S(E|i \to j)$$

evidentemente i concorrenti per il simbolo 0 sono $N_0 = [1, 2, 3]$ alla stessa distanza $d_{0,j} = \sqrt{E}$, $j = 1, 2, 3$ mentre possiamo in prima approssimazione assumere che tutti gli altri simboli abbiano il simbolo 0 come unico concorrente $N_1 = N_2 = N_3 = [0]$ alla distanza $d_{i,0} = \sqrt{E}$, $i = 1, 2, 3$ (uguale per tutti). La probabilità di errore sul simbolo vale

$$P_S(E) \leq \underbrace{\frac{1}{4} \times 3Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simbolo 0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simboli 1,2,3}} = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

Si noti che per il calcolo della probabilità di errore il mapping non è di Gray, infatti $b_{2,0} = b_{0,2} = 1$, per gli altri casi $b = 1/2$

$$\begin{aligned} P_b(E) &\leq \underbrace{\frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) \sum_{j \in N_0} b_{0,j}}_{\text{Simbolo 0}} + \underbrace{\frac{1}{4} b_{2,0} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simbolo 2}} + \underbrace{\frac{1}{4} b_{1,0} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{1}{4} b_{3,0} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simbolo 1,3}} = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) \end{aligned}$$

L'energia media per simbolo

$$E_S = \sum_{i=1}^{M} \Pr(i) E_i = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times E = \frac{3}{4} E$$

Da cui

$$P_b(E) \leq Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{3N_0}}\right) \sim 3 \times 10^{-3}$$

Caso 2. $M = 8$ simboli $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ equiprobabili,

$$P_S(E) \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j \in N_i} P_S(E|i \to j)$$

i concorrenti per i simboli interni (1,2,3,4) sono 4 tutti alla stessa distanza $\sqrt{E}$ (si veda la geometria della costellazione), invece i concorrenti per i simboli esterni (5,6,7,8) sono soltanto 2 (ancora alla stessa distanza) Per esempio per il simbolo 1 $N_1 = [2, 4, 5, 8]$ mentre per il simbolo esterno 5 $N_5 = [1, 2]$. La probabilità di errore sul simbolo vale

$$P_S(E) \leq \underbrace{4 \times \frac{1}{8} \times 4Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simboli interni: 1,2,3,4}} + \underbrace{4 \times \frac{1}{8} \times 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)}_{\text{Simboli esterni: 5,6,7,8}} = 3Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

Dobbiamo in questo caso scegliere il mapping in modo da minimizzare $b_{i,j}$. Non è possibile per questa costellazione effettuare un mapping di Gray.

$$
\begin{aligned}
P_b(E) &\leq \underbrace{\frac{1}{2}\left[3 \times \frac{1}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)\right]}_{\text{Simboli interni}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)\right]}_{\text{Simboli esterni}} = \\
&= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] \times Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right] \times Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = \frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)
\end{aligned}
$$

L'energia media per simbolo (si ricorda che il triangolo 1-2-5 e' equilatero, l'angolo 2-1-5 e' a 60 gradi)

$$
\begin{aligned}
E_S &= \sum_{i=1}^{M} \Pr(i)E_i = \frac{1}{8} \times 4 \times \frac{E}{2} + \frac{1}{8} \times 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{E} + \frac{\sqrt{E}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{E}{4} + 0.93E = 1.183 \times E
\end{aligned}
$$

Da cui

$$
P_b(E) \leq \frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = \frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{2.37N_0}}\right) \sim 10^{-2}
$$

2 Energia per bit in sistemi singola tratta e rigenerativi[2]

Un sistema di comunicazione per la trasmissione a divisione di frequenza di 300 segnal telefonici (di banda 4kHz) alla frequenza portante di 5GHz su una tratta da 40km è sostituito da un sistema numerico con uguale occupazione spettrale. Ogni segnale telefonico è codificato in modo efficiente a 13kbps pur mantenendo una degradazione (un livello di rumore di quantizzazione) paragonabile a una codifica a 64kbps. I 300 segnali sono multiplati in divisione di tempo (TDM) e trasmessi occupando la stessa banda che era occupata dal segnale analogico B_{RF} (si assuma che il sistema analogico occupi la minima banda possibile).

Calcolare la minima costellazione M-QAM e il roll-off necessari per trasmettere il flusso di dati occupando la banda B_{RF}

La banda occupata dal sistema analogico (si assuma modulazione analogica di ampiezza SSB-SC, in modo da occupare la minima banda possibile) vale $B_{RF} = 300 \times 4kHz = 1.2MHz$. Utilizzando questa banda a radio-frequenza il sistema numerico deve trasmettere 300 flussi da 13kbps ciascuno per un flusso totale pari a $R_b = 300 \times 13kbps = 3.9Mbps$. Modulazione (dimensione della costellazione M) e roll-off necessari si calcolano imponendo il vincolo sulla banda occupata ($R_s = R_b/log2(M)$)

$$
B_{RF} = R_s(1+\alpha) = \frac{R_b(1+\alpha)}{\log_2(M)} = \frac{3.9Mbps(1+\alpha)}{\log_2(M)} \leq 1.2MHz
$$

$$
M > 2^{3.25(1+\alpha)}
$$

da cui si ricavano le possibili soluzioni (per $M = 2, 4, 16, 64$)

$$
\begin{aligned}
M &= 16,\ \alpha = 0.23 \\
M &= 64,\ \alpha = 0.84
\end{aligned}
$$

La costellazione a dimensione inferiore è $M = 16$ (16 QAM), $\alpha = 0.23$. Il numero di simboli al secondo trasmessi vale $R_s = 0.97Msimboli/s$.

Si valuti il requisito massimo di probabilità d'errore sul bit che è tollerabile dal sistema in modo da garantire che a valle del collegamento la degradazione introdotta dalla trasmissione sia comparabile alla degradazione dalla quantizzazione.

[2] La prima parte dell'esercizio è analoga al tema d'esame del 6 luglio 2004.

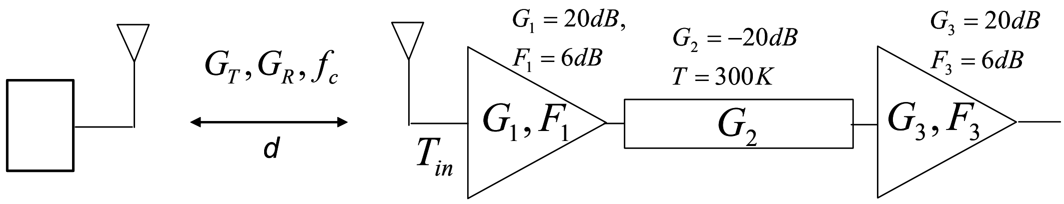

Figura 2:

Per ogni segnale è generato un flusso di 13kbps, tuttavia la degradazione introdotta dalla quantizzazione è comparabile a quella di un flusso PCM a 64kbps (si pensi al flusso a 13kbps come generato attraverso una compressione senza perdita di informazioni del flusso originario a 64kbps). La potenza del rumore di quantizzazione generata dal flusso PCM è pari a $V_P^2/(3 \times 2^{2N})$ dove il numero di bit per campione è $N = 8$. La massima probabilità di errore si ottiene imponendo

$$\frac{4}{3} V_P^2 P_b(E) \approx \frac{V_P^2}{3 \times 2^{2\times 8}}$$

da cui

$$P_b(E) \approx \frac{1}{4 \times 2^{2\times 8}} = 4 \times 10^{-6}$$

Si calcoli il rapporto segnale disturbo al ricevitore per garantire il valore della probabilità di errore al punto precedente.

La probabilità di errore sul bit per 16QAM (assumendo mapping di Gray) vale

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right)$$

dal vincolo sulla probabilità di errore si ricava il vincolo sul rapporto segnale rumore

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \leq 4 \times 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 21dB$$

oppure, esprimendo il rapporto in E_b/N_0

$$\frac{E_s}{N_0} = 4\frac{E_b}{N_0} \geq \gamma = 21dB \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 15dB$$

Si assuma che le caratteristiche del collegamento radio in spazio libero sono tali da avere le medesime antenne in trasmissione e ricezione con guadagno $G_R = G_T = 15dB$, temperatura equivalente di rumore in ingresso all'antenna $T_{in} = 400K$, lo stadio in ricezione è visualizzato in figura 2. Si calcoli la potenza minima in trasmissione necessaria in base alle specifiche e l'energia spesa per ogni bit trasmesso.

L'attenuazione del canale (in spazio libero) si calcola a partire dalla relazione

$$\frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} = 30dB - 21dB - 20\log_{10}(d/\lambda) = -125.5dB$$

dove $d = 40km$ (lunghezza della tratta) e $\lambda = c/f = 3 \times 10^8$ ($f = 5GHz$). L'attenuazione del canale vale quindi $A = 125.5dB$.

Serve ora calcolare la densità spettrale (monolatera) del rumore $N_0 = kT_{eq}$. La temperatura di rumore dello stadio in ricezione (si vedano esercizi precedenti) vale

$$T_{eq} = T_{in} + 290(F_1 - 1) + \frac{300(A_2^{-1} - 1)}{A_1} + \frac{290(F_3 - 1)}{A_1 A_2} = 2440K$$

dove $A_1 = 10^{G_1/10}$, $A_2 = 10^{G_2/10}$, F_1 ed F_3 sono espressi in scala lineare, $F_1 = F_3 = 10^{0.6} = 4$. La densitaà spettrale monolatera vale

$$N_0 = kT_{eq} = -174dBm/Hz + 10\log_{10}(\frac{T_{eq}}{290}) = -164.7dBm/Hz$$

La potenza necessaria in ricezione $P_R = E_s R_s$ si ricava a partire dal vincolo sul rapporto segnale rumore

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_R}{N_0 R_s} \geq \gamma = 21dB \Rightarrow P_R \geq \frac{\gamma N_0 R_b}{\log_2(M)} = 21dB - 164.7 + 10\log_{10}\left(\frac{R_b}{\log_2(M)}\right)$$

da cui

$$P_R \geq -83.5dBm.$$

Tenendo conto dell'attenuazione del canale, la potenza in trasmissione $P_T/A = P_R$ deve soddisfare

$$P_T \geq \frac{\gamma N_0 R_b A}{\log_2(M)} = 125.5dB - 83.5dBm = 42dBm\ (15.8W).$$

L'energia minima necessaria per trasmettere un bit $E_{tx,1}$ vale

$$E_{tx,1} = \frac{P_T}{R_b} = 42dBm - 10\log_{10}(R_b) = 4mJ/bit$$

Si assuma ora che il sistema di comuncazione debba essere temporaneamente alimentato da una batteria di capacità $2850mAh$ per una tensione operativa di $3.6V$. Si valuti quanti bit di informazione è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria.

La capacità della batteria vale

$$E_{Tot} = 3.6V \times 2850mAh = 10.26Wh$$

espressa in Joule

$$E_{Tot} = 10.26Wh \times 3600s = 36.9KJoule$$

Il numero di bit che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria vale

$$\frac{E_{Tot}}{E_{tx,1}} = 9.2MBits$$

Al fine di preservare il consumo della batteria il sistema viene modificato nelle due modalità proposte

1) Il sistema è dimensionato per trasmettere un flusso ora di 100 segnali telefonici (invece di 300). Calcolare la nuova minima costellazione M-QAM e il roll-off necessari per trasmettere il nuovo flusso di 100 segnali occupando la banda B_{RF}. A partire dal vincolo sulla probabilità di errore si calcoli quindi l'energia per bit richiesta $E_{tx,2} < E_{tx,1}$ e il numero di bit che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria, si confronti questa soluzione con la precedente.

I 100 flussi da 13kbps ciascuno formano un flusso totale pari a $R_b = 100 \times 13kbps = 1.3Mbps$. Modulazione (dimensione della costellazione M) e roll-off necessari si calcolano imponendo il vincolo sulla banda occupata ($R_s = R_b/log2(M)$)

$$B_{RF} = R_s(1+\alpha) = \frac{R_b(1+\alpha)}{\log_2(M)} = \frac{1.3Mbps(1+\alpha)}{\log_2(M)} \leq 1.2MHz$$

$$M > 2^{1.08(1+\alpha)}$$

da cui si ricavano le possibili soluzioni (per $M = 2, 4, 16, 64$)

$$\begin{aligned} M &= 4,\ \alpha = 0.85 \\ M &= 16,\ \alpha = 1 \end{aligned}$$

La costellazione a dimensione inferiore è ora $M = 4$ (QPSK), $\alpha = 0.85$. Il numero di simboli vale $R_s = R_b/log2(M) = 650Ksimboli/s$. La probabilità di errore sul bit (assumendo mapping di Gray) vale

$$P_b(E) \simeq Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

dal vincolo sulla probabilità di errore si ricava il vincolo sul rapporto segnale rumore

$$P_b(E) \simeq Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \leq 4 \times 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq \gamma = 13.1dB$$

Come visto in precedenza, tenendo conto dell'attenuazione del canale,

$$P_R \geq \frac{\gamma N_0 R_b}{\log_2(M)} = 13.1dB - 164.7 + 10\log_{10}\left(\frac{R_b}{\log_2(M)}\right) = -93.5dBm$$

la potenza in trasmissione $P_T/A = P_R$ deve soddisfare

$$P_T \geq \frac{\gamma N_0 R_b A}{\log_2(M)} = 125.5dB - 93.5dBm = 32dBm\ (1.26W).$$

L'energia minima necessaria per trasmettere un bit $E_{tx,2}$ vale

$$E_{tx,2} = \frac{P_T}{R_b} = 32dBm - 10\log_{10}(R_b) = 1.3mJ/bit$$

Il numero di bit che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria vale

$$\frac{E_{Tot}}{E_{tx,2}} = 28.4MBits$$

Confrontiamo le due soluzioni in termini di tempo di vita del collegamento.

a) 300 segnali 16QAM: Tempo di bit $T_b = 1/R_b = 1/3.9Mbps = 256ns$.Tempo di vita della rete $T_{life} = \frac{E_{Tot}}{E_{tx,1}}T_b = 9.2Mbits \times T_b = 2.3\sec$ (trasmetto 300 flussi per 2.3 secondi).

b) 100 segnali QPSK: Tempo di bit $T_b = 1/R_b = 1/1.3Mbps = 769ns$.Tempo di vita della rete $T_{life} = \frac{E_{Tot}}{E_{tx,1}}T_b = 28.4Mbits \times T_b = 21.8\sec$ (trasmetto 100 flussi per 21.8 secondi).

Si noti che disponendo di un buffer di memoria in trasmissione sarebbe comunque possibile trasmettere i 300 segnali telefonici, memorizzando nel buffer i bit che non possono essere trasmessi a causa dell'eccessivo flusso in ingresso. In questo caso si potrebbe pensare di trasmettere i dati dei primi 100 flussi durante i primi 21.8/3=7.3 secondi, i dati dei secondi 100 flussi nei successivi 7.3 secondi e cosi via fino all'esaurimento della batteria.

2) Codice a ripetizione. Si supponga di non poter modificare la modulazione (HW non modificabile) calcolata per i 300 segnali. Si vuole ad ogni modo trasmettere 100 segnali telefonici (come prima) cercando di preservare la batteria e riducendo l'energia per bit a un valore inferiore a quello calcolato precedentemente $E_{tx,2} < E_{tx,1}$. *Per sopperire all' incremento della probabilità di errore in ricezione (dato che la modulazione non è cambiata) il sistema di comunicazione applica un semplice codice a ripetizione con rate complessivo* 1/3 *(il sistema cioè ritrasmette lo stesso bit 3 volte). Si calcoli l'energia spesa per bit* ($E_{tx,2} < E_{tx,1}$) *affinchè la probabilità di errore sia la stessa ricavata in precedenza, si ricavi quindi il numero di bit di informazione trasmessi prima di esaurire la batteria*

Si noti che 100 segnali telefonici generano un flusso in ingresso al trasmettitore di $1.3Mbps$, il flusso di bit totale in uscita al codificatore a ripetizione (compresi i bit ripetuti) è pari a $R_b = 1.3Mbps \times 3$.Date $K = 3$ ritrasmissioni dello stesso simbolo (e quindi degli stessi bits), si ha errore in ricezione quando 2 (o più) bit ricevuti sono errati[3], la probabilità di errore per bit di *informazione* vale quindi

$$\sum_{i=2}^{3}\binom{K}{i}P_b(E)^i(1-P_b(E))^{K-i} = 3P_b(E)^2(1-P_b(E)) + P_b(E)^3 \approx 3P_b(E)^2$$

[3]Il codice a ripetizione in esame può infatti decodificare correttamente anche se 1 bit su 3 è errato, baserà infatti le proprie decisioni sui restanti due bit corretti.

dove $P_b(E)$ è la probabilità di errore per ogni bit trasmesso (assumendo ancora 16QAM)

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}).$$

Si può espreimere la dipendenza del rapporto segnale rumore E_s/N_0 alla variabile di decisione dall'energia spesa per ogni bit trasmesso $E_{tx,2}$ come segue

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}\log_2(M) = \frac{E_{tx,2}}{AN_0}\log_2(M)$$

si ricordi che $E_b \times \log_2(M) = E_s$, inoltre l'energia per bit ricevuta E_b è pari all'energia per bit trasmessa $E_{tx,2}$ divisa per l'attenuazione di tratta, $E_b = E_{tx,2}/A$. Si noti che si poteva risalire allo stesso risultato a partire dalle potenze

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_R}{N_0R_s} = \frac{P_T}{AN_0R_s} = \frac{E_{tx,2}R_b}{AN_0R_s} = \frac{E_{tx,2}}{AN_0}\log_2(M)$$

La probabilità di errore per ogni bit di *informazione* deve soddisfare

$$\sum_{i=2}^{3}\binom{K}{i}P_b(E)^i(1-P_b(E))^{K-i} \approx 3P_b(E)^2 \leq 4\times 10^{-6}$$

quindi la probabilità di errore *per ogni bit trasmesso* (compresi i bit ripetuti) deve valere

$$P_b(E) = \frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}) = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_{tx,2}}{AN_0}\frac{\log_2(M)}{5}}\right) \leq \sqrt{\frac{4}{3}\times 10^{-6}} \sim 10^{-3},$$

l'energia spesa in trasmissione (per ogni bit trasmesso) vale

$$\sqrt{\frac{E_{tx,2}}{AN_0}\frac{\log_2(M)}{5}} \geq 3 \Rightarrow E_{tx,2} = 10\log_{10'}(11) + 125.5dB - 164.7dBm/Hz = 1.3mJ/bit$$

l'energia spesa per bit richiesta è inferiore alla precedente $4mJ/bit$ a partià di probabilità di errore, tuttavia

si noti che per ogni bit di informazione occorre ora spedire 3 bits (ripetuti)

Il numero di bit di *informazione* che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria (di capacità $E_{Tot} = 36.9KJoule$) vale

$$\frac{E_{Tot}}{3E_{tx,2}} \simeq 9.46MBits$$

dove $3E_{tx,2}$ è l'energia spesa per bit di informazione.

La soluzione c) è ampiamente inefficiente se confrontata con la b), inoltre non da vantaggi significativi se confrontata con la soluzione a) Si noti che questo è dovuto alla scelta (sub-ottima) del codice che non è in grado di fornire alcun guadagno di codifica (si veda la teoria).

3) Installazione di 3 ripetitori. Si calcoli ora l'energia spesa per ogni bit trasmesso assumendo suddividere il collegamento in 4 tratte attraverso l'installazione di tre ripetitore a 10km di distanza tra loro. Si trasmettono i 100 segnali telefonici utilizzando la modulazione calcolata al punto 1). Gli apparati di ricezione, i guadagni delle antenne in trasmissione e ricezione sono gli stessi per ogni terminale.

La modulazione calcolata al punto 1) era QPSK, $R_b = 1.3Mbps$, $R_s = 650ksimboli/s$, la probabilita' di errore da garantire al ricevitore (finale) vale 4×10^{-6} (si veda l'analogo esercizio nella parte 1).

Caso 1: ripetitori rigenerativi.

La probabilita' di errore (end-to-end) tra trasmettitore e ricevitore vale (per 4 tratte)

$$P_{end} = 1 - [1 - P_b(E)]^4 \approx 4P_b(E) \leq 4\times 10^{-6}$$

dove $P_b(E)$ e' la probabilita' di errore sul bit per la singola tratta QPSK. Possiamo riscrivere il vincolo sulla probabilita' di errore

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq \gamma = 13.2dB \tag{1}$$

dove il rapporto E_s/N_0 richiesto per ogni tratta resta (in pratica) immutato. Si ricordi che dobbiamo risalire all'energia spesa per bit $E_{tx,3}$: queta si ottiene ancora a partire dal rapporto segnale rumore

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}\log_2(M) = \frac{E_{tx,3}}{AN_0}\log_2(M) = 13.2dB.$$

L'attenuazione del canale (in spazio libero) per ogni tratta (di $10km$) si calcola a partire dalla relazione

$$\frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} = 30dB - 21dB - 20\log_{10}(d/\lambda) = -113.5dB$$

dove questa volta $d = 10km$ (lunghezza della tratta) e $\lambda = c/f = 3 \times 10^8/50 \times 10^8 = 6cm$ ($f = 5GHz$). L'attenuazione del canale vale quindi $A = 113.5dB$.

Per $N_0 = -164.7dBm/Hz$, con $M = 4$

$$E_{tx.3} = \frac{AN_0}{\log_2(M)}10^{1.32} = 79\mu J/bit$$

Il numero di bit di *informazione* che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria del primo trasmettitore (di capacità $E_{Tot} = 36.9KJoule$) vale

$$\frac{E_{Tot}}{E_{tx,3}} \simeq 467MBits$$

Caso 2: ripetitori non rigenerativi.

Il rumore si somma su ogni tratta, al ricevitore finale la probabilita' di errore (per 4 tratte) vale

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{4N_0}}\right) \leq 4 \times 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq \gamma = 19.1dB \tag{2}$$

si noti che e' aumentato rispetto al caso precedente (di $10\log_{10}(4) = 6dB$) a causa della presenza dei ripetitori non-rigenerativi.

$$E_{tx.3} = \frac{AN_0}{\log_2(M)}10^{1.92} = 0.3mJ/bit$$

Il numero di bit di *informazione* che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria del primo trasmettitore (di capacità $E_{Tot} = 36.9KJoule$) vale

$$\frac{E_{Tot}}{E_{tx,3}} \simeq 123MBits$$

Caso 3 (secondo ripetitore rigenerativo, primo e terzo non rigenerativi, si veda esercizio analogo per M-PAM nella prima parte delle dispense):

Ai fini del solo calcolo della probabilita' di errore il sistema si comporta come se fosse costituito da 2 tratte rigenerative (di lunghezza $10km$) affette da rumore a potenza doppia (che tiene conto della presenza dei due ripetitori non rigenerativi). La probabilita' di errore end-to-end P_{end} deve soddisfare

$$\begin{aligned} P_{end} &= 1 - [1 - P_{b,eq}(E)]^2 \approx \\ &\approx 2P_{b,eq}(E) \leq 4 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

la probabilita' di errore per le 2 tratte equivalenti vale (sempre per QPSK)

$$P_{b,,eq}(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

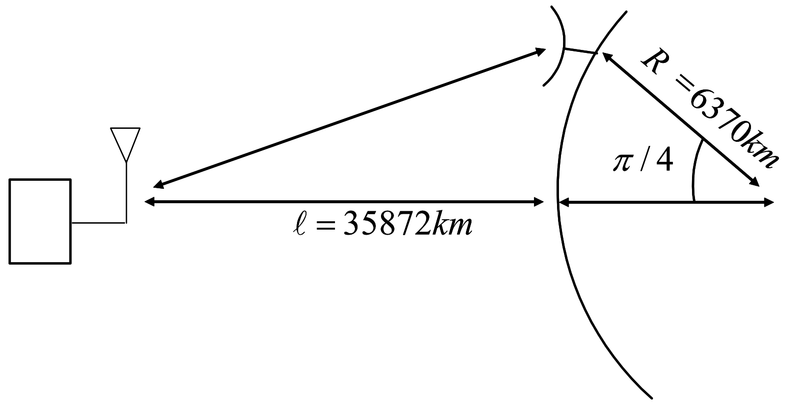

Figura 3:

da cui

$$2P_{b,eq}(E) \leq 4 \times 10^{-6} \Rightarrow 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \leq 4 \times 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq \gamma = 16.2dB$$

l'energia spesa per bit vale (l'attenuazione è la stessa, $A = 113.5dB$)

$$E_{tx.3} = \frac{AN_0}{\log_2(M)} 10^{1.62} = 158\mu J/bit$$

Il numero di bit di *informazione* che è possibile trasmettere prima di esaurire la batteria del primo trasmettitore (di capacità $E_{Tot} = 36.9KJoule$) vale

$$\frac{E_{Tot}}{E_{tx,3}} \simeq 233MBits$$

3 Sistemi satellitari[4]

Si vuole dimensionare un sistema di comunicazione in figura che diffonde verso terra da un satellite geostazionario posto a 35872km dall'equatore ad una stazione a terra a 45 gradi di latitudine, quindi a distanza d dal satellite (vedi figura 3). Il flusso trasmesso è pari a $R_b = 100Mbps$. Si assuma che il sistema abbia i seguenti parametri $f_c = 10GHz$, diametro dell'antenna sul satellite $D_T = 10m$ e diametro dell'antenna a terra D_R incognito, entrambi con efficienza $\eta = 0.6$. La potenza in trasmissione dal satellite vale $P_T = 40dBm$, fattore di rumore apparecchiatura ricevente a terra $F = 8dB$, temperatura equivalente captata dall'antenna ricevente pari a $150K$. Banda RF $B = 19MHz$.

Si valuti la modulazione (e roll-off) più adeguata per la trasmissione entro la banda B.

$$B = R_s(1 + \alpha) = \frac{R_b(1 + \alpha)}{\log_2(M)} = \frac{100Mbps(1 + \alpha)}{\log_2(M)} \leq 19MHz$$

$$M > 2^{5.2(1+\alpha)}$$

Modulazione più adeguata significa cercare la modulazione che, a parità di rapporto segnale rumore in ricezione, offra le migliori prestazioni in termini di probabilità di errore. La modulazione più adeguata è quindi quella con costellazione minima: 64QAM ($M = 2^6$) con roll-off pari a $\alpha = 0.14$, il baud-rate $R_s = 100Mbps/6 = 16.66Msimboli/s$

Si valuti il massimo valore della probabilità di errore sul bit tollerabile in modo che la degradazione dovuta alla quantizzazione sia comparabile alla degradazione dovuta alla trasmissione. Si assuma che il sistema abbia una qualità equivalente a segnali quantizzati a 10 bit per campione.

[4] Si veda anche il tema d'esame 22 Febbraio 2006

$$P_b(E) = \frac{1}{2 \times 2^{2\times 10}} \sim 10^{-7}$$

Si calcoli il diametro dell'antenna in ricezione per garantire che la stazione di terra riceva con una probabilità adeguata.

Per un sistema 64QAM il rapporto segnale rumore richiesto in ricezione per avere $P_b(E) = 10^{-7}$ vale

$$P_b(E) \simeq \frac{1}{2} Q(\sqrt{\frac{E_s}{21 N_0}}) = 10^{-7} \rightarrow \frac{E_s}{N_0} = 27.5dB$$

si ricordi che $P_b(E) \simeq \frac{1}{2} Q(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}})$ e $E_g = \frac{3}{2(M-1)} E_s$. Il rumore al ricevitore a terra si calcola a partire dalle caratteristiche dell'apparato ricevente (le temperatura equivalente di rumore)

$$T_{eq} = 150K + 290(F-1) = 1690K$$

dove $F = 6.31 = 10^{8/10}$, mentre $N_0 = -174\ [dBm/Hz] + 10\log_{10}(\frac{T_{eq}}{290}) = -166\ [dBm/Hz]$.

L'attenuazione del segnale ricevuto dipende dal canale (si assume propagazione in spazio libero) e dalle caratteristiche delle antenne in trasmissione e ricezione. Dobbiamo imporre che il guadagno di antenna in ricezione sia tale per cui il segnale trasmesso dal satellite a potenza $P_T = 40dBm$ abbia a valle del filtro adattato un rapporto segnale rumore di almeno $27.5dB$ (questo per soddisfare il requisito della probabilità di errore). Il guadagno di antenna in ricezione dipende dall'area efficace $\eta \times Area\ Antenna$ (e quindi dal diametro) dell'antenna

$$G_R = \frac{4\pi}{\lambda^2} \eta \times Area = \frac{4\pi}{\lambda^2} \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2$$

riscriviamo il rapporto segnale rumore in ricezione in funzione della potenza in trasmissione, dei guadagni delle antenne in TX e RX e dell'attenuazione del canale

$$\begin{aligned}
\frac{E_s}{N_0} &= \frac{P_R}{N_0 R_s} = \frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} \times G_R = \\
&= \frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} \times \frac{4\pi}{\lambda^2} \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{4\pi d^2} \times \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = 27.5dB
\end{aligned}$$

si ricordi che l'attenuazione complessiva vale $A = \left(\frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2}\right)^{-1}$, $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{10\times 10^9} = 3cm$

$$G_T = \frac{4\pi}{\lambda^2} \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = 58.2dB$$

La distanza trasmettitore-ricevitore si calcola dalla geometria del problema (si veda figura 3) dove $R = 6370km$ (raggio della Terra), $\ell = 35872km$ (distanza equatore-satellite per satellite geostazionario). Per 45 deg di latitudine e':

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{[\ell + R - R\cos(\pi/4)]^2 + [R\sin(\pi/4)]^2} = \\
&= \sqrt{\ell^2 + R^2 - 2R\cos(\pi/4)} = 38.000km
\end{aligned}$$

Possiamo ora dimensionare il diametro dell'antenna in ricezione imponendo il vincolo sul rapporto segnale rumore in ricezione

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{4\pi d^2} \times \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = 27.5dB$$

da cui

$$\frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{4\pi d^2} \times \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = 27.5dB$$

$$D_R = \sqrt{\frac{4R_s N_0 4\pi d^2 \times 10^{2.75}}{P_T G_T \times \eta \times \pi}} \simeq 1.1m \tag{3}$$

Il satellite in orbita subisce un malfunzionamento che causa una riduzione di 3dB della potenza in trasmissione, valutare quale può essere la soluzione più pratica per mantenere il sistema ancora attivo, mantenendo le stesse caratteristiche del flusso dati (stesso ritmo di trasmissione e stessa probabilità di errore) assumendo di non poter modificare la trasmissione lato satellite.

Esistono due sole soluzioni praticabili:

1) dimimuire il rumore captato dall'antenna ricevente o il fattore di rumore dello stadio di ingresso (e.g., usando a questo scopo amplificatori e apparecchiature a bassissimo rumore)

Per far fronte a una diminuzione della potenza in trasmissione di 3dB, senza modificare l'antenna in ricezione, devo diminuire la densita' spetterale monolatera del rumore della stessa quantita' (3dB), $N_0 = -169$ $[dBm/Hz]$ ovvero $10\log_{10}(\frac{T_{eq}}{290}) \simeq 5$, quindi $T_{eq} \simeq 917K$ (invece di $T_{eq} = 1690K$). Dobbiamo diminuire il fattore di rumore dell'apparato ricevente (non è infatti sufficiente diminuire la temperatura di rumore captata dall'antenna)

$$290(F-1) = 917K - 150K = 767K$$

scegliendo quindi $F = 5.6dB$ (o inferiore).

2) aumentare il diametro dell'antenna ricevente D_R (qualora possibile)

Dalla (3), una diminuzione di 3dB della potenza in trasmissione comporta un incremento corrispettivo del diametro dell'antenna $\tilde{D}_R$ pari a $\tilde{D}_R = \sqrt{2} \times D_R = 1.55m$

Dimensionamento della tratta in salita. Si verifichi se il sistema dimensionato può essere utilizzato senza modifiche per la tratta in salita (da terra a satellite) mantenendo le stesse caratteristiche del flusso dati (stesso vincolo sulla probabilità di errore e flusso in bit/s). Assumendo le stesse antenne del punto precedente si valuti la banda occupata a RF per la tratta in salita, il roll-off e la modulazione da adottare sapendo che la massima potenza in trasmssione erogabile da terra vale $P_T = 43dBm$, il fattore di rumore dell'apparecchiatura ricevente su satellite è $F = 15dB$, temperatura equivalente captata dall'antenna ricevente pari a $800K$.

Il sistema non è adatto per la tratta in salita, in quanto la temperatura di rumore al ricevitore (sul satellite) è sicuramente maggiore rispetto al ricevitore a terra.

Verifichiamo ora (per le specifiche di potenza in trasmissione da terra $P_T = 43dBm$ e temperatura equivalente di rumore al satellite fornite) se la tratta in salita soddisfa le specifiche di probabilità di errore per 64QAM, banda $B = 19MHz$ e roll-off $\alpha = 0.14$. Calcoliamo la densità spettrale monolatera del rumore al ricevitore sul satellite ($F = 10^{1.5} = 31$)

$$T_{eq} = 800K + 290(F-1) = 9500K$$

$$N_0 = kT_{eq} = -174 + 10\log_{10}(T_{eq}/290) = -159\ dBm/Hz$$

Calcoliamo ora il rapporto segnale rumore al satellite (ora con $P_T = 43dBm$ e $N_0 = -159dBm/Hz$, si ricorda che per 64QAM $R_s = 16.66Msimboli/s$, dall'esercizio precedente $D_R = 1.1m$)

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{P_T}{R_s N_0} \times \frac{G_T}{4\pi d^2} \times \eta \times \pi \left(\frac{D_R}{2}\right)^2 = 23.5dB$$

4dB inferiore rispetto al rapporto segnale rumore al ricevitore su terra (supponendo il satellite in grado di trasmettere a $P_T = 40dBm$), se infatti la potenza in trasmissione a terra è aumentata di 3db rispetto alla potenza sul satellite, il rumore è 7dB più elevato al satellite rispetto al ricevitore a terra.

$$P_b(E) \simeq \frac{1}{2}Q(\sqrt{\frac{E_s}{21N_0}})|_{E_s/N_0=23.5dB} = 10^{-3}.$$

Affinchè il sistema sia correttamente dimensionato dobbiamo garantire $P_b(E) \simeq 10^{-7}$ richiesta. In questo caso, in base ai vincoli del problema, non possiamo aumentare il rapporto segnale rumore ma possiamo operare su banda occupata, modulazione e quindi roll-off.

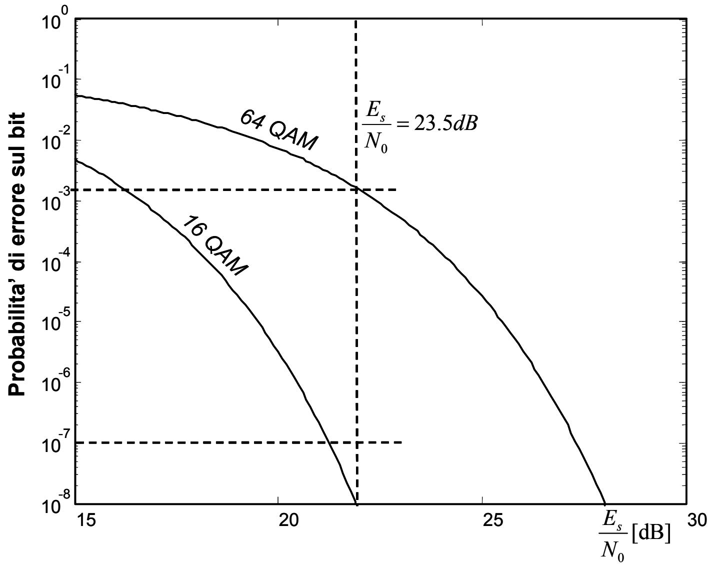

Figura 4:

Dobbiamo infatti dimensionare la tratta in salita in modo che utilizzi una modulazione che consenta $P_b(E) \simeq 10^{-7}$ per un rapporto segnale rumore $\frac{E_s}{N_0} = 23.5dB$[5], dato che il flusso in bit non è cambiato $R_b = 100Mbps$, la banda occupata sarà maggiore rispetto alla tratta in discesa $B = 19MHz$ (satellite verso terra) in quanto aumenta il baud-rate.

Proviamo a scegliere per la tratta in salita 16QAM, in questo caso per $\frac{E_s}{N_0} = 23.5dB$, la probabilità di errore vale (si veda anche il grafico in figura 4)

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}})|_{\frac{E_s}{N_0}=23.5dB} = 10^{-8}$$

Il rapporto segnale rumore richiesto per avere 10^{-7} con 16QAM è ora $10\log_{10}(\frac{16.6Msimb/s}{25Msimb/s}) = 10\log_{10}(1.5) = 1.8dB$ più basso rispetto ai $23.5dB$ richiesti dalla modulazione 64QAM (quindi in realtà $21.7dB$). Questo è dovuto al fatto che il baud-rate per 16QAM aumenta di 3/2 in modo da soddisfare la velocità di trasmissione richiesta (per garantire $R_b = 100Mbps$ il numero di simboli al secondo (baud-rate) da trasmettere diventa $R_s = 100Mbps/4 = 25Msimboli/s$ per 16QAM, era $R_s = 100Mbps/6 = 16.6Msimboli/s$ per 64QAM). Questo fattore di correzione non altera significativamente i risultati in quanto vale ancora

$$P_b(E) \simeq \frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}})|_{\frac{E_s}{N_0}=21.7dB} = 6 \times 10^{-8}$$

e ancora soddisfa il requisito della probabilità di errore richiesto.16QAM e' quindi una modulazione adatta per la tratta in salita (se non lo fosse stata si sarebbe dovuto valutare 8PSK). Dato che il numero di simboli al secondo (baud-rate) da trasmettere diventa $R_s = 100Mbps/4 = 25Msimboli/s$, la banda occupata a radio-frequenza per la tratta in salita diventa

$$B = R_s(1+\alpha) \geq 25MHz$$

dove $B = 25MHz$ si ha per roll-off $\alpha = 0$. Supponendo di mantenere invariato il roll-off ($\alpha = 0.14$) rispetto al caso precedente (il roll-off ha impatto soltanto sulla banda occupata, mentre influisce sulle prestazioni solo nel caso in cui si verifichi un errore di temporizzazione) la banda occupata vale

$$B = R_s(1+\alpha) = 28.5MHz$$

[5] In realtà il rapporto segnale rumore richiesto dipende anche dal baud-rate e quindi dalla stessa modulazione. Possiamo trascurare questa dipendenza in prima approssimazione, tuttavia, una volta selezionata la modulazione, si deve verificare che soddisfi il requisito sulla probabilitaà di errore.

Nota bene: se avessi vincolato la banda a $\bar{B} = 19MHz$ per avere la qualita' in ricezione richiesta avrei dovuto sacrificare il flusso in bit/s trasmesso. Infatti per $\alpha = 0.14$, $M = 16$

$$R_b = \frac{\bar{B}}{1+\alpha} \log_2(M) = 66.7Mbps < 100Mbps$$

4 Sistemi cellulari e interferenza co-canale

Sia dato il sistema cellulare in figura 5. Durante la tratta uplink, le stazioni mobili trasmettono verso le rispettive stazioni fisse (Base Station - BS) utilizzando le stesse frequenze. La stazione fissa numero 0 in figura riceve quindi il segnale proveniente dalla stazione mobile piu' vicina (T_0 a distanza d) e l'interferenza generata dalle tre stazioni mobili (T_1, T_2, T_3 a distanza d_1, d_2, d_3) associate alle stazioni fisse numero $1, 2, 3$, rispettivamente. Le quattro stazioni mobili possono trovarsi in qualunque posizione all'interno della rispettiva cella quadrata di lato $L = 1km$. Si assuma che ogni stazione trasmetta a pari potenza P_T e frequenza centrale f_c le antenne in trasmissione e in ricezione hanno tutte le stesse caratteritiche G_T, G_R, la propagazione e' assunta per semplicita' in spazio libero trascurando il contributo dovuto al fading.

1) Determinare la configurazione di interferenza peggiore per la stazione T_0, assumendo di trascurare l'effetto del rumore di fondo (si assume per esempio $P_T \to \infty$ e l'interferenza come assimilabile a un rumore bianco) determinare il rapporto segnale + interferenza SIR al variare di d.

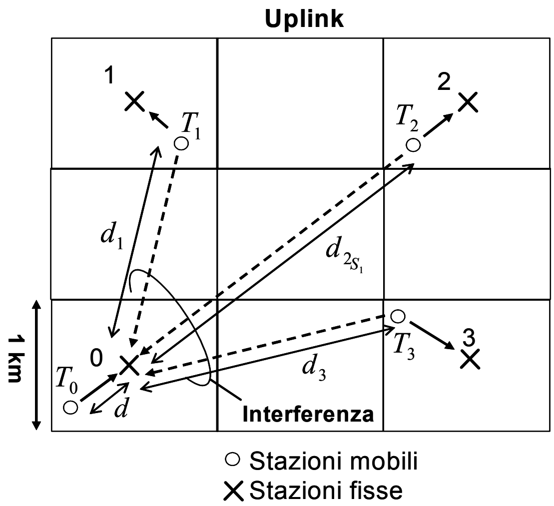

Figura 5: Sistema cellulare e scenario interferenziale (tratta uplink - ovvero le stazioni mobili trasmettono verso la stazione base).

La configurazione interferenziale peggiore e' quella indicata in figura 5, i tre interferenti sono al distanza minima dalla stazione fissa numero 0. In particolare $d_1 = d_3 = 1.5km$, $d_2 = 2.1km$.

In generale, fissata la potenza total di rumore entro la banda R_s, $P_N = \frac{N_0}{2} R_s$, il rapporto segnale rumore + interferenza (per propagazione in spazio libero) vale

$$\begin{aligned} SINR &= \frac{\text{Potenza di segnale ricevuto}}{\text{Potenza dell'inrferenza + rumore bianco}} = \frac{P_R}{P_N + P_{\text{Interferenza}}} = \\ &= \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} \times \left(P_N + \sum_{k=1}^{3} \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d_k/\lambda)^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

dove la somma potenza dell'interferenza + rumore bianco è interpretata come rumore equivalente gaussiano (dovuto a interferenza + rumore bianco) la cui totale potenza $P_{\tilde{N}}$, misurata nella stessa banda R_s, vale

$$P_{\tilde{N}} = \frac{\tilde{N}_0}{2} R_s = P_N + P_{\text{Interferenza}} = \frac{N_0}{2} R_s + \sum_{k=1}^{3} \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d_k/\lambda)^2}$$

o, se si preferisce, la densita' spettrale monolatera equivalente

$$\tilde{N}_0 = N_0 + \frac{2}{R_s} \sum_{k=1}^{3} \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d_k/\lambda)^2} \tag{4}$$

Nei sistemi cellulari il contributo dovuto all'interferenza e' solitamente dominante e quindi e' possibile trascurare il rumore termico $N_0 \simeq 0$ (oppure $P_T \to \infty$). Utilizzando la (4), il rapporto $E_s/\tilde{N}_0$ vale (si ricordi che le potenze in trasmissione sono le stesse per ogni terminale cosi come G_T e G_R)

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{\tilde{N}_0} &= \frac{P_R/R_s}{\tilde{N}_0} = \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d/\lambda)^2} \left(2 \sum_{k=1}^{3} \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi)^2 (d_k/\lambda)^2} \right)^{-1} = \\ &= \frac{P_R}{2P_{\text{Interferenza}}} = \frac{1}{d^2} \times \left(2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{d_k^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, il rapporto di potenze (per $N_0 \sim 0$)

$$SINR = \frac{P_R}{P_N + P_{\text{Interferenza}}} \sim SIR = \frac{P_R}{P_{\text{Interferenza}}} = \frac{1}{d^2} \times \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{d_k^2} \right)^{-1} = \frac{2E_s}{\tilde{N}_0}.$$

Assumendo $d_1 = d_3 = 1.5km$, $d_2 = 2.1km$ il rapporto segnale-interferenza minimo (per la peggior configurazione interferenziale) vale

$$SIR = 63 - 20 \log_{10}(d) \ [dB]$$

2) Assumendo lo stesso scenario interferenziale del punto precedente, si supponga che la banda di trasmissione a radio-frequenza sia $\bar{B}_{RF} = 130kHz$, che gli impulsi a radice di Nyquist in trasmissione abbiano roll-off del $\alpha = 25\%$ e che sia possibile scegliere tra 4 modulazioni (la trasmissione non e' codificata): BPSK, QPSK, 16-QAM, 8-PSK. Si determini il massimo flusso in R_b bit/s supportabile al variare della distanza d della stazione mobile T_0 per avere probabilita' di errore $P_b(E) < 10^{-4}$.

Banda $\bar{B}_{RF}$ e roll-off α vincolano il baud-rate R_s (il numero di simboli al secondo trasmessi), questo deve soddisfare l'equazione

$$B_{RF} = R_s(1 + \alpha) = \bar{B}_{RF}$$

quindi $R_s = \bar{B}_{RF}/(1 + \alpha) = 104Ksimboli/s$. Il flusso in bit/s R_b dipende dalla particolare modulazione utilizzata $R_b = R_s \times \log_2(M)$ ($M = 2$ BPSK, $M = 4$ QPSK, $M = 8$ 8-PSK, $M = 16$ 16-QAM.). Infine la scelta della modulazione deve essere fatta imponendo il vincolo sulla probabilita' di errore, si ricordi che

$$SIR = \frac{P_R}{P_{\text{Int erf erenza}}} = \frac{1}{d^2} \times \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{d_k^2} \right)^{-1} = \frac{2E_s}{\tilde{N}_0}$$

1) BPSK.

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\tilde{N}_0}} \right) = Q\left(\sqrt{SIR} \right) =\leq 10^{-4} \Rightarrow SIR \geq SIR_t = 12dB$$

Imponendo il vincolo sul SIR: $SIR = 63 - 20 \log_{10}(d) \geq SIR_t$, la stazione mobile T_0 puo' supportare la modulazione BPSK con un flusso in bit/s pari a $104kbit/s$ finche' la distanza d dalla stazione fissa

$$d \leq d_{BPSK} = \sqrt{10^{5.1}} = 354m$$

2) QPSK.

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\tilde{N}_0}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{SIR}{2}} \right) \leq 10^{-4} \Rightarrow SIR \geq SIR_t = 15dB$$

Imponendo il vincolo sul SIR: $SIR = 63 - 20 \log_{10}(d) \geq SIR_t$, la stazione mobile T_0 puo' supportare la modulazione BPSK con un flusso in bit/s pari a $208kbit/s$ finche' la distanza d dalla stazione fissa

$$d \leq d_{QPSK} = \sqrt{10^{4.8}} = 251m$$

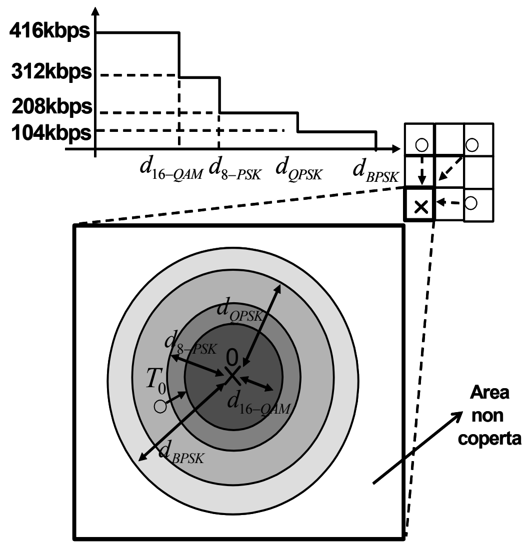

Figura 6: Coperatura della cella al variare della distanza stazione mobile - stazione fissa

3) 8-PSK.

$$P_b(E) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\tilde{N}_0}\sin^2(\pi/8)}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{SIR\sin^2(\pi/8)}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow SIR \geq SIR_t = 20dB$$

Imponendo il vincolo sul SIR: $SIR = 63 - 20\log_{10}(d) \geq SIR_t$, la stazione mobile T_0 puo' supportare la modulazione BPSK con un flusso in bit/s pari a $312kbit/s$ finche' la distanza d dalla stazione fissa

$$d \leq d_{8-PSK} = \sqrt{10^{4.3}} = 141m$$

4) 16-QAM.

$$P_b(E) = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5\tilde{N}_0}}\right) = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{SIR}{10}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow SIR \geq SIR_t = 21dB$$

Imponendo il vincolo sul SIR: $SIR = 63 - 20\log_{10}(d) \geq SIR_t$, la stazione mobile T_0 puo' supportare la modulazione BPSK con un flusso in bit/s pari a $416kbit/s$ finche' la distanza d dalla stazione fissa

$$d \leq d_{16-QAM} = \sqrt{10^{4.2}} = 125m$$

In figura 6 e' riportato un diagramma sintetico dei risultati.

La percentuale di area della cella non coperta (perche' l'interferenza risulta troppo elevata per garantire un collegamento sostenibile) e':

$$\eta = 1 - \frac{\pi d_{BPSK}^2}{L^2} = 54\%$$

Le possibili soluzioni per aumentare l'area di copertura (insufficiente) possono includere transmissioni codificate (che possono soddisfare il vincolo sulla probabilita' di errore a piu' basso rapporto segnale rumore), ridimensionamento della struttura cellulare (aumento del fattore di riuso[6] per ridurre l'interferenza).

Determinare una possibile configurazione dell'interferenza in modo che la percentuale di area coperata (dalla modulazione BPSK) superi il 90% (per semplicità si assuma che i tre interferenti si trovino alla stessa distanza $d_{int} = d_1 = d_2 = d_3$ (da dimensionare) dalla stazione base.

[6] Il fattore di riuso per sistemi cellulari e' definito come il rapporto tra la distanza tra 2 celle a cui sono associate le stesse frequenze (celle interferenti) e la dimensione della cella. Per il sistema cellulare in esame, si parla comunemente di fattore di riuso 3. Un fattore di riuso elevato indica la presenza di segnali interferenti generati a grande distanza dal segnale utile.

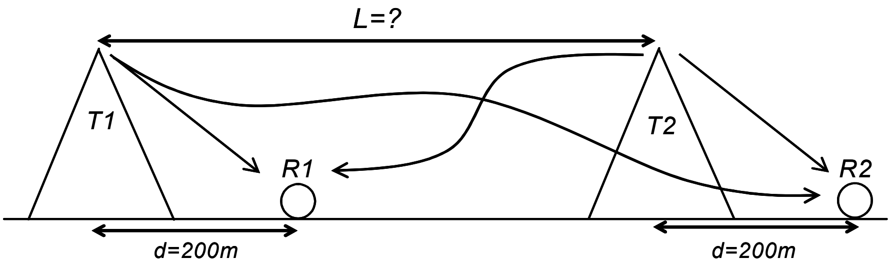

Figura 7:

Deve essere

$$\eta = 1 - \frac{\pi d_{BPSK}^2}{L^2} = 10\%$$

quindi deve essere $d_{BPSK} = 1km \times \sqrt{\frac{0.9}{\pi}} = 535m$ (invece di $d_{BPSK} = 354m$). Imponiamo che le distanza dei 3 interferenti dalla stazione base sia uguale $d_{int} = d_1 = d_2 = d_3$, calcoliamo d_{int} in modo che la stazione base possa ricevere i bit del terminale T_0 posizionato a una distanza $d_{BPSK} = 535m$ rispettando il vincolo sulla con probabilita' di errore

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\tilde{N}_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SIR}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{int}^2}{3d_{BPSK}^2}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{d_{int}^2}{3d_{BPSK}^2} \geq 10^{1.2}$$

quindi

$$d_{int} \geq \sqrt{3} \times 10^{0.6} \times d_{BPSK} \simeq 3.69km$$

5 Interferenza e posizionamento BS ottimale (caso lineare)[7]

In un collegamento radio coesistono sulla stessa banda due stazioni base (Base Station) che trasmettono a due diversi utenti posti a una distanza massima di $d = 200m$ dalla rispettiva stazione. Il collegamento T1-R1 e' interferito dal collegamento T2-R2, il livello di interferenza percepita da R1 dipende dalla distaza (L) tra le due stazioni (si veda la figura 7). Si vuole ora dimensionare il sistema e la posizione delle stazioni assumendo che i) l'interferenza co-canale sia il fattore limitante nel collegamento (il rumore termico e' quindi trascurabile), ii) l'interferenza e' assimilabile a un rumore Gaussiano. La propagazione avviene in spazio libero (senza fading e/o riflessioni multiple).

I due sistemi trasmettono (a potenza $P_T = 10dBm$) ciascuno due segnali campionati a 44kHz e quantizzati a $N = 16bit/campione$ entro una banda a radio-frequenza di $B_{RF} = 280kHz$.Le due antenne in trasmissione hanno lo stesso guadagno $G_R = G_T = 2dB$ (sono antenne omnidirezionali). Si decide di utilizzare una modulazione (opportuna) M-PSK a inviluppo costante.

Valutare il minimo numero di fasi e il massimo roll-off accettabile. Valutare la massima probabilit' di errore tollerabile sul bit in modo che la qualita' del dato campionato e quantizzato non risulti degradata dalla comunicazione.

Il flusso in bit trasmesso da ogni stazione e' $R_b = 44kHz \times 16bit/campione = 704kbps$, il minimo numero di fasi M si trova imponendo

$$\begin{aligned} \frac{R_b}{\log_2(M)}(1+\alpha) &\leq B_{RF} = 280kHz \\ M &\geq 2^{\frac{R_b}{B_{RF}}(1+\alpha)} = 2^{2.5(1+\alpha)} \end{aligned}$$

Il numero minimo di fasi $M = 8$ (8-PSK) per $\alpha = 20\%$ ($\alpha = 0.2$). La massima probabilita' di errore sul bit vale (si vedano esercizi precedenti)

$$P_b(E) \simeq \frac{1}{2 \times 2^{2\times N}} = \frac{1}{2 \times 2^{2\times 16}} = 6 \times 10^{-11}$$

[7] Si veda anche il tema d'esame 04 Febbraio 2005

Determinare la minima distanza L tra le due stazioni base trasmittenti in modo che i due terminali possano ricevere il segnale con la necessaria qualita' (identica per entrambi).

Notiamo che essendo la potenza in trasmissione e i guadagni d'antenna uguali per i due trasmettitori, questi non influenzeranno il dimensionamento (che dipende solo dalle distanze d, L). Il terminale maggiormente interessato all'interferenza (e che quindi vincola il dimensionamento) e' R1 che riceve l'interferenza da T2 a una distanza di $L - d$ metri (il terminale R2 invece riceve l'interferenza da T1 a una distanza $L + d$). Il rapporto potenza ricevuta/potenza dell'interferenza al terminale R1 si scrive

$$SIR = \frac{P_R}{P_{\text{Interferenza}}} = \frac{(L-d)^2}{d^2} = \frac{2E_s}{\tilde{N}_0}.$$

Imponiamo il vincolo sulla probabilita' di errore per 8-PSK

$$P_b(E) \leq \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\tilde{N}_0} \sin(\frac{\pi}{8})^2}\right) \leq 6 \times 10^{-11}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_b(E) &\leq \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{(L-d)^2}{d^2} \sin(\frac{\pi}{8})^2}\right) = \\ &= \frac{2}{3} Q\left(\frac{(L-d)}{d} \sin(\frac{\pi}{8})\right) \leq 6 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

dobbiamo quindi risolvere $Q(x) = 9 \times 10^{-11}$. Si noti che il valore 9×10^{-11} e' fuori-scala rispetto al grafico fornito nei temi d'esame. In questo caso possiamo utilizzare l'approssimazione

$$\log_{10}[Q(x)] = -1.04 - 022x^2$$

valida solo per $Q(x) << 1$, quindi

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9 \times 10^{-11} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1.04 - 022x^2 = \log_{10}(9 \times 10^{-11}) \end{aligned}$$

da cui $x^2 \simeq 41$. La minima distanza tra le due stazioni base L si calcola quindi imponendo

$$\frac{(L-d)}{d} \sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{41}$$

quindi $L/d = 17.7$

$$L = 17.7 \times 200m = 3.54km$$