Appunti Esercitazioni per il corso di Sistemi di Comunicazione
Stefano Savazzi
Parte 4

1 Sistemi CDMA

In un sistema a spettro espanso con accesso a divisione di codice (CDMA) un numero N di utenti possono occupare fino ad una banda di $B_{RF} = 5MHz$ ciascuno modulando in BPSK un flusso $R_b = 25kbps$.

Si tracci lo schema a blocchi del modulatore e demodulatore

Lo schema a blocchi e' riportato in figura 1

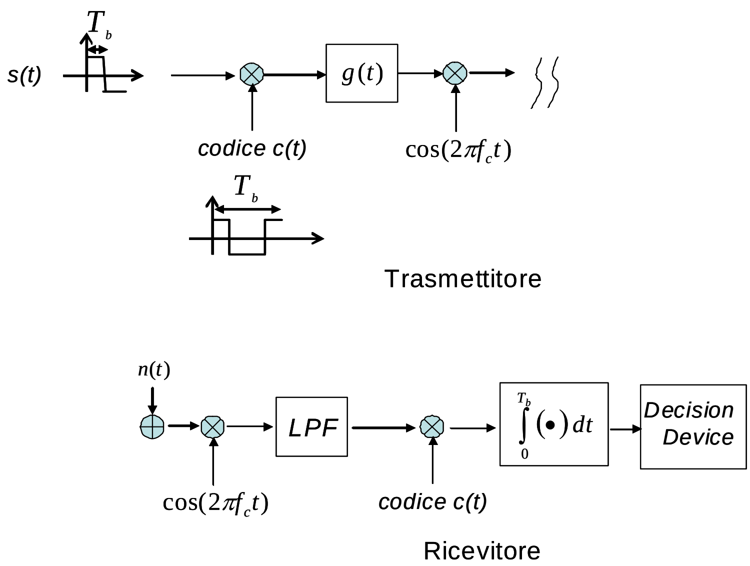

Figura 1:

Si indichi quale' il massimo numero di utenti che possono simultaneamente occupare la stessa banda al fine di garantire una probabilita' di errore sul bit di 10^{-2}. Si indichi per quali condizioni (sincronicita' o asincronicita'?) e' possibile raggiungere tale limite

Il massimo numero di utenti che possono occupare la stessa banda si ottiene assumendo completa asincronicita' di fase e minima occupazione di banda (eccesso di banda nullo, $\alpha = 0$). Il fattore di espansione di banda Q (che limita le prestazioni del sistema in termini di probabilita' di errore) si ricava a partire dall'occupazione di banda radio-frequenza e dal bit-rate per $\alpha = 0$:

$$B_{RF} = QR_b,$$

quindi $Q = 200$. Nel caso di completa asincronicita' di fase tra gli utenti (si veda la teoria), la probabilita' di errore sul bit vale

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2Q}{N-1}}\right) = 10^{-2}$$

da cui (risolvento l'equazione) il massimo numero di utenti vale $2Q/(N-1) = 2.3^2$, $N = 76$ utenti. Per utenti sincroni (senza asincronicita' di fase)

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{Q}{N-1}}\right) = 10^{-2}$$

da cui $N = 38$.

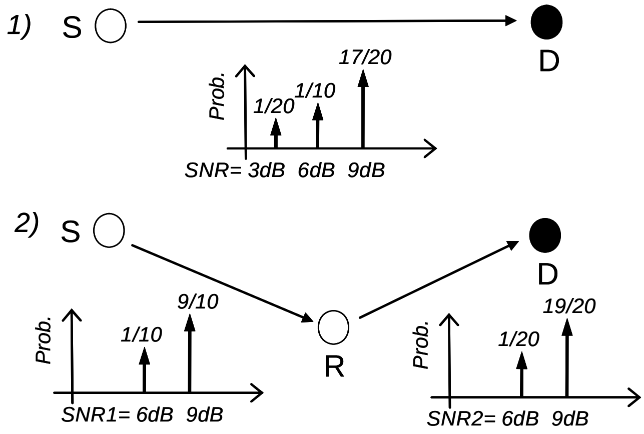

Figura 2:

Si assuma ora di adottare ora un filtro sagomatore sul chip $g(t)$ a RRC (impulso a coseno rialzato) con eccesso di banda (roll-off) $\alpha = 20\%$. Si ricalcoli il massimo numero di utenti che possono simultaneamente occupare la stessa banda

Il fattore di espansione di banda Q (che limita le prestazioni del sistema in termini di probabilita' di errore) si ricava ora a partire dall'occupazione di banda a radio-frequenza, dal bit-rate e dall'eccesso di banda del filtro sagomatore del chip $\alpha = 20\%$,

$$B_{RF} = QR_b(1+\alpha)$$

da cui $Q = 166$.Nel caso di completa asincronicita' di fase tra gli utenti (si veda la teoria), la probabilita' di errore sul bit vale

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2Q}{N-1}}\right) = 10^{-2}$$

da cui (risolvento l'equazione) il massimo numero di utenti vale $2Q/(N-1) = 2.3^2$, $N = 63$.Per utenti sincroni (senza asincronicita' di fase) $N = \lfloor 63/2 \rfloor = 31$.

2 Probabilità di errore per canali tempovarianti[1]

Per un collegamento radio (singola tratta) con modulazione BPSK il rapporto segnale rumore in ricezione fluttua nel tempo a causa di interferenza. Le fluttuazioni del rapporto segnale-rumore si presentano con probabilità note (si veda la figura 2 - caso 1). Determinare la probabilità di errore media del collegamento.

La probabilita' di errore media del collegamento (singola tratta) vale ($SNR = 2E_b/N_0 = 2E_s/\!\!/N_0$)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{SNR}[P_b(E|SNR)] &= \sum P_b(E|x) \times \Pr[SNR = x] = \\ &= P_b(E|3dB) \times \Pr[SNR = 3dB] + \\ +P_b(E|6dB) \times \Pr[SNR &= 6dB] + P_b(E|9dB) \times \Pr[SNR = 9dB] \end{aligned}$$

dove $P_b(E|x) = Q(\sqrt{2E_b/N_0}) = Q(\sqrt{x})$ quindi

$$\mathrm{E}_{SNR}[P_b(E|x)] = \frac{1}{20}Q(\sqrt{2}) + \frac{1}{10}Q(\sqrt{4}) + \frac{17}{20}Q(\sqrt{8}) \approx 10^{-2}$$

Si ripeta lo stesso esercizio nel caso in cui il collegamento sia suddiviso in due tratte tramite un ripetitore rigenerativo, per le due tratte il rapporto segnale-rumore fluttua con probabilità note (riportate in figura 2 - caso 2 - si noti che le densità di probabilità sono diverse per i due collegamenti).

[1] Si veda anche il tema d'esame del 6 luglio 2004

La probabilita' di errore media del collegamento (a due tratte) vale $\mathrm{E}_{SNR1,SNR2}[P_b(E|SNR1,SNR2)]$ dove, date due realizzazioni di SNR (x,y rispettivamente) sulle due tratte, la probabilita' di errore per ripetitore rigenerativo vale al solito

$$\begin{aligned} P_b(E|x,y) &= 1-[1-P_b(E|x)]\times[1-P_b(E|y)] \approx \\ &\approx P_b(E|x)+P_b(E|y) \end{aligned}$$

quindi (assumendo che le due variabili casuali $SNR1$ e $SNR2$ siano indipendenti)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{SNR1,SNR2}[P_b(E|SNR1,SNR2)] &= 1-\mathrm{E}_{SNR1}[1-P_b(E|SNR1)]\times\mathrm{E}_{SNR2}[1-P_b(E|SNR2)] \approx \\ &\approx \mathrm{E}_{SNR1}\left[P_b(E|SNR1)\right]+\mathrm{E}_{SNR2}\left[P_b(E|SNR2)\right] \end{aligned}$$

i due termini si calcolano separatamente per le due tratte

$$\mathrm{E}_{SNR1}\left[P_b(E|SNR1)\right]=\frac{1}{10}Q(\sqrt{4})+\frac{9}{10}Q(\sqrt{8})\approx 10^{-3}$$

$$\mathrm{E}_{SNR2}\left[P_b(E|SNR2)\right]=\frac{1}{20}Q(\sqrt{4})+\frac{19}{20}Q(\sqrt{8})\approx 10^{-3}$$

quindi $\mathrm{E}_{SNR1,SNR2}[P_b(E|SNR1,SNR2)]=2\times10^{-3}$.

3 Probabilità di fuori-servizio e fading di Rayleigh[2]

Un sistema di comunicazione radio è considerato in servizio quando garantisce una trasmissione di 2Mbps con una probabilità di errore inferiore a 10^{-4}. Supponendo che il sistema utilizzi una modulazione 16QAM con densità spettrale monolatera del rumore pari a $N_0=-160\ dBm/Hz$ dimensionare la potenza trasmessa P_T in modo che $P_b(E)=10^{-4}$, il canale ha un'attenuazione pari a $A=60dB$

Affinchè

$$P_b(E)=\frac{3}{4}\times Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right)\leq 10^{-4}$$

deve essere

$$\frac{2E_s}{N_0} = \frac{E_sR_s}{\frac{N_0}{2}R_s}=\frac{P_R}{P_N}=SNR\geq\gamma=21dB \tag{1}$$

$$\text{(oppure)}\ \frac{E_s}{N_0} = \frac{\gamma}{2}\geq 18dB \tag{2}$$

quindi

$$SNR=\frac{P_R}{P_N}=\frac{P_T}{A\frac{N_0}{2}R_s}\geq\gamma$$

$$P_T=\gamma AP_N=\frac{\gamma}{2}AN_0R_s=-25dBm$$

Assumendo ora che il canale di comunicazione sia soggetto ad affievolimenti casuali (fading di Rayleigh) con attenuazione nominale $A=60dB$, dimensionare la potenza trasmessa P_T in modo che il sistema si trovi in uno stato di fuori-servizo non più di 2 minuti al giorno.

La probabilità di fuori-servizio $\Pr[P_b(E)\geq10^{-4}]\leq P_{fs}$, dove $P_{fs}=2/(60\times24)\sim10^{-3}$ è la probabilità di fuori-servizio richiesta per il collegamento.

Nel caso in cui il canale di comunicazione sia soggetto ad affievolimenti casuali (fading di Rayleigh) la potenza ricevuta è una variabile casuale con distribuzione esponenziale

$$P_R\sim\frac{1}{\bar{P}_R}\exp\left(-\frac{P_R}{\bar{P}_R}\right)$$

[2] Si veda domanda D1 tema d'esame 22 Febbraio 2006

dove $\bar{P}_R = \mathrm{E}[P_R] = P_T/A$, A è il l'attenuazione media della tratta, che comprende i termini di guadagno delle antenne in trasmissione e ricezione[3].

Il margine di potenza (fading margin M_f) da aggiungere per far fronte alla casualità della potenza ricevuta vale

$$M_f = \frac{1}{\ln\left[(1-P_{fs})^{-1}\right]} \approx \frac{1}{P_{fs}} \Rightarrow 10\log_{10}(P_{fs}^{-1}) = 30dB$$

l'approssimazione è valida per $P_{fs} \ll 1$. La potenza richiesta in trasmissione vale

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{\gamma}{2}AN_0R_s \times \frac{1}{\ln\left[(1-P_{fs})^{-1}\right]} = -25dBm + M_f = \\ &= \underbrace{-25dBm}_{\text{Potenza richiesta per il caso nominale (senza fading, singola tratta)}} \quad \underbrace{+30dB}_{\text{Margine di fading } M_f} = 5dBm\ (3.1Watt). \end{aligned}$$

Nota sul calcolo del margine di fading.

Il rapporto segnale rumore (si ricorda che la potenza di rumore vale $P_N = R_sN_0/2$) in ricezione è anch'esso casuale con la stessa distribuzione

$$SNR = \frac{P_R}{P_N} \sim \frac{1}{\overline{SNR}}\exp\left(-\frac{SNR}{\overline{SNR}}\right) = \frac{1}{\bar{P}_R/P_N}\exp\left(-\frac{SNR}{\bar{P}_R/P_N}\right)$$

e vale in media

$$\mathrm{E}[SNR] = \overline{SNR} = \frac{\bar{P}_R}{P_N} = \frac{P_T}{AP_N}$$

La probabilità di avere il collegamento fuori-servizio $\Pr[P_b(E) \geq 10^{-4}]$ coincide con la probabilita' $\Pr[SNR \leq 21dB]$ (si veda il dimensionamento nominale del punto precedente) e si scrive (in generale per $p = 10^{-4}$ e $\gamma = 21dB$)

$$\begin{aligned} \text{Probabilita' di fuori-servizio:=} \quad & \Pr[P_b(E) \geq p] = \\ =\ & \Pr[SNR \leq \gamma] = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\overline{SNR}}\right) = \\ =\ & 1 - \exp\left(-\frac{\gamma P_N}{\bar{P}_R}\right) \leq P_{fs} = 10^{-3}. \end{aligned}$$

Sostituendo $\bar{P}_R = P_T/A$, $P_N = R_sN_0/2$, $R_s = 2Mbps/4 = 0.5Msimboli/s$ possiamo scrivere il vincolo da imporre alla potenza in trasmissione per garantire una probabilita' di fuori-servizio pari a $P_{fs} = 10^{-3}$,

$$1 - \exp\left(-\frac{\gamma R_s N_0 A}{2P_T}\right) \leq P_{fs} = 10^{-3}$$

che diventa appunto

$$P_T \geq \frac{\gamma}{2}AN_0R_s \times \frac{1}{\ln\left[(1-P_{fs})^{-1}\right]}$$

Dimensionare la potenza in trasmissione nelle stesse condizioni di canale del punto precedente al variare ora della diversità di spazio in ricezione (numero antenne in ricezione). Si calcoli quindi la potenza in trasmissione richiesta per soddisfare le stesse specifiche sulla probabilità di fuori-servizio al variare del numero di antenne L in ricezione (si considerino i casi $L = 2, 3, 4$)

Per L antenne in ricezione in diversita' di spazio la probabilità di fuori-servizio coincide con la probabilita' che ognuno degli L ricevitori sia in fuoriservizio (la condizione di fuoriservizio è indipendente da ricevitore a ricevitore), per $p = 10^{-4}$ e $\gamma = 21dB$

$$\begin{aligned} \text{Probabilita' di fuori-servizio:=} \quad & \Pr[P_b(E) \geq p]^L = \\ =\ & \Pr[SNR \leq \gamma]^L = \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma P_N}{\bar{P}_R}\right)\right]^L \leq P_{fs} = 10^{-3} \end{aligned}$$

[3] Per esempio, se l'attenuazione media del canale coincide con l'attenuazione in spazio libero $\bar{P}_R = P_T/A = P_TG_TG_R/\left[(4\pi)^2 \times (d/\lambda)^2\right]$. Quindi $A^{-1} = G_TG_R/\left[(4\pi)^2 \times (d/\lambda)^2\right]$.

Ricordando che $\bar{P}_R = P_T/A$ e $P_N = R_s N_0/2$ con $R_s = 2Mbps/4 = 0.5Msimboli/s$ possiamo scrivere il vincolo da imporre alla potenza in trasmissione per avere una probabilita' di fuori-servizio complessiva pari a $P_{fs} = 10^{-3}$

$$1 - \exp\left(-\frac{\gamma R_s N_0 A}{2P_T}\right) \leq P_{fs}^{1/L}$$

ovvero la probabilita' di fuori-servizio $1-\exp\left(-\frac{\gamma R_s N_0 A}{2P_T}\right)$ su ogni collegamento (in diversita') in parallelo deve valere $P_{fs}^{1/L}$.

$$\begin{aligned} P_T &\geq \frac{\gamma}{2} A N_0 R_s \times \frac{1}{\ln\left[(1-P_{fs}^{1/L})^{-1}\right]} \simeq \\ &\simeq \frac{\gamma}{2} A N_0 R_s \times \frac{1}{P_{fs}^{1/L}} = \underbrace{-25dBm}_{\text{Potenza richiesta per il caso nominale (senza fading, singola tratta)}} \quad \underbrace{+\frac{30}{L}dB}_{\text{Margine di fading } M_f(L)} . \end{aligned}$$

per $L = 2, 3, 4$. Il margine di potenza (fading margin) $M_f(L)$ da aggiungere (rispetto al dimensionamento senza fading) per far fronte alla casualità della potenza ricevuta vale ora

$$M_f(L) = \frac{1}{\ln\left[(1-P_{fs}^{1/L})^{-1}\right]} \approx \frac{1}{P_{fs}^{1/L}} \Rightarrow \frac{10\log_{10}(P_{fs}^{-1})}{L} = \frac{30}{L}dB$$

l'approssimazione è valida per $P_{fs} \ll 1$. Rispetto al caso a singola antenna in ricezione ($L = 1$), il margine di fading risulta diviso per L (in dB)[4].

Si supponga di suddividere la comunicazione utilizzando T tratte uguali rigenerative. L'attenuazione (per ogni tratta) vale $\tilde{A} = 60 - 20\log_{10}(T)dB$[5], il canale su ogni tratta e' soggetto fluttuazioni casuali dovute al fading. Dimensionare la potenza in trasmissione (si assuma i ripetitori equipaggiati da una sola antenna) per ogni tratta per soddisfare le stesse specifiche sulla probabilità di fuori-servizio al ricevitore finale.

Per T tratte rigenerative il collegamento e' in fuori-servizio se almeno una tratta e' in fuori-servizio. La probabilità di fuori-servizio (per T tratte, $p = 10^{-4}$ e $\gamma = 21dB$) e'

$$\begin{aligned} \text{Probabilita' di fuori-servizio} \quad &: \quad = 1 - (1 - \Pr[P_b(E) \geq p])^T \simeq \\ &\simeq \quad T \times \Pr[P_b(E) \geq p] \leq P_{fs} = 10^{-3} \Rightarrow \\ T \times \Pr[SNR \quad &\leq \quad \gamma] = T \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma P_N}{\bar{P}_R}\right)\right] \leq P_{fs} = 10^{-3} \end{aligned}$$

dove $(1 - \Pr[P_b(E) \geq p])^T$ e' la probabilita' che il collegamento multi-tratta sia in servizio. Rricordando che $\bar{P}_R = P_T/\tilde{A}$ e $P_N = R_s N_0/2$ con $R_s = 2Mbps/4 = 0.5Msimboli/s$ possiamo scrivere il vincolo da imporre alla potenza in trasmissione (in questo caso su ogni tratta) in modo che la probabilita' di fuori-servizio al ricevitore finale sia $P_{fs} = 10^{-3}$

$$1 - \exp\left(-\frac{\gamma R_s N_0 \tilde{A}}{2P_T}\right) \leq \frac{P_{fs}}{T}$$

con $\tilde{A} = 60 - 20\log_{10}(T)dB$ ($\tilde{A} = A/T^2$, $A = 60dB$) grazie alla minor attenuazione media del canale sulla singola tratta. La potenza in trasmissione (al variare del numero di tratte T) per ogni terminale vale

---

[4] Con ricevitori a diversità di spazio è il margine di fading ad essere ridotto di un fattore (in dB) pari al numero di antenne, *non* la potenza complessiva richiesta in trasmissione. Questa è la somma della potenza richiesta per il dimensionamento nominale (per garantire una certa probabilità di errore nel caso senza fading) più il margine di fading, che dipende dal numero di antenne utilizzate in ricezione.

[5] Si noti che, in caso di propagazione in spazio libero, l'attenuazione del canale $A = \left(G_T G_R / \left[(4\pi)^2 \times (d/\lambda)^2\right]\right)^{-1} = 60dB$ diminuisce con l'aumentare del numero di tratte T $\tilde{A} = \left(G_T G_R / \left[(4\pi)^2 \times [(d/T)/\lambda]^2\right]\right)^{-1} = \frac{1}{T^2}A = 60 - 20\log_{10}(T)[dB]$

Esempio: suddividere il collegamento in due tratte uguali ($T = 2$) significa (per propagazione in spazio libero) che l'attenuazione di tratta $\tilde{A}$ è diminuita di $6dB$, $\tilde{A} = A - 20\log_{10}(2) = 54dB$.

$$
\begin{aligned}
P_T &\geq \frac{\gamma}{2}\tilde{A}N_0R_s \times \frac{1}{\ln\left[(1-\frac{P_{fs}}{T})^{-1}\right]} \simeq \frac{\gamma}{2}\tilde{A}N_0R_s \times \frac{T}{P_{fs}} = \frac{\gamma}{2}\frac{A}{T^2}N_0R_s \\
&= \underbrace{-25dBm \qquad \underbrace{-20\log_{10}(T)}_{\text{Diminuzione dell'attenuazione rispetto al caso singola tratta}}}_{\text{Potenza richiesta per il caso nominale (senza fading, multi-tratta)}} + \underbrace{30dB + 10\log_{10}(T)}_{\text{Margine di fading } M_f} = \\
&= 5dBm - 10\log_{10}(T).
\end{aligned}
$$

Il margine di fading per il sistema multitratta (al variare del numero di tratte T) vale

$$
\begin{aligned}
M_f &= \frac{1}{\ln\left[(1-\frac{P_{fs}}{T})^{-1}\right]} \approx \frac{T}{P_{fs}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 10\log_{10}(P_{fs}^{-1}) + 10\log_{10}(T) = \\
&= 30dB + 10\log_{10}(T)
\end{aligned}
$$

la presenza dei $T-1$ ripetitori rigenerativi causa un *incremento* del margine di fading (per garantire $P_{fs} = 10^{-3}$) di un fattore $10\log_{10}(T)$ $[dB]$[6] per ogni tratta, tuttavia, nel dimensionamento nominale la potenza in trasmissione su ogni tratta è diminuita di $20\log_{10}(T)$ $[dB]$ rispetto al caso singola tratta, dato che l'attenuazione media canale è diminuita dello stesso fattore.

Si confrontino i risultati (per i casi con fading, singola tratta, singola tratta - antenne multiple in ricezione, multi-tratta - singola antenna in ricezione) in termini di costi.

Si assuma che il costo dell'apparato di trasmissione (comprensivo dell'antenna) dipenda dalla potenza P_T del trasmettitore (valutata in dBm) e che aumenti di 10\$ per ogni dBm utilizzato sopra i $-25dBm$ (per esempio $P_T = 10dBm$, costo $C_T = 10 \times [10+25]\$ + 5\$ = 355\$$, quindi $P_T = -25dBm$ $C_T = 5\$$)

$$C_T = 10 \times [P_T[dBm] + 25]\$ + 5\$.$$

Il costo di un ricevitore (con L antenne) vale $C_R = 5^L\$$.

1) Caso 1 (collegamento diretto, singola antenna in ricezione, $L = 1$). La potenza in trasmissione richiesta per soddisfare il vincolo sul fuori-servizio valeva $P_T = 5dBm$, il costo totale (TX e RX) vale

$$\text{Costo Totale} = 10 \times [5[dBm] + 25]\$ + 5\$ + 5\$ = 310\$$$

2) Caso 2 (collegamento diretto, L antenne in ricezione). La potenza in trasmissione richiesta (al variare di L) per soddisfare il vincolo sul fuori-servizio valeva $P_T = -25 + 30/L$ $[dBm]$, il costo totale (TX e RX) vale

$$\text{Costo Totale} = 10 \times [30/L]\$ + 5\$ + 5^L\$ = \frac{300}{L}\$ + 5^L\$ + 5\$$$

Conviene utilizzare un sistema ad antenne multiple (rispetto ad un sistema a singola antenna) quando

$$\frac{300}{L}\$ + 5^L\$ + 5\$ < 310\$$$

ovvero circa per $L \leq \lfloor \log_5 310 \rfloor = 3$.Il costo per $L = 2$ vale 180\$, per $L = 3$, 230\$. Si noti che se il costo dell'apparato in ricezione crescesse linearmente con il numero di antenne impiegate (p.es. $C_R = 5L\$$[7]) allora $\frac{300}{L}\$ + 5L\$ + 5\$ < 310\$$ per $1 < L < 60$. Il numero ottimale di antenne da impiegare si risolve imponendo

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{300}{L}\$ + 5L\$ + 5\$\right) = -\frac{300}{L^2} + 5 = 0$$

cioè $L = \sqrt{60} \sim 8$ (77.5\$).

[6]Nel caso con ripetitori rigenerativi, va garantita una probabilita' di fuori-servizio su ogni tratta inferiore a $P_{fs} = 10^{-3}$ $(10^{-3}/T)$ con un conseguente aumento del margine di fading (sulla singola tratta).

[7]Si veda per esempio il tema d'esame del 22 Febbraio 2006, domanda D1.

3) Caso 3 (collegamento tramite 3 tratte - 2 ripetitori rigenerativi, singola antenna in ricezione). La potenza in trasmissione richiesta per soddisfare il vincolo sul fuori-servizio valeva $P_T = 5dBm - 10\log_{10}(T)$., il costo totale (TX e RX) vale (si tenga conto che $T \geq 1$ tratte corrispondono a T trasmettitori e T ricevitori, un ripetitore è quindi composto da un trasmettitore + ricevitore)

$$\begin{aligned} \text{Costo Totale} &= T \times [10 \times [30 - 10\log_{10}(T)]\,\$ + 5\$ + 5\$] = \\ &= 310T\$ - 100T\log_{10}(T)\$ \end{aligned}$$

si noti che il caso $T = 1$ corrisponde al Caso 1.

Conviene utilizzare un sistema multi-tratta (rispetto ad un sistema a singola tratta - singola antenna in ricezione) quando

$$310T\$ - 100T\log_{10}(T)\$ < 310\$$$

ovvero per $T \geq 1252$.

4 Codici a blocco BCH e Hamming, decodifica hard e soft[8]

Si assuma di avere a disposizione un canale binario con probabilità di errore sul bit $p = 10^{-4}$. Per ridurre la probabilità di errore in ricezione è possibile scegliere tra due codici a distanza minima $d = 3$: i) codice di Hamming $n = 15$ (lunghezza parola di codice), $k = 11$ (bit di informazione nella parola di codice) ii) codice BCH $n = 255$, $k = 247$.

Si indichi quale soluzione è da preferirie

Per valutare quale delle due soluzioni è da preferire ci possiamo limitare a valutare il guadagno del codice. Per decodifica hard il guadagno del codice G vale

$$G_{hard} = (t+1)R_{codice}$$

dove $R_{codice} = k/n$ è il rate del codice (rapporto numero di bit di informazione trasmessi sul numero totale di bit nella parola di codice), mentre

$$t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

dove t è il numero minimo di errori che possono essere corretti dal codice con distanza minima d.

Per decodifica soft il guadagno del codice G

$$G_{soft} = dR_{codice} > G_{hard}$$

dove al solito $R_{codice} = k/n$

1) Decodifica hard.

Nel caso di decodifica hard il guadagno del codice di Hamming vale

$$G_{hard} = (t+1)R_{codice} = 2 \times \frac{11}{15}$$

mentre per il codice BCH

$$G_{hard} = (t+1)R_{codice} = 2 \times \frac{247}{255}$$

il guadagno è maggiore. Il codice da preferire è quindi il BCH, si noti che la complessità della decodifica dipende dalla lunghezza della parola di codice n (più alta per il BCH).

Si determini per entrambi i codici le prestazioni (al variare del rapporto segnale rumore per bit di informazione E_b/N_0) in termini di probabilità di errore sul bit per decodifica hard e soft assumendo di utilizzare una modulazione BPSK.

1) Decodifica hard: la probabiltà di errore sul bit *di codice* $P_{b,codice}(E)$ (assumendo BPSK) in ricezione vale

$$P_{b,codice}(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,codice}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{k}{n}}\right)$$

[8] Si veda il tema d'esame del 6 luglio 2005

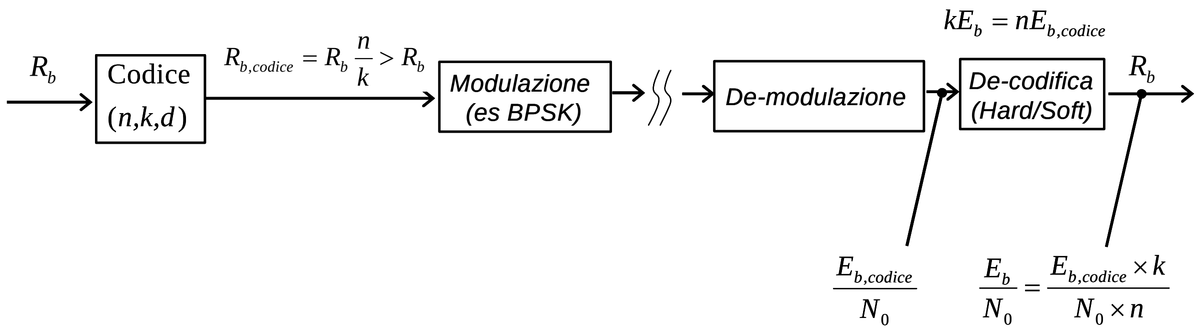

Figura 3:

dove $E_{b,codice}$ è l'energia ricevuta per ogni bit (o simbolo, essendo BPSK) *di codice* trasmesso. Definendo E_b come l'energia ricevuta per ogni bit di informazione trasmesso, deve valere la seguente equazione di bilancio $nE_{b,codice} = E_b k$ (l'energia ricevuta per ogni parola di codice è infatti $nE_{b,codice}$: se ogni parola di codice contiene k bit di informazione, l'equivalente energia ricevuta per bit *di informazione* è $E_b = nE_{b,codice}/k$ (si veda la figura 3)

Per valutare le prestazioni ci serve la probabilità di errore sul bit in *informazione* $P_b(E)$ che dipende da $P_{b,codice}(E)$ come segue (approssimazioni valide ad alto E_b/N_0)

$$\begin{aligned} P_b(E) &\leq \sum_{j=t+1}^{n} \frac{j}{n}\binom{n}{j} P_{b,codice}^{j}(E)(1-P_{b,codice}(E))^{n-j} \approx \binom{n-1}{t} P_{b,codice}^{t+1}(E) = \\ &= \binom{n-1}{t}\left[Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{k}{n}}\right)\right]^{t+1} \approx \binom{n-1}{t} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{k}{n}(t+1)}\right) = \binom{n-1}{t} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}G_{hard}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Hamming:} \qquad P_b(E) \leq 14Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \times 1.47}\right)$$

$$\text{BCH} \;\;:\;\; P_b(E) \leq 254Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \times 1.93}\right)$$

a parita' di rapporto segnale rumore per bit di informazione $E_b/N_0 \gg 1$ le prestazioni del BCH sono migliori.

2) Decodifica soft

$$P_b(E) \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}d\frac{k}{n}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}G_{soft}}\right)$$

$$\text{Hamming:} \qquad P_b(E) \leq 14Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \times 2.2}\right)$$

$$\text{BCH} \;\;:\;\; P_b(E) \leq 254Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \times 2.9}\right)$$

Si assuma ora che la probabilità di errore per ogni bit trasmesso tramite BPSK valga $p = 10^{-4}$ (come indicato inizialmente), si calcoli il valore numerico della probabilità d'errore in ricezione per entrambi gli schemi di codifica, si consideri il solo caso di decodifica hard

Si impone

$$P_{b,codice}(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,codice}}{N_0}}\right) = p = 10^{-4}$$

da cui

$$\frac{E_{b,codice}}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}\frac{k}{n} = 8.5dB$$

quindi il rapporto segnale rumore per bit di informazione vale nei due casi (inferiore evidentemente per BCH)

$$\begin{aligned} \text{Hamming} \quad &: \quad \frac{E_b}{N_0} = 8.5dB + 10\log_{10}(\frac{n}{k}) = 9.84dB \\ \text{BCH} \quad &: \quad \frac{E_b}{N_0} = 8.5dB + 10\log_{10}(\frac{n}{k}) = 8.63dB \end{aligned}$$

La probabilità di errore vale

$$\text{Hamming:} \qquad P_b(E) \le \binom{14}{1} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\times 1.47}\right)|_{\frac{E_b}{N_0}=9.8dB} = 14Q\left(\sqrt{\frac{4E_{b,codice}}{N_0}}\right)|_{\frac{E_{b,codice}}{N_0}=8.5dB} = 1.4\times 10^{-6}$$

$$\text{BCH} \quad : \quad P_b(E) \le \binom{254}{1} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\times 1.93}\right)|_{\frac{E_b}{N_0}=8.6dB} = 254Q\left(\sqrt{\frac{4E_{b,codice}}{N_0}}\right)|_{\frac{E_{b,codice}}{N_0}=8.5dB} = 2.54\times 10^{-5}$$

il codice Hamming da solo apparentemente migliori prestazioni, infatti la probabilità di errore è calcolata per un rapporto segnale rumore sul bit *di informazione* più elevato.

Proviamo infatti a calcolare la probabilità di errore nei due casi imponendo per esempio $E_b/N_0 = 12dB$ per entrambi i sistemi (in questo modo la spesa energetica per ogni bit di informazione trasmesso è la stessa)

$$\text{Hamming:} \qquad P_b(E) \le 14Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\times 1.47}\right)|_{\frac{E_b}{N_0}=12dB} = 14Q(6.8) \simeq 1.4\times 10^{-9}$$

$$\text{BCH} \quad : \quad P_b(E) \le \binom{254}{1} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\times 1.93}\right)|_{\frac{E_b}{N_0}=12dB} = 254Q(7.8) \simeq 2.54\times 10^{-12}$$

N.B. Il calcolo di $Q(6.8)$ e $Q(7.8)$ e' stato eseguito utilizzando l'approssimazione $\log_{10} Q(x) \simeq -1.04 - 0.22x^2$ per $x > 5 \div 6$, da cui

$$Q(x) \approx 10^{-1.04-0.22x^2}$$

Si determini l'occupazione di banda per entrambi i sistemi di codifica (Hamming e BCH) assumendo di voler trasmettere un flusso di bit di informazione pari a $R_b = 100kbps$ e di utilizzare un impulso a radice di Nyquist in trasmissione con eccesso di banda (roll-off) $\alpha = 20\%$

Il flusso di bit trasmesso sul canale (bit di codice) aumenta a causa della codifica. Il numero di bit-di-codice/s trasmessi vale

$$R_{b,codice} = R_b\frac{n}{k}$$

mentre $R_b = 100kbps$ è di fatto il flusso *netto* di bit di *informazione.* Per codice Hamming $R_{b,codice} = R_b n/k = 100kbps \times 15/11 = 136.3kbps$, per codice BCH $R_{b,codice} = R_b n/k = 100kbps \times 255/247 = 103.2kbps$. La banda occupata a radio-frequenza vale (per BPSK[9])

$$B_{RF} = R_s(1+\alpha) = R_{b,codice}(1+\alpha) = R_b(1+\alpha)\frac{n}{k}$$

per codice di Hamming vale $B_{RF} = 163.5kHz$, per il codice BCH la banda occupata è inferiore $B_{RF} = 123.8kHz$.

Assumendo che la banda disponibile per la comunicazione sia pari a $B_{RF} = 150kHz$ calcolare il massimo numero di bit di informazione (il flusso netto di bit) che è possibile trasmettere per i due codici.

[9] I codici binari (BCH, Hamming) sono comunemente associati a modulazioni binarie (BPSK)

Il flusso netto in bit/s si ricava dalla banda disponibile occupata a radio-frequenza e dalle caratteristiche del codice (BCH-Hamming)

$$\begin{aligned} B_{RF} &= R_s(1+\alpha) = R_{b,codice}(1+\alpha) = R_b(1+\alpha)\frac{n}{k} \\ R_b &= \frac{B_{RF}\times k}{(1+\alpha)n} \leq \frac{B_{RF}\times k}{n} \end{aligned}$$

dove per il codice Hamming il flusso netto (massimo per il caso ideale di roll-off nullo) vale

$$R_b \leq \frac{B_{RF}\times k}{n} = \frac{150kHz\times 11}{15} = 110kbps$$

mentre per codice BCH

$$R_b \leq \frac{B_{RF}\times k}{n} = \frac{150kHz\times 247}{255} = 145kbps$$

Si assuma che la densità spettrale monolatera del rumore sia pari a $N_0 = -160\ dBm/Hz$ e che la propagazione avvenga in spazio libero (senza fading) con un'attenuazione complessiva di $A = 60dB$. Si calcoli l'energia richiesta per bit di informazione (e di codice) per entrambi gli schemi di codifica (BCH e Hamming). Si assuma per semplicita' decodifica hard (si ricorda che la probabilita' di errore per ogni bit trasmesso vale 10^{-4}).

Per decodifica hard, la probabilita' di errore sul singolo bit (di codice) vale $p = 10^{-4}$, da cui possiamo ricavare il rapporto segnale rumore $E_{b,codice}/N_0$ in ricezione per ogni bit (di codice) trasmesso imponendo

$$P_{b,codice}(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,codice}}{N_0}}\right) = 10^{-4}$$

$$\frac{E_{b,codice}}{N_0} \simeq 8.5dB$$

L'energia spesa per ogni bit (di codice) trasmesso $E_{tx,codice}$ si ricava da

$$\begin{aligned} \frac{E_{b,codice}}{N_0} &= \frac{E_{tx,codice}}{AN_0} = 8.5dB \\ E_{tx,codice} &= 0.72\ nJ/bit \end{aligned}$$

(per $A = 60dB$ e $N_0 = -160\ [dBm/Hz]$) ed e' uguale per entrambi i codici

L'energia spesa per ogni bit di *informazione* vale

$$E_{tx} = \frac{n}{k}E_{tx,codice}$$

infatti il bilancio energetico valido in ricezione vale anche in trasmissione $kE_{tx} = nE_{tx,codice} = E_{tx}k$.

Per il codice di Hamming

$$E_{tx} = \frac{n}{k}\times E_{tx,codice} = \frac{15}{11}\times 0.72nJ/bit = 0.98nJ/bit$$

mentre per il codice BCH

$$E_{tx} = \frac{n}{k}\times E_{tx,codice} = \frac{255}{247}\times 0.72nJ/bit = 0.74nJ/bit$$